LA2 - ÜBUNGSBLATT 1 - LÖSUNG

MIMA STANOJKOVSKI

Sei $\beta : V \times W \to K$ eine K-Bilinearform und $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$ die Strukturmatrix von β bzgl. $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ einer Basis von V, und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ einer Basis von W. Seien β_1 und β_2 die natürliche Abbildungen $V \to W^*$ und $W \to V^*$, die durch β induziert sind und seien $\mathcal{B}^*$ und $\mathcal{C}^*$ die dualen Basen von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

Aufgabe 1. Es gilt

(1) $B^{\mathrm{t}} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}^*}(\beta_1)$;
(2) $B = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}^*}(\beta_2)$.

Beweis: Wir zeigen nur, dass (1) gilt. Sei $C = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}^*}(\beta_1)$, so beweisen wir, dass $C = B^{\mathrm{t}}$. Für jedes $1 \leq i \leq n$ gilt

$$\beta_1(v_i) = \sum_{j=1}^{m} c_{ji} w_j^*$$

und wenn w ein Element von W ist, gilt auch

$$\begin{aligned} \beta_1(v_i)(w) &= \beta(v_i, w) \\ &= \beta(v_i, \sum_{j=1}^{m} w_j^*(w) w_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \beta(v_i, w_j) w_j^*(w) \\ &= \sum_{j=1}^{m} b_{ij} w_j^*(w). \end{aligned}$$

Es folgt, dass $\sum_{j=1}^{m} c_{ji} w_j^* = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} w_j^*$ und wegen der lineare Abhängichkeit der w_j^*'s, dass für jedes Paar (i,j), $c_{ji} = b_{ij}$ gilt. Wir haben bewiesen, dass $C = B^{\mathrm{t}}$. $\square$

Aufgabe 2. Wir nehmen nun an, dass $\dim V = \dim W$ gilt.
Behauptung: Die folgende Eigenschaften sind äquivalent:

(1) β ist nicht ausgeartet in der ersten Variablen,
(2) β ist nicht ausgeartet in der zweiten Variablen und
(3) B ist invertierbar.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (3) Wir wissen, dass β nicht ausgeartet in der ersten Variablen ist, so ist β_1 injektiv. Weil gilt $\dim V = \dim W$, ist dann β_1 ein Isomorphismus $V \to W^*$. So folgt aus Aufgabe 1.1, dass B^{t} invertierbar ist und darum ist B auch invertierbar. (3) $\Rightarrow$ (2) Das folgt einfach aus Aufgabe 1.2. (2) $\Rightarrow$ (1) Weil β nicht ausgeartet in der zweiten Variablen ist, ist β_2 injektiv und, weil $\dim V = \dim W$ ist, ist β_2 ein Isomorphismus $W \to V^*$. Es folgt dann aus Aufgabe 1.2, dass B invertierbar ist und darum ist B^{t} auch invertierbar. Aus Aufgabe 1.1 folgt, dass β_1 ein Isomorphismus ist und somit insbesondere injektiv. □

Aufgabe 3. Seien $V = W = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ die Standardbasis und $\mathcal{C} = (e_1 + e_2, e_2)$. Sei $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

(1) $\beta(x, y) = -2x_1y_2 - y_1^2 + 5x_2y_1$,
(2) $\beta(x, y) = -x_2y_1 + 3x_1y_2$,
(3) $\beta(x, y) = 7x_1 - x_2$,
(4) $\beta(x, y) = x_1x_2 + 4y_1y_2$ oder
(5) $\beta(x, y) = 3x_1y_1 + x_2x_1 + 1$

definiert. Wir überprüfen welche β's $\mathbb{R}$-Bilinearformen sind und geben gegebenfalls die Strukturmatrizen B bzgl. $\mathcal{B}$ und C bzgl. $\mathcal{C}$ an.

Lösung:

(1) Nein, weil $\beta((0, 0), (1, 0)) = -1 \neq 0$ gilt.
(2) Ja. Für jedes $a, t, z \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt in der Tat
   1.
$$\begin{aligned}\beta(\lambda t + \mu z, a) &= -(\lambda t_2 + \mu z_2)a_1 + 3(\lambda t_1 + \mu z_1)a_2 \\ &= \lambda(-t_2a_1 + 3t_1a_2) + \mu(-z_2a_1 + 3z_1a_2) \\ &= \lambda\beta(t, a) + \mu\beta(z, a)\end{aligned}$$
   und
   2.
$$\begin{aligned}\beta(a, \lambda t + \mu z) &= -a_2(\lambda t_1 + \mu z_1) + 3a_1(\lambda t_2 + \mu z_2) \\ &= \lambda(-a_2t_1 + 3a_1t_2) + \mu(-a_2z_1 + 3a_1z_2) \\ &= \lambda\beta(a, t) + \mu\beta(a, z).\end{aligned}$$
   Die Strukturmatrizen sind
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ und } C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
(3) Nein, weil $\beta((0, 1), (0, 0)) = -1 \neq 0$ gilt.
(4) Nein, weil $\beta((1, 1), (0, 0)) = 1 \neq 0$ gilt.
(5) Nein, weil $\beta((0, 0), (0, 0)) = 1 \neq 0$ gilt.

Aufgabe 4. Für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ seien die Abbildungen

$$\beta^{(n)} : \mathrm{Mat}_n(K) \times \mathrm{Mat}_n(K) \to K$$

durch $(A, B) \mapsto \mathrm{Sp}(AB)$ definiert. Für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ist die Abbildung $\beta^{(n)}$ eine symmetrische K-Bilinearform:

symmetrisch: Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ Elemente von $\mathrm{Mat}_n(K)$ und seien $AB = C = (c_{ij})$ und $BA = D = (d_{ij})$. So gilt

$$\begin{aligned}\beta^{(n)}(A, B) = \mathrm{Sp}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} &= \sum_{i=1}^{n} \big(\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{li} \big) \\ &= \sum_{l=1}^{n} \big(\sum_{i=1}^{n} b_{li} a_{il} \big) \\ &= \sum_{l=1}^{n} d_{ll} = \mathrm{Sp}(D) = \beta^{(n)}(B, A)\end{aligned}$$

und somit ist $\beta^{(n)}$ symmetrisch.

K-Bilinearform: Seien $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ und $C = (c_{ij})$ Elemente von $\mathrm{Mat}_n(K)$ und $\lambda \in K$. So

$$\begin{aligned}\beta^{(n)}(A + \lambda C, B) = \mathrm{Sp}((A + \lambda C)B) &= \sum_{i=1}^{n} \big(\sum_{l=1}^{n} (a_{il} {+}_{il}) b_{li} \big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{li} + \lambda \sum_{l=1}^{n} c_{il} b_{li} \big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} + \lambda \sum_{i=1}^{n} (CB)_{ii} \\ &= \mathrm{Sp}(AB) + \lambda\, \mathrm{Sp}(CB) = \beta^{(n)}(A, B) + \lambda \beta^{(n)}(C, B)\end{aligned}$$

und da $\beta^{(n)}$ symmetrisch ist, ist $\beta^{(n)}$ auch K-bilinear.

Die Strukturmatrix von $\beta^{(2)}$ bzgl. der Basen

$$\mathcal{B}_1 = \Big(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Big) \text{ und}$$

$$\mathcal{B}_2 = \Big(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Big)$$

ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$