Spieß

4. Übung zur Vorlesung Topologie 1

Wintersemester 2009/10 Abgabe: Do, 12.11.09

Aufgabe 1. Sei $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie von nicht-leeren topologischen Räumen. Zeigen Sie, dass $\prod_{i\in I} X_i$ genau dann ein $T3$-Raum ist, wenn alle Faktoren X_i $T3$-Räume sind.

Aufgabe 2. (a) Sei $A\colon = \{(x, \frac{1}{x}) |\, x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ und $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, xy = 0\}$. Gibt es eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ mit $f^{-1}(0) = A$ und $f^{-1}(1) = B$? Geben Sie gegebenenfalls eine an.

(b) Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines $T4$-Raums X und $f : A \to S^n\colon = \{(x_0, \ldots, x_n)|\, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von A (d.h. U ist offen und $A \subseteq U$) und eine stetige Abbildung $g : U \to S^n$ existiert, so dass $g|_A = f$.

(c) Zeigen Sie für $n = 0$ durch ein Gegenbeispiel, dass sich f i.a. nicht zu einer stetigen Abbildung $X \to S^n$ fortsetzen lässt (d.h. geben Sie ein Beispiel für A, X und $f : A \to S^0$ an, so dass kein stetiges $g : X \to S^0$ mit $g|_A = f$ existiert).

Aufgabe 3. Ein topolgogischer Raum X heisst *regulär*, wenn er $T2$- und $T3$-Raum ist.

(a) Sei X regulär und sei A eine abgeschlossene Teilmenge von X. Zeigen Sie, dass X/A hausdorffsch ist (vergl. Übung 3, Aufgabe 3; X/A entsteht aus X durch zusammenschlagen von A zu einem Punkt).

(b) Geben Sie ein Beispiel einer offenen Teilmenge A eines regulären Raums X an, so dass X/A nicht hausdorffsch ist.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum und $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmässig gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert (d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in X$). Zeigen Sie, dass f stetig ist.