Spieß

2. Übung zur Vorlesung Topologie 1

Wintersemester 2009/10 Abgabe: Do, 29.10.09

Aufgabe 1. (a) Sei X ein topologischer Raum. Für $x \in X$ sei $\mathcal{U}_x$ die Menge aller Umgebungen von X. Zeigen Sie:

(i) $\mathcal{U}_x \neq \emptyset$ und $x \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}_x$;

(ii) Für $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x$ ist $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_x$;

(iii) Für $U \in \mathcal{U}_x$ und $U \subseteq W \subseteq X$ ist $W \in \mathcal{U}_x$;

(iv) Für jedes $U \in \mathcal{U}_x$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}_x$ mit $V \subseteq U$ und $V \in \mathcal{U}_y$ für alle $y \in V$.

(b) Sei X eine Menge und für jedes $x \in X$ sei eine Familie von Teilmengen $\mathcal{U}_x$ von X gegeben mit den Eigenschaften (i)-(iv) aus (a). Zeigen Sie, dass durch $\mathcal{X} := \{U \subseteq X |\ U \in \mathcal{U}_x \,\forall\, x \in U\}$ eine Topologie auf X definiert wird. Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}_x$ die Menge der Umgebungen von $x \in X$ bzgl. dieser Topologie ist.

Aufgabe 2. Sei $X = (X, \mathcal{X})$ ein topologischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ heisst nach oben halbstetig in $x \in X$, wenn es zu zu jedem $x \in X$ und $\epsilon > 0$ eine Umgebung U von x gibt mit $f(y) < f(x) + \epsilon$ für alle $y \in U$. f heisst nach oben halbstetig, wenn es in jedem Punkt nach oben halbstetig ist.

(a) Sei $\mathcal{O}_< := \{(-\infty, a)|a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ und $\mathcal{O}_\leq := \{(-\infty, a)|a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a]|a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_<$ und $\mathcal{O}_\leq$ Topologien auf $\mathbb{R}$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $f : X \to \mathbb{R}$ genau dann nach oben halbstetig ist, wenn f stetig bzgl. $\mathcal{O}_<$ ist (d.h. $f : (X, \mathcal{X}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_<)$ ist stetig).

Aufgabe 3. Sei $Y = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_<)$ und $Z = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_\leq)$. Bestimmen Sie alle stetigen Abbildungen $Y \to Y$, $Y \to Z$, $Z \to Y$ und $Z \to Z$.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum. Sei $\mathcal{F}$ die Familie aller abgeschlossenen Teilmengen von X. Für $A \subseteq X$ sei $\overline{A} = \bigcap_{B \in \mathcal{F}, B \supseteq A} B$ (d.h. $\overline{A}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von X, die A enthalten; die Menge $\overline{A}$ heisst die *abgeschlossene Hülle* oder der *Abschluss* von A). Zeigen Sie

(a) $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält.

(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(c) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $A \subseteq X$. Dann gilt $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.