M. Spieß

8. Übung zur Vorlesung Topologie 1

Wintersemester 2009/10 Abgabe: Di, 15.12.09

Aufgabe 1. Sei $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ mit $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass $P(z)$ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat. Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und $\exp : \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$. Für jedes $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ setze $w^* = \frac{w}{|w|} \in S^1$.

(a) Für $s \in [0,1]$ setze $P_s(z) \colon = z^n + s(a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0)$ und sei $r = 1 + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$. Zeigen Sie, dass $P_s(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$ und alle $s \in [0,1]$.

(b) Zeigen Sie, dass die Schlingen $w_1(t) \colon = \frac{P(r\exp(t))^*}{P(r)^*}$ und $w_2(t) \colon = \exp(nt)$ in S^1 an 1 homotop sind.

(Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, (t,s) \mapsto H(t,s) = \frac{P_s(r\exp(t))^*}{P_s(r)^*}$; sie ist nach (a) wohldefiniert).

(c) Angenommen $P(z)$ hat keine komplexe Nullstelle (insbesondere gilt dann $P(0) = a_0 \neq 0$). Zeigen Sie, dass dann die Schlingen w_1 und $w_3(t) \colon = 1$ homotop sind.

(d) Zeigen Sie, dass $P(z)$ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt.

Aufgabe 2. Es sei $S^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$ und sei $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ der n-dimensionale reelle projektive Raum, d.h. $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ ist der Quotientenraum $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$ wobei für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ gilt $x \sim y \colon \Leftrightarrow x = \lambda y$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von $x = (x_0, \ldots, x_n)$ mit $[x_0 : \ldots : x_n]$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $p : S^n \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}, (x_0, \ldots, x_n) \mapsto [x_0 : \ldots : x_n]$ eine Überlagerung ist.

(b) Nach Lemma 2.1.8 gibt es zu jeder Schleife w in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ an $P_0 = [1 : 0 : \ldots : 0]$ genau einen Weg $\widetilde{w} : [0,1] \to S^n$ mit $\widetilde{w}(0) = (1, 0, \ldots, 0)$ und $p \circ \widetilde{w} = w$. Setze $\epsilon(w) = 0$ falls $\widetilde{w}(1) = (1, 0, \ldots, 0)$ und $\epsilon(w) = 1$ falls $\widetilde{w}(1) = (-1, 0, \ldots, 0)$. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $w \mapsto \epsilon(w)$ für $n \geq 2$ einen Isomorphismus $\pi_1(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}, P_0) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ induziert.

Aufgabe 3. (a) Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung und X zusammenhängend. Zeigen Sie, dass alle Fasern $p^{-1}(x)$, $x \in X$ die gleiche Mächtigkeit haben (die unter Umständen auch unendlich ist).

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: für jede Überlagerung $p : Y \to X$ von wegzusammenhängenden Räumen und jede stetige Abbildung $f : Y \to Y$ mit $p \circ f = p$ ist f ein Homöomorphismus.

Aufgabe 4. Für Gruppen G und H wird das kartesische Produkt $G \times H$ durch $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) :\ = (g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot h_2)$ zu einer Gruppe.

Seien X, Y topologische Räume und $x_0 \in X, y_0 \in Y$. Zeigen Sie, dass $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ isomorph zu $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ ist.