LA2 - ÜBUNGSBLATT 3 - LÖSUNG

MIMA STANOJKOVSKI

Aufgabe 1. Sei $V = \mathbb{R}^n$ ein quadratischer Raum mit dem Standardskalarsprodukt q. In den folgenden Fällen

(1) $n = 3$ und $v = (1, 2, 3)/\sqrt{14}$,
(2) $n = 4$, $v_1 = (1, 1, -1, -1)/2$ und $v_2 = (1, 1, 1, 1)/2$

ergänzen wir die gegeben Vektoren zu einer Orthonormalbasis des gegeben Vektorraums.
Lösung: (1) Seien $b_1 = (1, 2, 3)$, $b_2 = (0, 0, -3)$ und $b_3 = (0, 1, 0)$, sodass $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von V ist. Wir benutzen das Gram-Schmitsche Orthonormalisierungsverfahren auf $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{C} = \{c_1 = v, c_2, c_3\}$ von V zu berechnen. Wir definieren $b_1' = b_1$ und

$$b_2' = -\frac{q(b_1, b_2)}{q(b_1)} b_1 + b_2 = \frac{9}{14} b_1 + b_2 = \Big(\frac{9}{14}, \frac{9}{7}, -\frac{15}{14}\Big).$$

Wir skalieren b_2' wie $b_2'' = 14b_2/3 = (3, 6, -5)$ und definieren

$$b_3' = -\frac{q(b_3, b_1)}{q(b_1)} b_1 - \frac{q(b_3, b_2'')}{q(b_2'')} b_2' + b_3 = \Big(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0\Big) = (2, -1, 0)/(-5).$$

Wir definieren, für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$, das Element $c_i = b_i'/\sqrt{q(b_i')}$. Die Menge

$$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\} = \{v, (3, 6, -5)/\sqrt{70}, (2, -1, 0)/\sqrt{5}\}$$

ist eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.
(2) Seien $b_1 = (1, 1, -1, -1)$, $b_2 = (1, 1, 1, 1)$, $b_3 = (1, -1, 0, 0)$ und $b_4 = (0, 0, 1, -1)$, sodass $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ eine Basis von V ist. Wir berechnen

- $q(b_1) = 2$, $q(b_2) = 2$, $q(b_3) = 2$ und $q(b_4) = 2$,
- $q(b_1, b_2) = 0$
- $q(b_1, b_3) = 0$
- $q(b_1, b_4) = 0$
- $q(b_2, b_3) = 0$
- $q(b_2, b_4) = 0$
- $q(b_3, b_4) = 0$

und so ist die Matrix von q bzgl. $\mathcal{B}$ gleich

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zum schluss, definieren wir, $c_1 = v_1$, $c_2 = v_2$, $c_3 = b_3$ und $c_4 = b_4$: die Basis $\mathcal{C} = \{c_i/\sqrt{2}\}_{i=1}^4$ von $\mathbb{R}^4$ ist orthonormal.

Aufgabe 2. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome von Grad höchstens 2. Die Abbildung $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ die durch

$$(f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

definiert ist, ist eine symmetrische nicht ausgeartete Bilinearform auf V.

(1) Wir zeigen, dass ϕ positiv definit ist.
Beweis: Sei $f \in V$ beliebig aber fest. So gilt

$$\phi(f, f) = \int_{-1}^{1} f(x)^2 dx \geq |1 - (-1)| \min_{x\in[-1,1]} f(x)^2 = 2 \min_{x\in[-1,1]} f(x)^2 \geq 0.$$

Jetzt zeigen wir, dass wenn $\phi(f, f) = 0$ gilt $f = 0$. Wir nehmen $\phi(f, f) = 0$ an. Es folgt dann, dass $0 = \int_{-1}^{1} f(x)^2 dx = 0$ und da, für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)^2 \geq 0$, gilt $f_{|[-1,1]} = 0$. Seit f ein Polynom ist, ist $f = 0$ oder hat f endliche viele Lösungen. Da $[-1, 1]$ unzählbar ist, ist $f = 0$ und inbisonderes ist ϕ positiv definit. $\square$
(2) Sei $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ eine Basis von V. Wir benutzen das Gram-Schmitsche Orthonormalisierungsverfahren auf $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ von V zu berechnen. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und

- $b_1 = 1$,
- $b_2 = x$ und
- $b_3 = -\frac{\phi(1,x^2)}{\phi(1,1)} - \frac{\phi(x,x^2)}{\phi(x,x)} x + x^2 = -\frac{1}{3} + x^2$.

Wenn wir jetzt

- $c_1 = 1$,
- $c_2 = b_2\sqrt{3}/\sqrt{2}$ und
- $c_3 = b_3\sqrt{45}/\sqrt{8}$

definieren, ist $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ eine Orthonormalbasis von V.

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ orthogonal, d.h. $AA^{\mathrm{t}} = 1$. So gilt es:

(1) Die Summe zweier orthogonaler Matrizen ist nicht im Algemeinen orthogonal. Das zu zeigen nehmen wir $n = 2$ und

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die orthogonale Matrizen sind, aber $B + C$ ist keine orthogale Matrix.

(2) Das produkt zweier orthogonaler Matrizen ist orthogonal. In der Tat, wenn $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ auch orthogonal ist, gilt

$$(AB)^{\mathrm{t}}(AB) = B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}AB = 1.$$

(3) Die Transponierte einer orthogonalen Matrix ist orthogonal. In der Tat, gilt

$$(A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}} = AA^{\mathrm{t}} = 1.$$

(4) Die Inverse einer orthogonalen Matrix ist orthogonal. In der Tat, gilt

$$(A^{-1})^{\mathrm{t}}A^{-1} = (A^{\mathrm{t}})^{-1}A^{-1} = (AA^{\mathrm{t}})^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

(5) Die Determinante von A gehört zu $\{-1, 1\}$. In der Tat, gilt es

$$1 = \det(AA^{\mathrm{t}}) = \det(A)\det(A^{\mathrm{t}}) = \det(A)^2$$

und so folgt es, dass $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

(6) Eine Matrix mit Determinant -1 oder 1 ist im Algemein nicht orthogonal. Zum Beispiel, die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat Determinante gleich 1, aber

$$BB^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 1.$$

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ schiefsymmetrisch, d.h. $A = -A^{\mathrm{t}}$, derart, dass $\det(1 + A) \neq 0$. Wir zeigen, dass die Matrix $(1 - A)(1 + A)^{-1}$ orthogonal ist.

Beweis: Es ist nicht schwierig zu beweisen, dass $1 + A^{\mathrm{t}} = (1 + A)^{\mathrm{t}}$. Da $A = -A^{\mathrm{t}}$ gilt $1 - A^2 = (1 + A^{\mathrm{t}})(1 + A)$ und folgt es darum

$$\begin{aligned}
((1-A)(1+A)^{-1})^{\mathrm{t}}((1-A)(1+A)^{-1}) &= ((1+A)^{-1})^{\mathrm{t}}(1-A)^{\mathrm{t}}(1-A)(1+A)^{-1} \\
&= ((1+A)^{-1})^{\mathrm{t}}(1+A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}(1-A)(1+A)^{-1} \\
&= ((1+A)^{-1})^{\mathrm{t}}((1+A)^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}(1-A)(1+A)^{-1} \\
&= ((1+A)^{-1})^{\mathrm{t}}(1+A)(1-A)(1+A)^{-1} \\
&= ((1+A)^{-1})^{\mathrm{t}}(1-A^2)(1+A)^{-1} \\
&= ((1+A)^{-1})^{\mathrm{t}}(1+A^{\mathrm{t}})(1+A)(1+A)^{-1} \\
&= ((1+A)^{\mathrm{t}})^{-1}(1+A^{\mathrm{t}})(1+A)(1+A)^{-1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□