LA2 - ÜBUNGSBLATT 8 - LÖSUNG

MIMA STANOJKOVSKI

Aufgabe 1. Wir zeigen, dass genau dann sind zwei symmetrische Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ zueinandern konjugiert, wenn sie über O_n konjugiert sind.
Beweis: Wir zeigen nur $\Rightarrow$, da $\Leftarrow$ offensichtlich ist. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ähnliche Matrizen. Aus der Spektralsatz folgt, dass zwei orthogonale Matrizen S, T existieren derhart, dass $S^{-1}AS = T^{-1}BT$ eine diagonale Matrix ist. Dann gilt

$$A = (ST^{-1})B(TS^{-1}) = (TS^{-1})^{-1}B(TS^{-1})$$

und weil

$$(TS^{-1})^{\mathrm{t}} = (TS^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = ST^{\mathrm{t}} = ST^{-1} = (TS^{-1})^{-1}$$

gilt, ist ST^{-1} orthogonal. Wir haben bewiesen, dass A und B über O_n konjugiert sind. $\square$

Aufgabe 2. Sei $Q \in \mathbb{R}[\underline{x}] = \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ durch

$$Q(\underline{x}) = \underline{x} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{6} & \sqrt{2} \\ -2\sqrt{6} & 0 & 2\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underline{x}^{\mathrm{t}} + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 3\sqrt{2} & -\sqrt{6} \end{pmatrix}}_{b} \underline{x}^{\mathrm{t}} - 3$$

definiert. Wir werden

(1) Q in Normalform bringen,
(2) die Hauptachsen der durch Q definierte Quadrik bestimmen,
(3) die Menge der reellen Punkte der Quadrik beschreiben.

Sei $q \in \mathbb{R}[\underline{x}]$ durch $q(\underline{x}) = \underline{x}A\underline{x}^{\mathrm{t}}$ definiert: wir bringen erst q in Normalform. Wir berechnen

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 2\sqrt{6} & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{6} & X & -2\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & -2\sqrt{3} & X-2 \end{vmatrix} = X^3 - 3X^2 - 36X + 108 = (X-3)(X+6)(X-6)$$

und eine orthonormierte Eigenbasis von $\mathbb{R}^3$ bzgl. A ist

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\sqrt{6}}((\sqrt{2}, 0, 2), (-\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1), (-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 1)).$$

Wir definieren jetzt $S = T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ und so ist S eine orthogonale Matrix derhart, dass $S^{\mathrm{t}}AS = \mathrm{Diag}(3, 6, -6) = D$. Sei $\underline{t} = \underline{x}S$ und $b' = bS = (0, 0, -6)$ so gilt

$$Q(\underline{t}) = \underline{t}D\underline{t}^{\mathrm{t}} + 2b'\underline{t}^{\mathrm{t}} - 3 = 3t_1^2 + 6t_2^2 - 6t_3^2 - 12t_3 - 3 = 3t_1^2 + 6t_2^2 - 6(t_3 - 1)^2 + 3.$$

(1) Wir definieren $\underline{y} = (t_1, t_2, t_3 - 1)$ und so ist

$$Q(\underline{y}) = 3y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2 + 3$$

eine Normalform von Q.
(2) Die Hauptachsen der Quadric die durch Q definiert ist sind $V_3(f_A) = \langle(\sqrt{2}, 0, 2)\rangle$, $V_6(f_A) = \langle(-\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1)\rangle$ und $V_{-6}(f_A) = \langle(-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 1)\rangle$.
(3) Die Menge der reellen Punkte der Quadrik ist im neuen Koordinatensystem

$$P = \{z \in \mathbb{R}^3 : 3z_1^2 + 6z_2^2 - 6z_3^2 + 3 = 0\}.$$

Die Menge P ist nicht kompakt, da sie nicht beschränkt ist. Das zu sehen, können wir zB. an den Punkte $z = (1, z_2, z_3)$ von P schauen: in diesem Fall soll $z_2^2 = z_3^2 - 1$ gelten aber $\|z_3\|$ kann beliebig groß sein.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und, für jedes $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, sei $d_n : K^n \times K^n \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ die Hamming Abstand, die durch

$$(x = (x_i)_i, y = (y_i)_i) \mapsto \#\{i : x_i \neq y_i\}$$

definiert ist. Wir zeigen, dass

(1) d_n eine Metrik ist,
(2) d_n translationsinvariant ist,
(3) d_n von keiner Norm kommt.

Beweis: Seien $x, y, z \in K^n$ und sei $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ beliebig.
(1) Wir zeigen nur, dass die Dreiecksungleichung gilt. Da

$$(x_j = z_j \quad \text{und} \quad z_j = y_j) \quad \Rightarrow \quad x_j = y_j$$

folgt es, dass $d_1(x_j, y_j) \leq d_1(x_j, z_j) + d_1(z_j, y_j)$. Insbesondere gilt

$$d_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_1(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^{n} (d_1(x_i, z_i) + d_1(z_i, y_i)) = d_n(x, z) + d_n(z, y).$$

(2) Es gilt

$$d_n(x + z, y + z) = \#\{i : x_i + z_i \neq y_i + z_i\} = \#\{i : x_i \neq y_i\} = d_n(x, y).$$

(3) Angenommen $K = \mathbb{R}$ und sei $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$. So gilt

$$d_1(\lambda x, \lambda y) = \#\{i : \lambda x_i \neq \lambda y_i\} = \#\{i : x_i \neq y_i\} = d(x, y)$$

aber für jede Norm $\|\cdot\|$ auf K gilt $\|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \|x - y\|$. □

Aufgabe 4. Seien (X, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$. Wir zeigen, dass die Abbildung $d_{x_0} : X \times X \to \mathbb{R}$ die durch

$$d_{x_0}(x, y) = \begin{cases} 0 \quad \text{falls} \quad x = y \\ d(x, x_0) + d(x_0, y) \quad \text{falls} \quad x \neq y \end{cases}$$

definiert ist, eine Metrik ist.

Beweis: Seien $x, y, z \in X$. So gilt

(1) $d_{x_0}(x,y) \geq 0$, weil d eine Metrik ist.
(2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. In der Tat, wenn $x \neq y$ ist, gilt $x \neq x_0$ oder $y \neq x_0$ und so folgt $d_{x_0}(x,y) = d(x,x_0) + d(x_0,y) > 0$.
(3) $d_{x_0}(x,y) = d_{x_0}(y,x)$, weil d symmetrisch ist.
(4) $d_{x_0}(x,y) \leq d_{x_0}(x,z) + d_{x_0}(z,y)$. Das ist offensichtlich wenn $x = y$, so wir nehmen an, dass $x \neq y$. Außerdem, da d_{x_0} symmetrisch ist, mussen wir nur an zwei Fälle schauen: (a) $x = z$ (und so ist $y \neq z$) oder (b) $x \neq z \neq y$. Es gilt

(a)

$$\begin{aligned} d_{x_0}(x,y) &= d(x,x_0) + d(x_0,y) \\ &= d(z,x_0) + d(x_0,y) \\ &= d_{x_0}(z,y) = d_{x_0}(x,z) + d_{x_0}(z,y) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} d_{x_0}(x,y) &= d(x,x_0) + d(x_0,y) \\ &\leq d(x,x_0) + d(x_0,z) + d(z,x_0) + d(x_0,y) \\ &= d_{x_0}(x,z) + d_{x_0}(z,y). \end{aligned}$$

$\square$

Da X nur eine Menge ist (ohne extra Struktur!), macht es kein Sinn a priori zu fragen ob d_{x_0} translationsinvariant ist (was bedeutet $x + y$ in X?) oder ob d_{x_0} von einer Norm kommt (außer X eine Struktur von Vektorraum gegeben wird).