M. Spieß

9. Übung zur Vorlesung Topologie 1

Wintersemester 2009/10 Abgabe: Do, 7.1.10

Aufgabe 1. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

(i) X ist einfach zusammenhängend.

(ii) Je zwei Wege w_1, w_2 in X mit $w_1(0) = w_2(0)$ und $w_1(1) = w_2(1)$ sind homotop (relativ $\{0, 1\}$).

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum und $f : S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \to X$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

(i) f ist homotop zu einer konstanten Abbildung $S^1 \to X$.

(ii) f lässt sich zu einer stetigen Abbildung $\mathbb{D}^2 \to X$ auf die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}^2 \colon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ fortsetzen.

(Hinweis: Zeigen Sie, dass die Abbildung $S^1 \times [0, 1] \to \mathbb{D}^2, (z, t) \mapsto tz$ einen Homöomorphismus $S^1 \times [0, 1]/S^1 \times \{1\} \to \mathbb{D}^2$ induziert; zur Definition von $S^1 \times [0, 1]/S^1 \times \{0\}$ vergl. Übung 3, Aufgabe 3).

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

(a) $f : S^2 \to S^2, (x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$ ist homotop zur Identität $\mathrm{id} : S^2 \to S^2$.

(b) $g : S^2 \to S^2, (x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ ist homotop zu $-\mathrm{id} : S^2 \to S^2$.

Aufgabe 4. Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 3$ nicht homöomorph sind.

(a) Sei X ein topologischer Raum und seien U, V einfach zusammenhängende offene Teilmengen von X, so dass $U \cup V = X$ und $U \cap V$ wegzusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass X einfach zusammenhängend ist.

(b) Sei $n \geq 3$ und $P \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n - \{P\}$ einfach zusammenhängend ist.

(c) Sei $Q \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2 - \{Q\}$ nicht einfach zusammenhängend ist. (Hinweis: Zeigen Sie, dass der Kreisring mit Radius 1 um Q ein Retrakt von $\mathbb{R}^2 - \{Q\}$ ist).

(d) Zeigen Sie: $\mathbb{R}^2 \not\approx \mathbb{R}^n$ für $n \geq 3$.