M. Spieß

12. Übung zur Vorlesung Topologie 1

Wintersemester 2009/10 Do, 28.1.10 (keine Abgabe)

Aufgabe 1. (a) Definieren Sie die Begriffe *Hausdorff Raum*, $T3$-*Raum* und $T4$-*Raum*.

(b) Zeigen Sie, dass ein hausdorffscher und $T4$-Raum ein $T3$-Raum ist.

(c) Zeigen Sie, dass ein kompakter Raum ein $T3$-Raum ist.

Aufgabe 2. Sei X ein quasikompakter topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine lokal beschränkte Abbildung, d.h. jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung U, so dass $f(U)$ beschränkt ist. Zeigen Sie, dass f beschränkt ist (beachten Sie, dass nicht vorausgesetzt wird, dass f stetig ist).

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{D}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

(a) Seien $z_0, z_1 \in \mathbb{D}^2$ mit $z_0 \neq z_1$. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{D}^2 - \{z_1\}, z_0)$.

(b) Sei $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ ein Homöomorphismus. Zeigen Sie, dass gilt $f(S^1) = S^1$.

Aufgabe 4. Sei X ein Hausdorff Raum, G eine endliche Gruppe und sei $G \times X \to X, (g,x) \mapsto gx$ eine G-Operation auf X. Zeigen Sie: Operiert G *fixpunktfrei* auf X (d.h. es gilt $gx \neq x$ für alle $x \in X$ und $g \in G - \{1\}$) dann operiert G frei auf X.

Aufgabe 5. Sei $p : Y \to X$ ein Überlagerung und sei Y quasikompakt. Zeigen Sie, dass $p^{-1}(x)$ endlich ist für alle $x \in X$.

Aufgabe 6. (a) Formulieren und beweisen Sie den "Wege-Liftungs-Satz" für Überlagerungen.

(b) Seien $p : Y \to X$, $q : Z \to X$ Überlagerungen und sei $h : Z \to Y$ stetig mit $p \circ h = q$. Zeigen Sie: Ist Y wegzusammenhängend dann ist h surjektiv (Hinweis: Benutzen Sie den Wege-Liftungs-Satz).

Aufgabe 7. Sei $X = (X, \mathfrak{X})$ ein topologischer Raum, und $p : X \to Y$ eine surjektive Abbildung.

(a) Definieren Sie die Quotiententopologie auf Y bzgl. p.

(b) Welche universelle Eigenschaft besitzt die Quotiententopologie?

(c) Sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung. Zeigen Sie, dass die Topologie auf Y die Quotiententopologie bzgl. p ist.