Spieß

3. Übung zur Vorlesung Topologie 1

Wintersemester 2009/10 Abgabe: Do, 5.11.09

Aufgabe 1. (a) Sei Y eine Menge, X ein topologischer Raum, und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass es genau eine Topologie auf Y gibt (genannt *Finaltopologie*), mit der folgenden universellen Eigenschaft:

Ist Z ein beliebiger topologischer Raum, so ist eine Abbildung $g : Y \to Z$ genau dann stetig, wenn $g \circ f : X \to Z$ stetig ist.

(b) Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heisst *Identifizierung*, wenn f surjektiv ist und Y die Quotiententopologie bzgl. f trägt. Zeigen Sie, dass die Projektionen $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$, $p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ eines Produktes zweier (nicht-leerer) topologischer Räume offen und Identifizierungen sind.

Aufgabe 2. (a) Sei $f_i : X_i \to Y_i$, $i \in I$ eine Familie von Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\prod_{i\in I} f_i : \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i, (x_i)_{i\in I} \mapsto (f_i(x_i))_{i\in I}$ genau dann stetig ist, wenn f_i stetig ist für alle $i \in I$.

(b) Zeigen Sie, dass $\prod_{i\in I} f_i$ eine Einbettung ist, falls f_i eine Einbettung ist für alle $i \in I$.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Mit $\sim_A$ bezeichnen wir die Äquivalenzrelation

$$x \sim_A y :\iff x = y \text{ oder } x, y \in A$$

und mit X/A den Quotientenraum $X/\sim_A$ (X/A entsteht aus X durch *Zusammenschlagen von A zu einem Punkt*). Zeigen Sie, dass $[0,1]/[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ homöomorph zum Intervall $[0,1]$ ist. Sind $[0,1]/(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ und $[0,1]$ homöomorph?

Aufgabe 4. (a) Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X genau dann hausdorffsch ist, wenn die Diagonale $\Delta = \{(x,x) | x \in X\}$ abgeschlossen in $X \times X$ ist.

(b) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Zeigen Sie: Ist Y hausdorffsch, so ist $\mathrm{Graph}(f) := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = y\}$ abgeschlossen in $X \times Y$.