M. Spieß

5. Übung zur Vorlesung Topologie 1

Wintersemester 2009/10 Abgabe: Do, 19.11.09

Aufgabe 1. Sei X eine Menge und seien $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ zwei Topologien auf X mit $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2$. Zeigen Sie: Ist $(X, \mathfrak{X}_1)$ hausdorffsch und $(X, \mathfrak{X}_2)$ quasi-kompakt, so gilt $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$.

Aufgabe 2. Für eine Menge X, bezeichnen wir mit $\widehat{X}$ die Menge aller Ultrafilter auf X. Wir betrachten X als Teilmenge von $\widehat{X}$, indem wir $x \in X$ mit dem Ultrafilter $\mathcal{F}_x \colon = \{Y \subseteq X | x \in Y\}$ identifizieren. Für eine Teilmenge U von X sei $\widehat{U}$ die Menge aller Ultrafilter von X, die U enthalten. Sei X jetzt ein topologischer Raum. Wir bezeichnen eine Teilmenge $Y \subseteq \widehat{X}$ als *offen*, wenn sie sich als Vereinigung von Mengen der Form $\widehat{U}$, mit $U \subseteq X$ offen, darstellen lässt. Zeigen Sie:

(a) Die offenen Teilmengen von $\widehat{X}$ bilden eine Topologie, und X ist ein Unterraum von $\widehat{X}$.

(b) $\widehat{X}$ ist bzgl. dieser Topologie quasi-kompakt und X liegt *dicht* in $\widehat{X}$ (d.h. der Abschluss von X in $\widehat{X}$ ist ganz $\widehat{X}$).

Aufgabe 3. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum.

(a) Zeigen Sie, dass es zu jeder offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in X$ ein $i \in I$ existiert mit $U(x, \delta) \subseteq U_i$ (δ heisst *Lebesgue-Zahl* von $\{U_i\}_{i \in I}$).

(b) Sei (Y, d') ein weiterer metrischer Raum und sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass f gleichmässig stetig ist, d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt

$$d(x_1, x_2) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d'(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon.$$

Aufgabe 4. (a) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann quasi-kompakt ist, wenn für jede Familie von abgeschlossenen Teilmengen $\{A_i\}_{i \in I}$ von X mit $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ eine endlich Teilmenge $J \subseteq I$ existiert mit $\bigcap_{i \in J} A_i = \emptyset$.

(b) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen hausdorffschen topologischen Räumen und sei $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von kompakten Teilmengen von X. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(K_n) = f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n)$ gilt.