M. Spieß

6. Übung zur Vorlesung Topologie 1

Wintersemester 2009/10 Abgabe: Do, 26.11.09

Aufgabe 1. Seien A, B abgeschlossene Teilmengen eines topologischen Raums X. Zeigen Sie:

(a) A und B sind zusammenhängend, falls $A \cap B$ und $A \cup B$ zusammenhängend sind.

(b) Sind A und B nicht abgeschlossen, so ist (a) i.A. falsch.

Aufgabe 2. Sei G eine topologische Gruppe (mit der Verknüpfung $\circ$), d.h. und G ist eine Gruppe und ein topologischer Raum, und die Abbildung $G \times G \to G, (g, h) \mapsto g \circ h$ und $G \to G, g \mapsto g^{-1}$ sind stetig. Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponente G^0 des neutralen Elements ein Normalteiler von G ist (d.h. G^0 ist eine Untergruppe von G und es gilt $aG^0a^{-1} \subseteq G^0$ für alle $a \in G$).

Aufgabe 3. (Einpunktkompaktifizierung) Es sei $(X, \mathfrak{X})$ ein lokalkompakter topologischer Raum, der nicht kompakt ist. Wir wollen X durch Hinzufügen eines "unendlich fernen Punktes" zu einem kompakten Raum machen. Dazu setzen wir $\widehat{X} := X \cup \{\infty\}$ (wobei ∞ einfach nur der Name des neu hinzugefügten Punkts ist). Wir definieren $\widehat{\mathfrak{X}} := \mathfrak{X} \cup \{\widehat{X} - K \mid K \subseteq X \text{ ist kompakt}\}$. Zeigen Sie:

(a) $\widehat{\mathfrak{X}}$ ist eine Topologie auf $\widehat{X}$.

(b) $(\widehat{X}, \widehat{\mathfrak{X}})$ ist kompakt.

(c) X ist ein dichter Unterraum von $\widehat{X}$.

(Man nennt $\widehat{X}$ die *Einpunktkompaktifizierung* von X).

(d) Zeigen Sie, dass die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ homöomorph zur n-Sphäre S^n ist.

Aufgabe 4. Eine Scheibe Brot sei mit Schinken belegt. Ist es möglich, durch einen geraden Schnitt das Brot und den Schinken gleichzeitig zu halbieren?