LA2 - ÜBUNGSBLATT 9 - LÖSUNG

MIMA STANOJKOVSKI

Aufgabe 1. Sei $U \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Wir zeigen die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$.
(2) $U^{\mathrm{t}}\overline{U} = \mathrm{Id}_n$.
(3) $U^*U = \mathrm{Id}_n$.
(4) $UU^* = \mathrm{Id}_n$.
(5) U ist invertierbar und $U^{-1} = U^*$.
(6) Die Spalten von U bilden eine ONB von $(\mathbb{C}^n, \langle , \rangle)$.
(7) Die Zeilen von U bilden eine ONB von $(\mathbb{C}^n, \langle , \rangle)$.

Beweis: (1) $\Leftrightarrow$ (2) Angenommen $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$. So gilt für jede $x, y \in \mathbb{C}^n$, dass

$$(*) \quad \langle x, y\rangle = \langle xU^{\mathrm{t}}, yU^{\mathrm{t}}\rangle = \langle xU^{\mathrm{t}}(U^{\mathrm{t}})^*, y\rangle$$

und da $\langle , \rangle$ 'nicht ausgeartet' ist, gilt $(*)$ genau dann, wenn $\mathrm{Id}_n = U^{\mathrm{t}}(U^{\mathrm{t}})^* = U^{\mathrm{t}}\overline{U}$.
(2) $\Leftrightarrow$ (3) $U^{\mathrm{t}}\overline{U} = \mathrm{Id}_n \Leftrightarrow \overline{U^{\mathrm{t}}\overline{U}} = \mathrm{Id}_n \Leftrightarrow U^*U = \mathrm{Id}_n$.
(3) $\Leftrightarrow$ (4) $U^*U = \mathrm{Id}_n \Leftrightarrow U^* = U^{-1} \Leftrightarrow UU^* = \mathrm{Id}_n$.
(4) $\Leftrightarrow$ (5) Offensichtlich.
(4) $\Leftrightarrow$ (7) Es folgt aus der Definition des Skalarprodukts $\langle , \rangle$.
(3) $\Leftrightarrow$ (6) $\mathrm{Id}_n = U^*U \Leftrightarrow \mathrm{Id}_n = (U^*U)^{\mathrm{t}} = U^{\mathrm{t}}(U^{\mathrm{t}})^*$.
(6) $\Rightarrow$ (2) Sei $\mathcal{B}$ die ONB von $\mathbb{C}^n$ die aus der Spalten von U besteht. Dann ist $U = T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$. Da die Strukturmatrizen von $\langle , \rangle$ bzgl. $\mathcal{E}$ und $\mathcal{B}$ gleich die Einsmatrix sind, gilt $\mathrm{Id}_n = U^{\mathrm{t}}\,\mathrm{Id}_n\,\overline{U} = U^{\mathrm{t}}\overline{U}$. $\square$
Aus (2) folgt, dass $\det(U)^2 = 1$ und so ist $|\det(U)| = 1$.

Aufgabe 2. Sei V ein unitärer Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Wir zeigen:

(1) Es gibt eindeutig bestimmte selbstadjungierte Endomorfismen f_1, f_2 von V derhart, dass $f = f_1 + if_2$.
(2) Genau dann ist f normal, wenn f_1 und f_2 mit einander vertauschen.

Beweis: (1) Existenz. Wir definieren $f_1 = \frac{f+f^*}{2}$ und $f_2 = \frac{f-f^*}{2i}$. So gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$:

$$f_1(z) + if_2(z) = \frac{1}{2i}(if(z) + if^*(z) + if(z) - if^*(z)) = f(z).$$

Außerdem sind die Endomorfismen f_1 und f_2 selbstadjungiert.
Eindeutigkeit. Seien $f_1, f_1', f_2, f_2' \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert und derhart dass

$$f_1 + if_2 = f = f_1' + if_2'.$$

So gilt
$$f_1 - i f_2 = f_1^* - i f_2^* = f^* = f_1'^* + i f_2'^* = f_1' - i f_2'$$
und daraus folgt, dass
$$\begin{cases} 2f_1 = f + f^* = 2f_1' \\ 2if_2 = f - f^* = 2if_2'. \end{cases}$$
Insbesondere gilt $f_1 = f_1'$ und $f_2 = f_2'$.
(2) Seien $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, $A_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_1)$ und $A_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_2)$. So gilt
$$AA^* - A^*A = (A_1 + iA_2)(A_1 + iA_2)^* - (A_1 + iA_2)^*(A_1 + iA_2) =$$
$$(A_1 + iA_2)(A_1 - iA_2) - (A_1 - iA_2)(A_1 + iA_2) = 2i(A_2A_1 - A_1A_2)$$
und darum folgt $AA^* = A^*A \Leftrightarrow A_2A_1 = A_1A_2$. □

Aufgabe 3. Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum. Wir zeigen:

(1) Die Abbildung $\langle , \rangle : \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathbb{C}$, definiert durch $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle = \mathrm{Sp}(fg^*)$, ist ein Skalarprodukt.
(2) Sind $g, f \in \mathrm{End}(V)$ normal und gilt $fg = 0$, so gilt $gf = 0$.

Beweis: (1) Es ist nicht schwierig zu zeigen, dass $\langle , \rangle$ eine Sesquilinearform ist; wir zeigen, dass sie auch hermite'sch und positiv definit ist.
Hermite'sch. Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. So gilt
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Sp}(AB^*) = \mathrm{Sp}((BA^*)^*) = \mathrm{Sp}(\overline{BA^*}) = \overline{\mathrm{Sp}(BA^*)} = \overline{\langle B, A\rangle}.$$
Positiv definit. Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. So gilt
$$\langle A, A\rangle = \mathrm{Sp}(AA^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{a_{ij}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \geq 0$$
und daraus folgt, dass
$$\langle A, A\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall i, j : \; a_{ij} = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0.$$
(2) Angenommen f, g normal mit $fg = 0$. Aus Proposition 3.25 folgt, dass $\ker f = \ker f^*$ und $\ker g = \ker g^*$ und damit gilt
$$fg = 0 \Leftrightarrow g^*f^* = 0 \Leftrightarrow gf^* = 0 \Leftrightarrow fg^* = 0 \Leftrightarrow f^*g^* = 0 \Leftrightarrow gf = 0.$$
□

Aufgabe 4. Sei $U \leq \mathbb{C}^4$ der von $y = (-1, 0, i, 1)$ und $x = (1, 0, 1, 0)$ erzeugte Unterraum. Wir finden eine Orthonormalbasis von U bzgl. des Standardskalarsprodukt auf $\mathbb{C}^4$. Wir benutzen Gram-Schmidt ein Element in $\langle x\rangle^\perp \cap U$ zu finden. Sei jetzt
$$y_1 = -\frac{\langle y, x\rangle}{\|x\|}x + y = \frac{(1 - i, 0, 1 - i, 0)}{2} + (-1, 0, i, 1) = \frac{1}{2}(-1 - i, 0, 1 + i, 2).$$

und so ist $\langle x, y_1 \rangle = 0$. Insbesondere ist (x, y_1) eine orthogonale Basis von U und so ist

$$(\frac{x}{\sqrt{\|x\|}}, \frac{y_1}{\sqrt{\|y_1\|}}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1-i,0,1+i,2))$$

eine Orthonormalbasis von U.