LA2 - ÜBUNGSBLATT 4 - LÖSUNG

MIMA STANOJKOVSKI

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das characteristische Polynom χ_A ist $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$ und so hat A zwei Eigenwerte, nämlich 1 und 2. Die algebraische Vielfachheiten sind $m_{f_A}(1) = 1$ und $m_{f_A}(2) = 2$. Es ist jetzt nicht schwierig zu beweisen, dass $(0,-1,1)$ ein Eigenvektor zu 1 ist und dass $(0,1,0)$ und $(1,0,-1)$ lineare unabhängliche Eigenvectoren zu 2 sind. Da $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ folgt es, dass $\dim V_1(f_A) = 1$ und $\dim V_2(f_A) = 2$.

Aufgabe 2. Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und f ein nilpotenter Endomorphismus von V. Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ derart, dass $f^n = 0$. Wenn $V = 0$, hat f keine Eigenvektoren; wir nehmen darum an, dass $V \neq 0$. Wir zeigen, dass

$$\{\text{Eigenwerten von V}\} = \{0\}.$$

Beweis: "$\subseteq$" Sei λ ein Eigenwert von f und sei $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zu λ. So gilt $0 = f^n(v) = \lambda^n v$ und so ist $\lambda = 0$.
"$\supseteq$" Da $f^n = 0$ ist, ist f nicht injektiv (anders, wäre f ein Isomorphismus und so f^n auch). Es folgt, dass $\{0\} \neq \ker f = V_0(f)$ und so ist 0 ein Eigenwert von f. $\square$

Aufgabe 3. (1) Sei $\tau \in \mathrm{S}_n$ der n-Zykel $\tau = (1\ 2\ \ldots\ n)$ und sei $P_\tau \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die zugehörige Permutationsmatrix. Dann ist

$$P_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und aus Beispiel 2.8 wissen wir, dass $\chi_{P_\tau}(X) = X^n - 1$.
(2) Sei $\sigma \in \mathrm{S}_n$ beliebig und sei $P_\sigma \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die zugehörige Permutationsmatrix. Seien $\tau_1, \ldots, \tau_r$ disjunkte Zykeln derart, dass $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_r$ und, für jedes

$i \in \{1, \dots, r\}$, sei n_i die Länge von τ_i. Dann, bis zur Permutation der Basisvektoren, ist

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} P_{\tau_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{\tau_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & P_{\tau_3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & P_{\tau_r} \end{pmatrix}$$

und so ist $\chi_{P_\sigma} = \prod_{i=1}^r \chi_{\tau_i}$. Aus (1) folgt es, dass

$$\chi_\sigma(X) = (X^{n_1} - 1)(X^{n_2} - 1) \dots (X^{n_r} - 1).$$

Aufgabe 4. Seien $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $B \in_n (K)$. Dann gilt $\chi_A = \chi_{BAB^{-1}}$.
Beweis: Es gilt

$$\chi_{BAB^{-1}}(X) = \det(X \,\mathrm{Id}_n - BAB^{-1}) = \det(B(X \,\mathrm{Id}_n)B^{-1} - BAB^{-1}) =$$
$$\det(B(X \,\mathrm{Id}_n - A)B^{-1}) = \det(B) \det(X \,\mathrm{Id}_n - A) \det(B)^{-1} = \chi_A(X).$$

$\square$