LA2 - ÜBUNGSBLATT 7 - LÖSUNG

MIMA STANOJKOVSKI

Aufgabe 1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

Seien $b_1 = (-1, 0, 2)/\sqrt{5}$, $b_2 = (2, 0, 1)/\sqrt{5}$ und $b_3 = (0, 1, 0)$ und sei $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$, die eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist die aus Eigenvektoren von A besteht. So gilt

$$D = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und darum, wenn

$$S = T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

ist, gilt $D = S^{-1}AS$. Da $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis ist, ist S eine Orthogonalmatrix und so folgt $SS^{\mathrm{t}} = \mathrm{Id}_3$ und $D = S^{\mathrm{t}}AS$. Es folgt, dass die Matrix von q_A bzgl. $\mathcal{B}$ gleich D ist und so ist die Signatur von q_A gleich 2.

Aufgabe 2. Seien K ein Körper mit $\operatorname{char} K \neq 2$ und $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Sei

$$f : \mathrm{Mat}_n(K) \to \mathrm{Mat}_n(K)$$

die K-lineare Abbildung $A \mapsto A^{\mathrm{t}}$ und seien $\mathrm{Sym}_n(K)$ und $\mathrm{Schief}_n(K)$ die Unterräume von $\mathrm{Mat}_n(K)$ die aus symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen bestehen.

Behauptung: Die Eigenwerte von f sind 1 und -1.

Beweis: Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K) \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von f mit Eigenwert $\lambda \in K$. So gilt

$$A = (A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = f^2(A) = \lambda^2 A$$

und so ist $\lambda^2 = 1$. Insbesondere ist $\lambda \in \{\pm 1\}$ und so gilt $A^{\mathrm{t}} = A$ oder $A^{\mathrm{t}} = -A$. Da $\mathrm{Sym}_n(K)$ und $\mathrm{Schief}_n(K)$ ungleich $\{0\}$ sind, sind 1 und -1 Eigenwerte von f. $\square$

Aus der Behaptung, existieren $r, s \in \mathbb{Z}_{>0}$ derhart, dass $\chi_f(X) = (X-1)^r(X+1)^s$. Da μ_f und χ_f die gleiche Nullstellen haben und $f^2 = \mathrm{id}$ ist, ist

$$\mu_f(X) = (X-1)(X+1).$$

Nun wissen wir, dass $r + s = n^2$ und dass

$$r \geq \dim(\mathrm{Mat}_n(K))_1(f) = \dim \mathrm{Sym}_n(K) = (n^2+n)/2$$

und

$$s \geq \dim(\mathrm{Mat}_n(K))_{-1}(f) = \dim \mathrm{Schief}_n(K) = (n^2-n)/2.$$

Da $\dim \mathrm{Sym}_n(K) + \dim \mathrm{Schief}_n(K) = n^2$, gilt

$$\chi_A(X) = (X-1)^{\frac{n^2+n}{2}}(X+1)^{\frac{n^2-n}{2}}$$

und f ist diagonalisierbar. Insbesondere besitzt $\mathrm{Mat}_n(K)$ eine Eigenbasis bzgl. f.

Aufgabe 3. Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Wir zeigen, dass ein Polynom $f \in K[X]$ von Grad n existiert derhart, dass $f(A) = A^{-1}$.
Beweis: Sei $\mu_A(X)$ das Minimalpolynom von f, das Grad größer als 0 hat weil A invertierbar ist. Da μ_A das Charakteristische Polynom teilt, gilt $\deg \mu_A(X) \leq n$. Seien $c \in K \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $g \in K[X]$ derhart, dass $\mu_A(X) = X^r(Xg(X)+c)$. Wir definieren $f \in K[X]$ durch $f(X) = -\frac{1}{c}g(X)$ und so ist der Grad von f kleiner als n. Es folgt, dass

$$0 = \mu_A(A) = A^r(Ag(A) + c\,\mathrm{Id}_n) \Leftrightarrow -\frac{1}{c}Ag(A) = \mathrm{Id}_n \Leftrightarrow Af(A) = \mathrm{Id}_n\,.$$

□

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch und sei

$$\chi_A(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n \quad (a_0 = 1).$$

Wir zeigen, dass $\mathrm{rk}(A) = \max\{i : a_i \neq 0\}$.
Beweis: Da A symmetrisch ist, folgt es aus dem Spektralsatz, dass A diagonalisierbar ist. Insbesondere, ist $m_A(0) = \dim V_0(f_A) = \dim \ker(f_A)$. Sei jetzt $k = \max\{i : a_i \neq 0\}$. So gilt $a_k \neq 0$ und

$$\chi_A(X) = X^{n-k}(X^k + a_1X^{k-1} + \ldots + a_{k-1}X + a_k).$$

Daraus folgt, dass $m_f(0) = n - k$ und so ist $\mathrm{rk}(A) = n - m_f(0) = k$. □