LA2 - ÜBUNGSBLATT 5 - LÖSUNG

MIMA STANOJKOVSKI

Aufgabe 1. Seien V ein K-Vektorraum und $U_1, \ldots, U_r$ K-lineare Unterräume von V. Wir zeigen, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(1) $V = \oplus_{i=1}^r U_i$ und

(2) $V = \sum_{i=1}^r U_i$ und, für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$, gilt $U_i \cap (\sum_{j \neq i} U_j) = \{0\}$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) Da $V = \oplus_{i=1}^r U_i$ ist, gilt $V = \sum_{i=1}^r U_i$. Sei jetzt $i \in \{1, \ldots, r\}$ beliebig aber fest und sei $u_i \in U_i \cap (\sum_{j \neq i} U_j)$. So für jedes $j \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{i\}$ gibt es $u_j \in U_j$, sodass $u_i = \sum_{j \neq i} u_j$. Es folgt, dass

$$0 + 0 + \ldots + 0 = 0 = \sum_{j \neq i} u_j + (-u_i)$$

und da $V = \oplus_{i=1}^r U_i$ ist, gilt $u_i = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sei $v \in V$. Da $V = \sum_{i=1}^r U_i$ gilt, gibt es Elemente $u_1 \in U_1, \ldots, u_r \in U_r$ derart, dass $v = \sum_{i=1}^r u_i$. Sei $(u_1', \ldots, u_r') \in \prod_{i=1}^r U_i$ ein (andere) Element sodass $v = \sum_{i=1}^r u_i'$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$ ist dann

$$u_i - u_i' = \sum_{j \neq i} (u_j' - u_j)$$

ein Element von $U_i \cap (\sum_{j \neq i} U_j)$ und so ist $u_i = u_i'$. □

Wir zeigen weiter, dass wenn $\dim V < \infty$ ist, sind (1) und (2) äquivalent zu

$$(3) \quad \dim V = \dim \Big(\sum_{i=1}^r U_i \Big) = \sum_{i=1}^r \dim U_i.$$

Beweis: Wir zeigen, dass (2) äquivalent zu (3) ist.

(2) $\Rightarrow$ (3) Durch Induktion nach r. Wenn $r = 1$ ist, ist nichts zu zeigen. Wir nehmen an, dass $r > 1$ ist. Sei $W = \sum_{i=2}^r U_i$. So gilt $U_1 \cap W = \{0\}$ und daraus folgt, dass $\dim V = \dim U_1 + \dim W = \dim U_1 + \sum_{i=2}^r \dim U_i = \sum_{i=1}^r \dim U_i$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Für jedes $k \in \{1, \ldots, r\}$ sei $W_k = \sum_{k \neq j} U_j$. Dann gilt

$$\dim V = \dim \Big(\sum_{i=1}^r U_i \Big) = \sum_{i=1}^r \dim U_i$$

und auch für jedes $k \in \{1, \ldots, r\}$ gilt

$$\dim V = \dim \big(U_k + W_k \big) = \dim U_k + \dim W_k - \dim(U_k \cap W_k).$$

Es folgt, dass $\dim(U_k \cap W_k) + \sum_{i=2}^r \dim U_i = \dim W_k \leq \sum_{i=2}^r \dim U_i$ und so ist $\dim(U_k \cap W_k) = 0$. Für jedes k, ist dann $U_k \cap W_k = \{0\}$. □

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit charakterische Polynom χ_A und sei die Abbildung $\phi_A : \mathrm{Mat}_n(K) \to \mathrm{Mat}_n(K)$ durch $M \mapsto MA$ definiert. Wir zeigen, dass $\chi_{\phi_A} = \chi_A^n$.
Beweis: Für jedes Paar $(r,s) \in \{1,\dots,n\}^2$, sei $E_{r,s} = (e_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathrm{Mat}_n(K)$ durch

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad i = r, s = j \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

definiert. Sei $\mathcal{E}$ die Basis von $\mathrm{Mat}_n(K)$ die durch

$$\mathcal{E} = \{E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1}, E_{12}, E_{22}, \dots, E_{n1}, E_{2n}, \dots, E_{nn}\}$$

definiert is, sodass die Matrix von ϕ_A bzgl. $\mathcal{E}$ gleich

$$\mathrm{Diag}(A) = \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & A \end{pmatrix}$$

ist. Es folgt, dass $\chi_{\phi_A} = \chi_A^n$ gilt. □

Aufgabe 3. Sei $x \in \mathbb{R}$ und sei $A(x) \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$ durch

$$A(x) = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 & -1 \\ 0 & 3 & x & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

definiert. Das charakterisctische Polynom von $A(x)$ ist

$$\chi_{A(x)}(X) = (X-5)^2(X-1)(X-3)$$

und so ist 5 ein Eigenwert von $A(x)$ mit algebraische Vielfachheit gleich 2. Ein Vektor $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ ist ein Eigenvektor zu 5 genau wenn

$$\begin{cases} 5y_1 - 2y_2 + 8y_3 + y_4 = 5y_1 \\ 3y_2 + xy_3 = 5y_2 \\ 5y_3 - y_4 = 5y_3 \\ y_4 = 5y_4 \end{cases}$$

und so ist, zum Beispiel, $(1,0,0,0)$ in $V_5(A(x))$. Da $\dim V_5(A(x)) \leq m_{A(x)}(5) = 2$, ist $\dim V_5(A(x)) = 2$ genau wenn

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -x & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

ist. Es folgt, dass

$$\dim V_5(A(x)) = \begin{cases} 2 & \text{wenn} \quad x = 8 \\ 1 & \text{andernfalls} \end{cases} \quad .$$

Aufgabe 4. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

(1) Das characteristische Polynom von A ist $\chi(A)(X) = X^2 - X - 1$ und so sind die Eigenwerte von A gleich $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(2) Eine Eigenbasis von A ist $\mathcal{B} = ((-2, 1-\sqrt{5}), (-2, 1+\sqrt{5}))$ und, wenn $T = T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ ist, kriegen wir

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} = D.$$

(3) Wir zeigen, dass wenn $(u_n)_{n\geq 1}$, definiert durch

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-2} + u_{n-1} \quad \text{wenn} \quad n > 2 \end{cases}$$

ist, so gilt für jedes $n \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix}.$$

Beweis: Per Induktion nach n. Wenn $n = 1$ ist, ist die Behauptung offensichtlich. Wir nehmen jetzt an, dass $n > 1$ und dass

$$A^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$A^{n+1} = AA^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} u_n + u_{n+1} & u_{n-1} + u_n \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix}.$$

□

(4) Für jedes $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ zeigen wir, dass $u_n\sqrt{5} = \phi^n - \psi^n$.

Beweis: Für $n = 1$ ist $u_1\sqrt{5} = \sqrt{5} = \phi - \psi$. Sei jetzt $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ beliebig. Wir wissen aus (2), dass $D = T^{-1}AT$ und so gilt $A^{n+1} = TD^{n+1}T^{-1}$. Aus (3) folgt, dass

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 2 \\ -1+\sqrt{5} & -2 \end{pmatrix} \frac{-1}{4\sqrt{5}} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2\psi & 2\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\phi & 2 \\ -2\psi & -2 \end{pmatrix} \frac{-1}{4\sqrt{5}} \\ &= \begin{pmatrix} \phi^{n+2} - \psi^{n+2} & \phi^{n+1} - \psi^{n+1} \\ \psi^{n+2}\phi - \phi^{n+2}\psi & \psi^{n+1}\phi - \phi^{n+1}\psi \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

und so ist im Besonderen $u_{n+1}\sqrt{5} = \phi^{n+1} - \psi^{n+1}$. □