M. Spieß

7. Übung zur Vorlesung Topologie 1

Wintersemester 2009/10 Abgabe: Do, 3.12.09

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum.

(a) Sei w ein Weg in X mit Anfangspunkt $x = w(0)$. Konstruieren Sie eine Homotopie zwischen $\epsilon_x * w$ und w.

(b) Seien w_1, w_2, w_3 Wege in X mit $w_1(1) = w_2(0)$ und $w_2(1) = w_3(0)$. Konstruieren Sie eine Homotopie zwischen $(w_1 * w_2) * w_3$ und $w_1 * (w_2 * w_3)$.

Aufgabe 2. Sei C der Unterraum von $\mathbb{R}$, der aus allen $x \in \mathbb{R}$ besteht, die eine Darstellung der Form $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ mit $a_n \in \{0, 2\}$ besitzen (C heisst *Cantor'sches Diskontinuum*. Es lässt sich auch wie folgt beschreiben; sei T_1 die Menge, die entsteht, indem man von $[0, 1]$ das mittelere offene Drittel – also $(1/3, 2/3)$ – weglässt; in den beiden übrig gebliebenen Intervallen $[0, 1/3]$ und $[2/3, 1]$ entfernen wir wieder das mittlere offene Drittel und erhalten den Raum T_2. Auf diese Weise erhalten wir eine absteigende Folge von Mengen $T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \ldots$ wobei T_m aus 2^m disjunkten abgeschlossenen Intervallen besteht und T_{m+1} aus T_m durch Wegnahme der mittleren offenen Drittel entsteht. C ist der Durchschnitt aller Mengen T_m). Zeigen Sie, dass C *total unzusammenhängend* ist, d.h. jede Zusammenhangskomponenten von C besteht nur aus einem Punkt.

Aufgabe 3. Wir betrachten die folgende Schleife $w : [0, 1] \to \mathrm{SO}(3) := \{A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = E \ \det(A) = 1\}$ an der Einheitsmatrix E:

$$w(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) & 0 \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Schleife w homotop zur inversen Schleife w^{-1} ist, d.h. es gilt $2[w] = 0$ in der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{SO}(3), E)$ (Hinweis: Drehen Sie die Rotationsachse von w(s) ,,auf den Kopf").

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $\pi_1(\mathrm{SO}(3), E)$ zyklisch von Ordnung 2 ist und von der Homotopieklasse der Schleife w erzeugt wird.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist X lokal wegzusammenhängend, so sind die Wegzusammenhangskomponenten von X offen und abgeschlossen. (*Erinnerung:* Die Wegzusammenhangskomponente von $x \in X$ ist die Menge aller Punkte $y \in X$, die mit x durch einen Weg verbunden werden können).

(b) Ist X lokal wegzusammenhängend und zusammenhängend, so ist X wegzusammenhängend.

(c) Sei $X \colon = \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\} \cup \{(x, \sin(\frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$. Zeigen Sie, dass X zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend ist.