LA2 - ÜBUNGSBLATT 6 - LÖSUNG

MIMA STANOJKOVSKI

Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

Aufgabe 1. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ derart, dass jedes $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von f ist. Wir zeigen, dass ein $\lambda \in K$ existiert sodass $f = \lambda\,\mathrm{id}$.
Beweis: Wenn $V = \{0\}$ ist, können wir zB $\lambda = 0$ nehmen. Wir nehmen jetzt an, dass $V \neq \{0\}$ ist: für jedes $v \in V \setminus \{0\}$ sei λ_v das Eigenwert assoziiert mit v. Seien $v, w \in V \setminus \{0\}$ beliebig aber fest. Wenn $Kv = Kw$ ist, ist $\lambda_v = \lambda_w$ und wenn v und w linear unabhängig sind, gilt

$$\lambda_{v+w}(v+w) = f(v+w) = f(v) + f(w) = \lambda_v v + \lambda_w w$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_{v+w} - \lambda_v)v + (\lambda_{v+w} - \lambda_w)w = 0.$$

und so folgt $\lambda_v = \lambda_{v+w} = \lambda_w$. Wir definieren jetzt $\lambda = \lambda_v$ und so ist $f = \lambda\,\mathrm{id}$. $\square$

Aufgabe 2. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ und sei $\dim V = n < \infty$. Wir zeigen, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) f ist nilpotent
(2) $\chi_f(X) = X^n$
(3) es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, bezüglich derer, wenn $i \geq j$, gilt $(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f))_{ij} = 0$
(4) $f^n = 0$.

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (4) Es folgt aus Cayley-Hamilton.
(4) $\Rightarrow$ (1) Offensichtlich.
(1) $\Rightarrow$ (3) Durch Induktion nach n. Wenn $n = 0$ ist nichts zu zeigen, so wir nehmen jetzt an, dass $n > 0$. Da f nilpotent ist, ist $K = \ker f \neq 0$. Sei $b \in K \setminus \{0\}$ beliebig aber fest und sei $B = \langle b \rangle$. Dann hat V/B Dimension $n-1$ und f induziert eine lineare Abbildung $f_B : V/B \to V/B$ die nilpotent ist. Beim Induktionsschritt, gibt es eine Basis $\mathcal{B}_B = (b_1 + B, \ldots, b_{n-1} + B)$ von V/B derhart, dass

$$M_{\mathcal{B}_B}^{\mathcal{B}_B}(f_B) = \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & 0 & \cdots & \star \\ \vdots & & \ddots & \star \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren jetzt $\mathcal{B} = (b, b_1, \dots, b_{n-1})$ und so ist

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \star \\ 0 & 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) $\Rightarrow$ (2) Sei $\mathcal{B}$ wie in (3). Dann ist $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ eine strikte obere Dreiecksmatrix und so folgt aus Augabe 4 von UB4, dass

$$\chi_f(X) = \chi_A(X) = \det(X \operatorname{Id}_n - A) = \det(X \operatorname{Id}_n) = X^n.$$

□

Aufgabe 3. Sei $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ eine nilpotente Matrix. Wir zeigen, dass

(1) $\operatorname{Sp}(A) = 0$
(2) $\det(\operatorname{Id}_n \pm A) = 1$
(3) Ist $B \in \operatorname{Mat}_n(K)$ derhart, dass $AB = BA$, so gilt $\det(A + B) = \det(B)$.

Beweis: (1) Aus Aufgabe 2.3 wissen wir, dass $T \in \operatorname{GL}_n(K)$ existiert derhart, dass TAT^{-1} eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Aus UB1 Aufgabe 4 folgt, dass

$$0 = \operatorname{Sp}(TAT^{-1}) = \operatorname{Sp}(AT^{-1}T) = \operatorname{Sp}(A).$$

(2) Da A nilpotent ist, ist auch $-A$ nilpotent und so folgt aus Aufgabe 2.2, dass $\chi_A(X) = X^n = \chi_{-A}(X)$. Insbesondere gilt

$$\det(\operatorname{Id}_n - A) = \chi_A(1) = 1 = \chi_{-A}(1) = \det(\operatorname{Id}_n + A).$$

(3) Fall 1: B ist invertierbar. Da A nilpotent ist, ist AB^{-1} auch nilpotent und so folgt aus (2), dass

$$\det(A + B) = \det(B)(\operatorname{Id}_n + AB^{-1}) = \det(B).$$

Fall 2: $\det(B) = 0$. Sei $b \in \ker(f_B) \setminus \{0\}$. Aus Aufgabe 2.4 gilt $A^n = 0$ und so folgt, dass

$$(A + B)^n b^t = 0b^t + nA^{n-1}Bb^t + \ldots + nAB^{n-1}b^t + B^n b^t = 0.$$

Das Element b ist ein Element von $\ker(f_{A+B}) \setminus \{0\}$ und so ist $A+B$ nicht invertierbar, d.h. $\det(A + B) = 0 = \det(B)$. □

Aufgabe 4. Sei $A \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{R})$ definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

(1) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(X) = X^3 + 3X^2 - 10X + 6 = (X-1)(X+2+\sqrt{10})(X+2-\sqrt{10})$$

und da χ_A und μ_A die gleiche Nullstellen haben, ist $\chi_A(X) = \mu_A(X)$.
(2) Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2-\sqrt{10}$ und $\lambda_3 = -2+\sqrt{10}$ und für jedes $i \in \{1,2,3\}$ gilt $m_A(\lambda_i) = \dim V_{\lambda_i}(f_A) = 1$.
(3) Da alle Nullstellen von A unterschiedlich sind, ist A diagonalisierbar. Eine Eigenbasis von A ist $\mathcal{B} = ((1,1,1),((5-\sqrt{10})/5, -\sqrt{10}/5, 1),((5+\sqrt{10})/5, \sqrt{10}/5, 1))$ und, wenn $S = T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ ist, kriegen wir

$$S = \begin{pmatrix} 1 & (5-\sqrt{10})/5 & (5+\sqrt{10})/5 \\ 1 & -\sqrt{10}/5 & \sqrt{10}/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & -2+\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

(4) Weil A diagonalisierbar ist, ist A insbesondere triagonalisierbar. Wenn $T = S$ aus (3), ist $T^{-1}AT$ eine obere Dreiecksmatrix.