Università degli Studi di Trento
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea triennale in Matematica

Elaborato finale

Controesempi sui compatti

Relatore interno:
Prof. Giuseppe Vigna Suria

Laureando:
Mima Stanojkovski

Anno accademico 2010-2011

Ringrazio chi mi ha permesso di studiare,
chi mi ha aiutato a capire
e chi mi ha sostenuto in entrambe le cose.
Ringrazio gli amici, per aver reso ogni attimo divertente.
Ringrazio in particolare la mia famiglia . . . semplicemente per tutto.

Indice

Introduzione

Il principale scopo di questa tesi è di essere una dispensa autosufficiente per chi avesse la curiosità di cogliere le sottili differenze che intercorrono tra spazi topologici compatti e spazi topologici sequenzialmente compatti. Saranno richiesti, infatti, pochissimi prerequisiti per la comprensione di ciò che tratteremo: qualche conoscenza basilare di topologia (che cos'è una topologia, una base...) e un po' di teoria intuitiva degli insiemi.

Nei primi due capitoli forniremo le fondamenta della questione ed enunceremo il teorema principale a cui abbiamo intenzione di appoggiarci nel corso di tutta la tesi. A seguire illustreremo delle suggestive situazioni di quando il teorema non può essere applicato.

Nel quarto capitolo svilupperemo, inoltre, dei concetti di teoria degli insiemi senza cui altrimenti non potremmo andare avanti, ma che risulteranno senza alcun dubbio una tappa piacevole nel nostro percorso.

Per prima cosa, però, vediamo cosa succede storicamente.

Cenni storici

Il primo a scrivere di compattezza fu, nel 1817, il matematico *Bernard Bolzano* (1781-1848), nell'enunciare il celebre *Teorema di Bolzano-Weierstrass*:

Teorema 1 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Sia* $[a, b]$ *un intervallo chiuso della retta reale, allora una funzione continua* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *assume sia massimo che minimo su* $[a, b]$*.*

La sua dimostrazione faceva leva sul fatto che in un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$, con la topologia standard, ogni successione ammette una sottosuccessione convergente, cioè che questo è uno spazio topologico sequenzialmente compatto [1], e di conseguenza costruiva una successione convergente al massimo della funzione. Il teorema fu riscoperto, 50 anni dopo, da *Karl*

[1] Come nella definizione 8.

Weierstrass (1815-1897), che ne fornì una nuova dimostrazione, confermando i risultati di Bolzano. Questo teorema, nonostante l'indubbia rilevanza storica, risultò tuttavia solo un caso particolare di un risultato più forte, che permette di sostituire un qualsiasi dominio compatto al posto dell' intervallo $[a, b]$.

Per il passo successivo dobbiamo ringraziare *Giulio Ascoli* (1870-1916) e *Cesare Arzelà* (1847-1912), che nel 1880, generalizzarono il Teorema di Bolzano-Weierstrass per spazi di funzioni continue. Successivamente *David Hilbert* (1862-1943) e *Erhard Schmidt* (1876-1959) generalizzarono il Teorema di Ascoli-Arzelà.

Nel 1895 si ebbe una svolta in direzione della compattezza, così come la studiamo oggi, grazie alla dimostrazione da parte di *Émile Borel* (1871-1956) del *Teorema di Heine-Borel*, che afferma

Teorema 2. *Sia C un sottinsieme di $\mathbb{R}^n$. Allora sono equivalenti:*

- *C è chiuso e limitato*
- *Ogni ricoprimento aperto di C ha un sottoricoprimento finito*

Nel coniare il termine "compattezza", tuttavia, *Maurice René Fréchet* (1878-1973) nel 1906 non gli diede il significato che usiamo oggi. Frechét, infatti, chiamava spazi compatti gli spazi topologici sequenzialmente compatti, che erano in realtà per lui la medesima cosa, visto il suo interesse per gli spazi metrici. Si passò alla moderna definizione solamente nel 1929, grazie al contributo di *Pavel Alexandrov* (1896-1982) e *Pavel Uryson* (1898-1924), che mostrarono come, sotto opportune condizioni, la compattezza di Frechét derivasse dalla compattezza per ricoprimenti. Non fu poi difficile per i matematici, del passato e del presente, abbandonarsi alla maneggiabilità più alta della nuova definizione.

Contenuto della Tesi

Diamo una linea generale di ciò che contiene ogni capitolo.

Capitolo 1 : Nel primo capitolo daremo le definizioni di compattezza, compattezza per successioni e numerabile compattezza, con uno sguardo alle relazioni che sussistono tra di loro.

Capitolo 2 : Nel secondo capitolo introdurremo il concetto di spazio metrizzabile e dimostreremo il teorema d'equivalenza delle compattezze per questo tipo di spazi.

Capitolo 3 : Nel terzo capitolo daremo un esempio di spazio topologico compatto ma non sequenzialmente compatto.

Capitolo 4 : Nel quarto capitolo prepareremo gli strumenti per poter affrontare consapevolmente i capitoli seguenti. Per prima cosa rinfrescheremo le definizioni di relazione d'ordine, insieme ordinato . . . , mentre in seguito introdurremo una topologia per gli insiemi ordinati e il concetto di ordinale. Mostreremo che ogni insieme può essere bene ordinato e che ogni insieme bene ordinato è simile ad un unico ordinale, ma vedremo anche cosa si può concludere di conseguenza.

Capitolo 5 : Nel quinto capitolo costruiremo uno spazio topologico compatto per successioni ma non per ricoprimenti e introdurremo un teorema molto forte per gli insiemi totalmente ordinati equipaggiati con la topologia d'ordine.

Capitolo 6 : Nel sesto capitolo lavoreremo con un nuovo tipo di relazione d'ordine e ci convinceremo che esistono spazi non metrizzabili "fortunati" in termini di compattezza. Daremo inoltre la definizione di spazio topologico separabile e vedremo che relazione intercorre tra spazi metrizzabili, separabili e compatti.

Capitolo 1

Compattezza

Per questo capitolo abbiamo preso spunto da [Kow65],cap. 11, [Ser01], cap. 3, [Dem86], cap.8, [Ste78], parte I, ...

Definizione 1. *Sia* (X, τ) *uno spazio topologico. Un* ricoprimento aperto *di* X *è una famiglia* $\mathcal{A} \subseteq \tau$ *tale che* $X \subseteq \cup\mathcal{A}$.

Intuitivamente, dire che $\mathcal{A}$ è un ricoprimento aperto di X è come dire che possiamo prendere gli aperti di $\mathcal{A}$ e "incollarli su X senza lasciare buchi".

Ad esempio, una base per una topologia è un ricoprimento aperto dell'insieme a cui è riferita.

Vediamone comunque un altro, che può esserci più familiare. Consideriamo la retta reale con la topologia delle palle e definiamo $\mathcal{A} := \{B(x, \frac{1}{e})$ con $x \in \mathbb{R}\}$; questo è sicuramente un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$, infatti ogni punto dell'insieme sta almeno nella palla centrata in esso. Possiamo tuttavia notare che non è indispensabile prendere tutte le palle in $\mathcal{A}$ per ricoprire $\mathbb{R}$, bensì basta prenderne in numero inferiore.

Definizione 2. *Sia* (X, τ) *uno spazio topologico e* $\mathcal{A}$ *un suo ricoprimento aperto. Allora un* sottoricoprimento *di* X *è una famiglia* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ *tale che* $X \subseteq \cup\mathcal{S}$.

Non è detto che da ogni ricoprimento aperto si possa però estrarre un sottoricoprimento strettamente contenuto in esso. Ne diamo un banalissimo esempio. Prendiamo uno spazio topologico (X, τ). Allora, per definizione di topologia, $X \in \tau$; ricopriamo X con $\{X\}$ e la tesi è provata.

Definizione 3. *Uno spazio topologico* (X, τ) *si dice* compatto [1] *se da ogni ricoprimento aperto di* X *è estraibile un sottoricoprimento finito.*

[1] Ci capiterà qualche volta di chiamarlo anche compatto per ricoprimenti.

E' chiaro che basta trovare un solo ricoprimento aperto da cui non si può estrarre alcun sottoricoprimento finito per mostrare che uno spazio topologico non è compatto. Torniamo all'esempio della retta reale: per quanto cerchiamo infatti di "ridurre al minimo indispensabile" il numero di palle necessarie a ricoprire $\mathbb{R}$, non possiamo ridurci ad averne un numero finito. Le cose tuttavia non vanno sempre male: anche $\mathbb{R}$, con un'opportuna topologia, può diventare uno spazio compatto. Basta prendere infatti la topologia banale, che rende un qualsiasi insieme uno spazio topologico compatto.

Un altro esempio di spazio topologico compatto è uno spazio (X, τ) dove X è un insieme finito [2].

Non possiamo poi, per ovvi motivi, evitare di citare gli intervalli chiusi e limitati in $\mathbb{R}^n$, che sono compatti grazie al Teorema di Heine-Borel.

Ci accorgiamo a questo punto del ruolo fondamentale che gioca la scelta della topologia in termini di compattezza, cosa che diventerà evidentissima nello studio dei controesempi.

Definizione 4. *Uno spazio topologico* (X, τ) *è detto di* Hausdorff *se, comunque presi* x, y *distinti in* X*, esistono due aperti disgiunti* $A, B \in \tau$ *tali che* $x \in A$ *e* $y \in B$*.*

Proposizione 1. *Sia* (X, τ) *uno spazio di Hausdorff. Se* $C \subseteq X$ *è compatto allora* C *è un chiuso di* X*.*

Dimostrazione. Daremo qui solo una traccia della dimostrazione. La strategia è dimostrare che $X \setminus C$ è aperto. Fissato $x \in X \setminus C$, poichè X è di Hausdorff, per ogni punto $y \in C$ è possibile trovare due aperti disgiunti contenenti x e y rispettivamente. Si costruisce così un ricoprimento aperto di C da cui è estraibile un sottoricoprimento finito. Se si prendono poi gli aperti corrispondenti (trovati all'inizio) in $X \setminus C$ e se ne fa l'intersezione, si conclude il discorso. □

É necessario, nonché moralmente obbligatorio, per noi citare a questo punto uno dei pilastri topologici per eccellenza, con il dispiacere tuttavia di non darne una dimostrazione in queste note, poiché ci richiederebbe una preparazione troppo lunga. Dobbiamo però prima introdurre un paio di definizioni per procedere con chiarezza.

Definizione 5. *Chiameremo* famiglia indicizzata *di insiemi una coppia ordinata* (I, A) *dove* I *è un insieme e* A *è una funzione con dominio* I *e immagine contenuta nella classe di tutti gli insiemi.*

[2] Questo segue direttamente dal fatto che, se X è un insieme finito, lo è anche $\mathcal{P}(X)$.

Preferiremo tuttavia indicare una famiglia indicizzata con $(A_i)_{i\in I}$ invece che con (I, A).

Definizione 6. *Si definisce* prodotto cartesiano *di una famiglia indicizzata* $(A_i)_{i\in I}$ *l'insieme*

$$\prod_{i\in I} A_i = \{a : I \longrightarrow \cup_{i\in I} A_i \textit{ tali che } a_i \in A_i, \forall i \in I\}.$$

Un caso particolare si ha quando $A_i = A$ per ogni $i \in I$, per cui risulta $\prod_{i\in I} A = A^I$. Ne vedremo comunque un esempio concreto nel Terzo Capitolo.

Teorema 3 (Tychonoff)**.** *Il prodotto di una famiglia indicizzata di spazi topologici compatti è compatto* [3]*.*

É indubbio che questo teorema sia di una forza sconvolgente, dobbiamo tuttavia per ora abbandonarlo e proseguire sulla nostra via.

Per non lasciare spazio alle ambiguità, ci pare opportuno rinfrescare un po' di concetti.

Ricordiamo che, dato uno spazio topologico (X, τ), il *filtro degli intorni* di un elemento $x \in X$ è la famiglia $\mathcal{U}_x = \{U \subseteq X$ tali che $\exists A \in \tau$ tale che $x \in A \subseteq U\}$; una base per $\mathcal{U}_x$ è invece una famiglia $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}_x$ tale che, per ogni intorno V di x, esiste $U \in \mathcal{B}(x)$ tale che $U \subseteq V$.

Un'altra cosa su cui non dobbiamo avere dubbi è che una *successione* in un insieme X non è altro che una funzione $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$, che sovente indicheremo con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o semplicemente con (a_n), ma soprattutto che vi è una sostanziale differenza tra punto di accumulazione e punto limite di una successione.

Definizione 7. *Sia $a : \mathbb{N} \longrightarrow A$ una successione, con $A \subseteq X$. Diremo che $x \in X$ è un*

- punto di accumulazione *di (a_n) se per ogni $U \in \mathcal{U}_x$ e per ogni $n_0 \in \mathbb{N}$ esiste $n > n_0$ tale che $a_n \in U$.*

- punto limite *di (a_n) se per ogni $U \in \mathcal{U}_x$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > n_0$ si ha che $a_n \in U$* [4]*.*

[3] Per la dimostrazione è comunque sufficiente consultare un qualsiasi testo di topologia generale, ad esempio [Ser01], pag. 107

[4] Quest'ultima condizione equivale a dire che la successione sta definitivamente nell'intorno, alternativamente, che una coda della successione è tutta contenuta nell'intorno.

É immediato che un punto limite di una successione ne è anche un punto di accumulazione, tuttavia non vale il viceversa. Prendiamo ad esempio la successione $a : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ che manda i numeri narturali pari in 0 e quelli dispari in 1. Sia 0 che 1 sono punti di accumulazione di a ma nessuno di loro ne è un punto limite.

Diremo che una successione $a : \mathbb{N} \longrightarrow A$ *converge* in X se esiste in X un punto limite di (a_n).

Definizione 8. *Uno spazio topologico* (X, τ) *si dice* sequenzialmente compatto *(o* compatto per successioni*) se è possibile estrarre una sottosuccessione convergente da ogni successione in* X*.*

Per evitare futuri imbarazzi ricordiamo che, data una successione (a_n), una sua *sottosuccessione* è una funzione $a \circ s$, dove s è una funzione strettamente crescente $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Come abbiamo già accennato, esempi di spazi topologici sequenzialmente compatti sono gli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}^n$ con la topologia standard, ma anche i sottinsiemi finiti di un qualsiasi spazio topologico. Non ci siamo scordati di aver già citato questi esempi per la compattezza, tuttavia preferiamo conservare il meglio per la fine.

Introduciamo ora l'ultimo tipo di compattezza che ci interessa studiare. Ricordiamo per prima cosa però che diremo che un insieme N è numerabile se esiste una funzione iniettiva $N \longrightarrow \mathbb{N}$ o, analogamente, una funzione suriettiva $\mathbb{N} \longrightarrow N$.

Definizione 9. *Sia* (X, τ) *uno spazio topologico e sia* $A \subseteq X$*. Un punto* $x \in X$ *si dice* punto di accumulazione *per* A *se per ogni* $U \in \mathfrak{U}_x$*,* U *contiene infiniti punti di* A*.*

Definizione 10. *Uno spazio topologico* (X, τ) *si dice* numerabilmente compatto *se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti:*

(1) *Da ogni ricoprimento aperto numerabile di* X *è estraibile un sottoricoprimento finito.*

(2) *Ogni sottinsieme infinito di* X *ha un punto di accumulazione in* X*.*

(3) *Ogni successione in* X *ha un punto di accumulazione in* X*.*

Verifichiamo l'equivalenza delle tre definizioni.

Dimostrazione. (2) $\Rightarrow$ (3)) Prendiamo una successione $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$ e indichiamo con $X(n)$ l'insieme dei suoi punti. Se $X(n)$ è finito vuol dire che (a_n) ha infiniti termini coincidenti e dunque ha un punto di accumulazione.

Se $X(n)$ è infinito ha, per ipotesi, un punto di accumulazione $x \in X$, cioè, per ogni $U \in \mathfrak{U}_x$, $U \cap X(n)$ contiene infiniti punti di $X(n)$. Da questo segue che per ogni $U \in \mathfrak{U}_x$ e per ogni $n_0 \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in U$, cioè x è punto di accumulazione di (a_n).
(3) $\Rightarrow$ (2)) Ogni sottinsieme infinito di X ha un sottinsieme numerabile, quindi possiamo ragionare semplicemente sui sottinsiemi numerabili. Consideriamo dunque $X(n) \subseteq X$ numerabile e gli associamo una successione $a : \mathbb{N} \longrightarrow X(n)$. Se procediamo all'incontrario di sopra, mostriamo che se x è punto di accumulazione della successione (a_n) lo è anche per $X(n)$.
(3) $\Rightarrow$ (1)) Dimostreremo che la negazione di (1) implica la negazione di (3). Consideriamo dunque un ricoprimento aperto numerabile $\mathcal{A} = (A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di X da cui non sia estraibile alcun sottoricoprimento finito; per ogni unione finita di elementi di $\mathcal{A}$ esiste dunque un elemento di X che non le appartiene. Definiamo ora dei nuovi aperti come segue

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_{k+1} = B_k \cup A_{k+1} \end{cases}$$

quindi ogni aperto è contenuto in quelli di indice superiore. Esiste allora una successione $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$ tale che

$$\begin{cases} a_0 \in X \\ a_1 \in X \setminus B_1 \\ a_n \in X \setminus B_n. \end{cases}$$

Questa successione non può avere punti di accumulazione in X poiché, per ogni elemento $x \in X$, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $x \in B_k$, che contiene solamente un numero finito di punti della successione.
(1) $\Rightarrow$ (2)) Dimostreremo che la negazione di (2) implica la negazione di (1). Prendiamo un sottinsieme infinito e numerabile $S \subseteq X$ privo di un punto di accumulazione in X, cioè per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U_x di x tale che $U_x \cap S$ contiene un numero finito di elementi. Per ogni sottinsieme finito F di S definiamo allora $A_F := \cup\{U_x \text{ tali che } U_x \cap S = F\}$, dove U_x è come sopra. Segue dunque che la famiglia $\mathcal{F}$ di tutti gli aperti A_F è un ricoprimento aperto di X; in più $\mathcal{F}$ è numerabile poiché lo è lo stesso S. Ogni sottofamiglia finita di $\mathcal{F}$ comprende tuttavia un numero finito di punti di S, di conseguenza non è possibile estrarre alcun sottoricopimento finito di X da $\mathcal{F}$.

$\square$

Grazie a quest'ultima fatica, possiamo trarre un paio di importanti conclusioni. La prima è che ogni spazio topologico compatto è pure numerabilmente compatto, cosa che segue direttamente dalla definizione (1) di numerabile compattezza. Conseguenza della (3) è invece che ogni spazio topologico sequenzialmente compatto è anche numerabilmente compatto. Quindi, con una scrittura un po' informale,

$$\text{COMPATTO} \Rightarrow \text{NUM. COMPATTO} \Leftarrow \text{SEQ. COMPATTO}.$$

Iniziamo ora veramente a domandarci quali siano le reali differenze che intercorrono tra spazi compatti per ricoprimenti e spazi compatti per successioni, viste le loro analogie. Potrebbe infatti sembrare che il dibattito lessicale che si è avuto nel tempo non sia altro che una manciata di sabbia, in considerazione alla nostra attuale preparazione; ci conviene tuttavia rimanere ancora per un attimo appollaiati sulle spalle dei giganti e, con umiltà, mettere nello zaino qualche altro strumento.

Definizione 11. *Si dice che uno spazio topologico* (X, τ) *soddisfa il* primo assioma di numerabilità *se, per ogni punto di* X*, il filtro degli intorni ha una base numerabile.*

Proposizione 2. *Uno spazio topologico numerabilmente compatto* (X, τ) *soddisfacente il primo assioma di numerabilità è sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione. Consiederiamo una successione a in X e chiamiamo $X(n)$ l'insieme dei termini della successione.

Se $X(n)$ è finito significa che la successione presenta infiniti termini coincidenti, dunque è estraibile da essa una sottosuccessione convergente.

Se $X(n)$ è infinito, invece, $X(n)$ ha un punto di accumulazione $x \in X$.

Prendiamo dunque una base numerabile indicizzata $\mathcal{B}(x) = (U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ per $\mathcal{U}_x$. Definiamo di conseguenza una nuova famiglia di intorni $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ come segue

$$\begin{cases} V_0 := U_0 \\ V_{k+1} := V_k \cap U_{k+1} \end{cases}$$

e otteniamo che ogni intorno è contenuto in quelli di indice inferiore.

Consideriamo ora una funzione $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ che definiamo così:

$$s(0) = n_0 = \min\{n \text{ tali che } a(n) \in V_0\}$$

$$s(1) = n_1 = \min\{n \text{ tali che } n_0 < n \text{ e } a(n) \in V_1\}$$

in generale

$$s(k+1) = n_{k+1} = \min\{n \text{ tali che } n_k < n \text{ e } a(n) \in V_{k+1}\}.$$

La sottosuccessione $a \circ s$ risulta così convergente ad x.

$\square$

Capitolo 2

Il Teorema

Per questo capitolo abbiamo consultato [Ser01], cap.1 e cap.3, [Lip71], cap.8, [Kow65] cap.31 ...

2.1 Spazi metrizzabili

Definizione 12. *Una* metrica *(o* distanza*) definita su un insieme X è una funzione $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:*

(M1) $d(x, y) \geq 0$ *e* $d(x, x) = 0$

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ *(*simmetria*)*

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(*disuguaglianza triangolare*)*

(M4) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Chiameremo spazio metrico *la coppia ordinata* (X, d).

Una metrica per noi ormai familiare è la distanza tra due punti in $\mathbb{R}$, in $\mathbb{R}^2$, in $\mathbb{R}^3 \dots$, definita da $d(x, y) = \langle x-y, x-y\rangle^{\frac{1}{2}}$. [1] Sulle basi di questa distanza abbiamo scoperto i primi insiemi aperti, come palle di raggio fissato, tuttavia abbiamo poi imparato che la topologia delle palle non è l'unica topologia che si può dare ad un insieme.

Diremo che una topologia τ è *indotta* da una distanza d se $\{B(x, r)\}_{\substack{x \in X \\ r>0}}$ è una base per τ.

Definizione 13. *Uno spazio topologico* (X, τ) *si dice* metrizzabile *se esiste una metrica che induce la topologia* τ*.*

[1] Indichiamo con $\langle x, y\rangle$ il prodotto scalare tra due vettori x e y.

In uno spazio metrizzabile è assicurata l'esistenza di una distanza che ne induce la topologia, non è detto tuttavia che questa sia unica. Questo, ad ogni modo, non risulta un problema per noi e ogni volta che parleremo di spazi metrizzabili in termini generali supporremo implicitamente di avere già trovato una delle distanze possibili.

Vediamo ora qualche esempio.

- Ogni spazio topologico con la topologia delle palle è metrizzabile.
- Ogni insieme equipaggiato con la topologia discreta è metrizzabile.
- Uno spazio topologico metrizzabile (X, τ) è uno spazio di Hausdorff. Presi due punti distinti $x, y \in X$, si ha infatti che $d(x, y)$ è un valore strettamente positivo, chiamiamolo r. Definiamo ora $U := B(x, \frac{r}{4})$ e $V := B(y, \frac{r}{4})$. Questi aperti contengono rispettivamente x e y e la loro intersezione è vuota.

  Se vi fosse, per assurdo, un elemento $w \in U \cap V$, questo soddisferebbe $d(x, w), d(y, w) < \frac{r}{4}$. Per la disuguaglianza triangolare, si avrebbe però che $d(x, y) \leq d(x, w) + d(y, w) < \frac{r}{2}$. Assurdo.
- L'insieme $X := \{a, b\}$ equipaggiato con la topologia banale non è metrizzabile, poiché non è di Hausforff. Non esistono, infatti, due aperti disgiunti contenenti a e b rispettivamente.

Proposizione 3. *Ogni spazio topologico metrizzabile soddisfa il primo assioma di numerabilità.*

Dimostrazione. Sia (X, τ) lo spazio in questione. Per ogni $x \in X$, basta prendere come base per il filtro degli intorni, la famiglia $\mathcal{B}(x) = \{B(x, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. □

2.2 Il numero di Lebesgue

Definizione 14. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ due ricoprimenti aperti di X. Diremo che $\mathcal{A}'$ è un raffinamento di $\mathcal{A}$ se per ogni $A \in \mathcal{A}'$ esiste $B \in \mathcal{A}$ tale che $A \subseteq B$.*

Diamo immediatamente un esempio semplice ma efficace per fissare le idee. Consideriamo l'insieme $X = \{1, 2, 3\}$ ed equipaggiamolo con la topologia discreta. Definiamo ora due ricoprimenti aperti di X, $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ e $\mathcal{A}' = \{\{2\}, \{1, 3\}\}$: nessuno dei due è un raffinamento dell'altro. Se prendiamo però $\mathcal{A}'' = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$, abbiamo che sia $\mathcal{A}$ che $\mathcal{A}'$ ne sono un raffinamento.

Definizione 15. *Sia* (X, τ) *uno spazio topologico metrizzabile e sia* $\mathcal{A}$ *un suo ricoprimento aperto. Si dice che* $\epsilon > 0$ *è un* numero di Lebesgue *di* $\mathcal{A}$ *se* $\mathcal{B}_\epsilon(X) := \{B(x,\epsilon)\}_{x\in X}$ *è un raffinamento di* $\mathcal{A}$.

Consideriamo l'esempio precedente. Ricordiamo che la topologia discreta è indotta dalla distanza discreta, definita da

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = y \\ 1 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Abbiamo così, che per ogni $x \in X$, $B(x, \frac{1}{3}) = \{x\}$, quindi $\epsilon = \frac{1}{3}$ è un numero di Lebesgue per $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$; è chiaro, a questo punto, che lo deve essere anche per $\mathcal{A}''$, poiché i primi due sono suoi raffinamenti.

Proposizione 4. *Sia* (X, τ) *uno spazio topologico sequenzialmente compatto e metrizzabile. Allora ogni ricoprimento aperto di* X *possiede un numero di Lebesgue.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$ definiamo $\epsilon(x) := \sup\{r > 0 \text{ tali che } \exists A \in \tau \text{ tale che } B(x,r) \subset A\}$ [2], con la convenzione che, se non esiste un estremo superiore, diremo che il sup è $+\infty$. Si ha dunque che $\epsilon(x) > 0$ per ogni $x \in X$, cosa che non ci stupisce poiché ogni punto di X sta in almeno un aperto di τ. Poniamo ora $\overline{\epsilon} := \inf_{x\in X} \epsilon(x)$, che può essere dunque finito o valere $+\infty$.

Se $\overline{\epsilon} = +\infty$ significa che qualsiasi valore positivo è un numero di Lebesgue e quindi abbiamo finito.

Se $\overline{\epsilon}$ è finito sussistono nuovamente due casi: $\overline{\epsilon} > 0$ e $\overline{\epsilon} = 0$. Nel primo caso ci basta prendere $\epsilon = \frac{\overline{\epsilon}}{2}$; per quanto riguarda il secondo, mostreremo che non si può verificare. Procediamo dunque per assurdo e supponiamo $\overline{\epsilon} = 0$: esiste allora una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di X tale che $\epsilon(a_n) \to 0$. Grazie alla sequenziale compattezza di (X, τ) possiamo estrarre una sottosuccessione convergente $((a \circ s)_n) = (y_n)$ da quest'ultima; chiamiamo $\overline{x}$ il suo punto limite. Esiste dunque $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > n_0$, $d(\overline{x}, y_n) < \frac{\epsilon(\overline{x})}{4}$. Di conseguenza,

$$B(y_n, \frac{\epsilon(\overline{x})}{4}) \subset B(\overline{x}, \frac{\epsilon(\overline{x})}{2}) \ \forall n > n_0.$$

Si ha quindi che $\epsilon(y_n) \geq \frac{\epsilon(\overline{x})}{4}$ per ogni $n > n_0$, per cui

$$\lim_{n\to+\infty} \epsilon(y_n) \geq \frac{\epsilon(\overline{x})}{4} > 0.$$

Assurdo. □

[2] Per la definizione di sup e inf si veda la definizione 22.

2.3 Teorema d'equivalenza delle compattezze

Teorema 4. *Sia (X, τ) uno spazio topologico metrizzabile. Allora sono equivalenti*

(1) *X è compatto per ricoprimenti.*

(2) *X è numerabilmente compatto.*

(3) *X è sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2) ovvio.
(2) $\Rightarrow$ (3) Segue direttamente dalle proposizioni 3 e 2.
(3) $\Rightarrow$ (1) Procediamo per assurdo. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X da cui non è estraibile alcun sottoricoprimento finito e sia ϵ un suo numero di Lebesgue. Abbiamo allora che neppure da $\mathcal{B}_\epsilon(X)$ si può estrarre alcun sottoricoprimento finito [3].

Da questo segue che, fissato $x_1 \in X$, esiste $x_2 \in X$ tale che $x_2 \notin B(x_1, \epsilon)$ e lo stesso ragionamento si può estendere ad un qualunque insieme finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$, per cui esiste un elemento x_{n+1} in X non appartenente a $\cup\{B(x_i, \epsilon)\}_{i=1}^n$. Costruiamo in questa maniera una successione (x_n) di elementi che soddisfano $d(x_i, x_j) > \epsilon$ per $i \neq j$. Grazie alla sequenziale compattezza di (X, τ), possiamo estrarre ora una sottosuccessione di (x_n) convergente ad un punto $\overline{x} \in X$. Questo significa che ogni aperto contenente $\overline{x}$, contiene una coda della sottosuccessione, in particolare anche $B(\overline{x}, \frac{\epsilon}{3})$. Presi però due punti distinti della successione x_k e x_l, abbiamo, per la disuaglianza triangolare, che

$$d(x_l, x_k) \leq d(\overline{x}, x_k) + d(\overline{x}, x_l) = \frac{2\epsilon}{3}.$$

Assurdo. $\square$

[3] Poiché se vi fosse un sottoricoprimento finito di $\mathcal{B}_\epsilon(X)$ se ne potrebe costruire di conseguenza uno di $\mathcal{A}$, visto che per ogni $B \in \mathcal{B}_\epsilon(X)$ esiste un aperto in $\mathcal{A}$ che contiene B.

Capitolo 3

Primo controesempio

Questa parte è uno sviluppo dell'esercizio 8.3.4 in [Dem86].

Se i risultati che abbiamo ottenuto finora hanno lasciato in voi un briciolo di curiosità, è giunto il momento di svuotare il bicchiere. Nelle prossime pagine, infatti, ci convinceremo che esistono veramente spazi topologici che non soddisfano le tre definizioni di compattezza che abbiamo studiato.

In questo capitolo vedremo inoltre com'è possibile costruire, senza troppa fatica, uno spazio topologico che sia compatto per ricoprimenti ma non per successioni e cominceremo a riflettere su quali siano gli ingredienti che ci permettono di riuscirci.

Iniziamo, dunque, a preparare il terreno. Chiamiamo I l'intervallo chiuso $[0, 1]$ e gli associamo la topologia standard. Prendiamo, poi, l'insieme $\{0, 1\}$ con la topologia discreta, che è evidentemente uno spazio topologico compatto.

Definiamo finalmente $X := \{0, 1\}^I$ e affermiamo che, equipaggiato con la topologia prodotto τ, è proprio ciò che stavamo cercando.

Che (X, τ) sia compatto per ricoprimenti segue direttamente dal Teorema di Tychonoff; che non sia compatto per successioni non è affatto istantaneo e dovremo lavorarci un po'. Dobbiamo, in sostanza, far vedere che esiste in (X, τ) una successione che non ammette sottosuccessioni convergenti. La via più breve è costruirla esplicitamente.

Ricordiamo dunque che X è l'insieme di tutte le funzioni $[0, 1] \longrightarrow \{0, 1\}$, di conseguenza definiremo la successione $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$ in base alla sua azione sull'intervallo $[0, 1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ovvero

$$\begin{cases} a_n(0) := 0 \\ a_n(x) := \text{n-esimo termine dello sviluppo binario prolisso di } x \text{ per ogni } x \in (0,1] \end{cases}$$

Applichiamo queste definizioni [1] ad un esempio concreto e consideriamo $x = \frac{5}{16}$ in base 10, che presenta due sviluppi binari:

$$(\frac{5}{16})_{10} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{16})_{10} = (0,0101)_2 = (0,0100\overline{1})_2$$

La nostra scelta ci porta qui ad avere che $a_0(x) = a_1(x) = a_3(x) = a_4(x) = 0$, mentre $a_2(x)$ e tutti gli altri termini dello sviluppo sono uguali ad 1.

Consideriamo ora un altro esempio, in modo da convincerci che, al contrario di quel che può sembrare dal precedente, non è vero che ogni elemento di X ha uno sviluppo definitivamente costante, cioé che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n, m > n_0$, $a_n = a_m$, infatti

$$(\frac{3}{5})_{10} = (\frac{11}{101})_2 = (0,\overline{1001})_2$$

e dunque non presenta una coda di soli 1.

Osserviamo tuttavia che

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x)}{2^n} \quad \forall x \neq 0$$

e inoltre che, partendo da un qualsivoglia punto dello sviluppo, fra i termini che lo seguono vi sarà certamente un 1, cioè

$$\forall m \in \mathbb{N} \; \exists n > m \text{ tale che } a_n(x) = 1$$

Detto questo, puntiamo a concludere il discorso sfruttando le seguenti proposizioni, le cui dimostrazioni sono talmente semplici che eviteremo di esporle:

Proposizione 5. *Dati due spazi topologici X e Y, una funzione $f : X \longrightarrow Y$ continua e una successione $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$, si ha che se (a_n) converge ad un elemento $x \in X$ allora $f \circ a : \mathbb{N} \longrightarrow Y$ converge a $f(x) \in Y$*

Proposizione 6. *Sia X uno spazio discreto e $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$ una sua successione, allora (a_n) converge in $X \Leftrightarrow (a_n)$ è definitivamente costante.*

[1] Nel caso in cui vi siano due sviluppi di uno stesso valore in base 2, si dice *sviluppo binario prolisso* quello che presenta infiniti termini uguali ad 1.

Prendiamo ora una qualsiasi sottosuccessione (b_n) di (a_n), cioè esiste una funzione strettamente crescente $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tale che $b = a \circ s$.

Possiamo poi considerare , per ogni elemento y di $[0, 1]$, la *valutazione in* y, cioè

$$e_y : X \longrightarrow \{0, 1\}$$
$$f \mapsto f(y)$$

che è notoriamente continua [2].

Grazie alle proposizioni 5 e 6 se b converge in X allora $e_y \circ b$ deve convergere in $\{0, 1\}$ per ogni $y \in [0, 1]$. Per negare questa eventualità ci basta controllare che, per un opportuno $y \in [0, 1]$, $e_y \circ b$ non è definitavamente costante.

Basta scegliere

$$y := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{s(2n+1)}}$$

e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si avrà che $e_y \circ b_n = e_y \circ a_{s(n)}$.

Quindi $b_n(y)$ è l'n-esima cifra dello sviluppo binario prolisso di y. Osserviamo infine che y presenterà sicuramente 0 nei posti $s(2n)$ e 1 nei posti $s(2n + 1)$, il che ci permette di concludere che $b(y)$ non è definitivamente costante e che quindi lo spazio (X, τ) non è sequenzialmente compatto.

[2] La topologia prodotto è la topologia più grossolana che rende le proiezioni continue.

Capitolo 4

Relazioni d'ordine e Ordinali

Come si può presagire dal capitolo precedente, una delle maniere per costruire controesempi efficaci è quella di lavorare con insiemi infinitamente grandi. Quest'ultimo, sebbene sia un requisito assolutamente necessario, non ci conduce però direttamente alla meta.

Per i prossimi capitoli dovremo infatti cercare di cambiare prospettiva e di abbandonarci ad idee alternative: ci viene in aiuto la teoria degli insiemi. Naturalmente, non abbiamo la pretesa di considerare tutte le sfaccettature degli argomenti che tratteremo, bensì preferiremo l'utile al dilettevole. Studieremo perciò soltanto quello che ci servirà in seguito, seppur con attenzione, perché sarà fondamentale averne consapevolezza in ogni tappa di questo percorso insidioso.

Per la stesura di questo capitolo abbiamo fatto riferimento a [Hal98], cap. da 14 a 20, e [Dev93], cap. 1 e 3.

4.1 Relazioni d'ordine

Definizione 16. *Una* relazione *su un insieme X è un sottinsieme $R \subseteq X \times X$.*

Decidiamo fin da subito di scrivere aRb invece di $(a, b) \in R$ e diciamo che una relazione è

- *riflessiva* se aRa per ogni $a \in X$
- *antiriflessiva* se $(a, a) \notin R$ per ogni $a \in X$
- *simmetrica* se $aRb \Rightarrow bRa$
- *antisimmetrica* se aRb e $bRa \Rightarrow a = b$
- *transitiva* se aRb e $bRc \Rightarrow aRc$

Definizione 17. *Una* relazione d'ordine *(o solamente* ordine*) su un insieme X è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva.*

Decidiamo in questo caso di sfruttare il simbolo $\leq$, comune nei nostri ricordi d'infanzia, e sostituiamo dunque la scrittura aRb con $a \leq b$ se R è una relazione d'ordine. Di conseguenza

Definizione 18. *Un* insieme ordinato *è una coppia ordinata $(X, \leq)$.*

Esempi di insiemi ordinati sono $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, con la relazione d'ordine a cui siamo fin da sempre abituati, ma anche tutte le coppie ordinate del tipo $(\mathcal{F}, \leq)$ dove $\mathcal{F}$ è una famiglia di insiemi e $\leq$ denota questa volta l'inclusione $\subseteq$.

Osserviamo subito che, mentre nel primo caso, tutti gli elementi di $\mathbb{N}$ sono tra loro confrontabili, così come quelli di $\mathbb{Z}$ e di $\mathbb{Q}$, è possibile che due insiemi non lo siano.

E' dunque opportuno dare qualche nuova definizione.

Definizione 19. *Una relazione d'ordine su un insieme X è detta* totale *se, per ogni $(x, y) \in X \times X$, $x \leq y$ oppure $y \leq x$. Chiameremo la coppia $(X, \leq)$* insieme totalmente ordinato *o* catena*.*

Alternativamente al concetto di relazione d'ordine possiamo introdurre il concetto di s-ordine, che vedremo tra poche righe esserle tuttavia strettamente legato.

Definizione 20. *Una relazione su un insieme X si dice* s-ordine *se è transitiva e antiriflessiva.*

Scegliamo di indicare quest'ultima con $<$ e chiamiamo la coppia ordinata $(X, <)$ *insieme s-ordinato.*

Vediamo che è effettivamente facile passare da ordine a s-ordine, infatti se $(X, \leq)$ è un insieme ordinato e definiamo $<$ come

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \text{ e } x \neq y \text{ per ogni } x, y \in X$$

è evidente che $(X, <)$ è un insieme s-ordinato. Viceversa, se $(X, <)$ è un insieme s-ordinato, se poniamo

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \text{ oppure } x = y \text{ per ogni } x, y \in X$$

otteniamo che $(X, \leq)$ è un insieme ordinato.

4.2 Insiemi bene ordinati

Definizione 21. *In un insieme ordinato* $(X, \leq)$ *un elemento* $a \in X$ *si dice* elemento minimo *se* $a \leq x$ *per ogni* $x \in X$*; un elemento* $b \in X$ *si dice* elemento massimo *se* $x \leq b$ $\forall x \in X$*.*

Indicheremo con $\min X$ e $\max X$ il minimo e il massimo elemento di un insieme X, qualora questi esistessero (se esistono sono ovviamente unici).

L'insieme $\mathbb{N}$, ad esempio, ha un elemento minimo che coincide con lo zero (se scegliessimo di non considerare lo zero come un numero naturale il minimo sarebbe 1), mentre non ha un massimo; $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, invece, non presentano né l'uno né l'altro. Riguardo ad una collezione di insiemi non possiamo, in generale, concludere nulla.

É possibile, tuttavia, che un insieme, privo di massimo o minimo, presenti qualcosa di analogo.

Definizione 22. *Sia* $(X, \leq)$ *un insieme ordinato e sia* $A \subseteq X$*. Diremo che* A *ha un* estremo inferiore *(*estremo superiore*) in* X *se esiste* $a \in X$ *tale che*

- $x \in A \Rightarrow a \leq x$ *(*$x \leq a$*)*
- $b \in X$ *e* $b \leq x$ *(*$x \leq b$*) per ogni* $x \in A \Rightarrow b \leq a$ *(*$a \leq b$*).*

Indicheremo con $\inf A$ e $\sup A$ rispettivamente l'estremo inferiore e l'estremo superiore di A in X. Ci rimangono da esaminare solamente due casi per i nostri scopi.

Definizione 23. *In un insieme ordinato* $(X, \leq)$ *diremo che* $a \in X$ *è un elemento* massimale *(*minimale*) se* $x \in X$ *e* $a \leq x$ *(*$x \leq a$*) implica* $x = a$*, cioè nessun elemento di* X *è maggiore (minore) di* a*.*

Al contrario del minimo e del massimo, un insieme ordinato può avere più di un elemento massimale o minimale; un insieme totalmente ordinato no.

Definizione 24. *Un insieme ordinato* $(X, \leq)$ *si dice* insieme bene ordinato *se ogni suo sottinsieme non vuoto ha un minimo elemento.*

Evidentemente un insieme bene ordinato è anche totalmente ordinato, ma non è detto il viceversa.

Introduciamo a questo proposito una delle versioni equivalenti dell'assioma della scelta:

Lemma 1 (Zorn)**.** *Se* $(Y, \leq)$ *è un insieme ordinato tale che ogni catena in* Y *ha un maggiorante, cioè un elemento che sia più grande di ogni elemento della catena, allora* Y *ha almeno un elemento massimale.*

Ne tralasciamo la dimostrazione e invitiamo il lettore, se è nel suo interesse, a consultarla personalmente [1].

Teorema 5. *Qualsiasi insieme può essere bene ordinato.*

Dimostrazione. Consideriamo un insieme X e definiamo quindi la famiglia $\mathcal{H}$ dei sottinsiemi di X a cui possiamo dare un buon ordine, cioè

$$\mathcal{H} := \{(A, \leq_A) \text{ tale che } A \subseteq X \text{ e } \leq_A \text{ è un buon ordine su A } \}.$$

Questa famiglia è non vuota, infatti l'insieme vuoto le appartiene.

Diamo ora un ordine $\leq$ ad $\mathcal{H}$ nel modo seguente

$$(A, \leq_A) \leq (B, \leq_B) \Leftrightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ \leq_B |_{A \times A} = \leq_A \end{cases}$$

e verifichiamo che $(\mathcal{H}, \leq)$ soddisfa le condizioni del Lemma di Zorn.

Prendiamo infatti una catena $(\mathcal{M}, \leq')$ in $(\mathcal{H}, \leq)$, cioè

$$\begin{cases} \mathcal{M} \subseteq \mathcal{H} \\ \leq' = \leq |_{\mathcal{M}} \text{ è un ordine totale.} \end{cases}$$

Possiamo quindi scrivere $\mathcal{M} = \{(A, \leq_A)\}_{A \in \mathcal{M}'}$ dove $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{P}(X)$. Definiamo ora $M := \cup \mathcal{M}'$, a cui diamo un ordine $\leq_M$ come segue.

Per costruzione di M, abbiamo che se $x, y \in M$, deve esistere $C \in \mathcal{M}'$ tale che $x, y \in C$ e di conseguenza diciamo che

$$x \leq_M y \Leftrightarrow x \leq_C y.$$

Affermiamo inoltre che questa è una buona definizione, proprio per come è definito l'ordine in $\mathcal{H}$.

Si ha dunque che $(M, \leq_M)$ è un insieme bene ordinato che maggiora $(\mathcal{M}, \leq')$.

Per il Lemma di Zorn $(\mathcal{H}, \leq)$ ha quindi almeno un elemento massimale $(H^*, \leq^*)$. Affermiamo ora che $H^* = X$, col che la dimostrazione è conclusa. Infatti se $x \in X \setminus H^*$ possiamo definire $H = H^* \cup \{x\}$ e dargli un ordine $\leq''$ definito da

$$\begin{cases} a \leq'' b \Leftrightarrow a \leq^* b \text{ per ogni } a, b \in H^* \\ a \leq'' x \text{ per ogni } a \in H \end{cases}$$

ottenendo così un nuovo elemento che contiene propriamente H^*. Assurdo. $\square$

[1] In un qualsiasi testo di logica matematica, ad esempio [Hal98], pag.80.

Una delle conseguenze più importanti di questo teorema è di poter applicare a qualsiasi insieme, dopo avergli effettivamente dato un buon ordine, la tecnica dell'induzione transfinita, un analogo dell'induzione matematica, ma su un qualsiasi insieme bene ordinato.

Definizione 25. *Sia* $(X, \leq)$ *un insieme bene ordinato e sia a un suo elemento. Chiameremo* segmento iniziale *determinato da a in* X*, o più semplicemente* segmento di a*, il sottinsieme* $s_X(a) := \{x \in X \text{ tale che } x < a\}$ *(nel caso in cui non vi sia rischio di ambiguità scriveremo solo* $s(a)$ *al posto di* $s_X(a)$ *per alleggerire la notazione).*

In particolare, prendendo $X = \mathbb{N}$, ritroviamo i segmenti dei naturali, che quotidianamente bussano alle nostre porte e che possono dunque suggerirci un'idea intuitiva di ciò di cui stiamo parlando.

Teorema 6 (Induzione transfinita)**.** *Sia* $(X, \leq)$ *un insieme bene ordinato e sia* $U \subseteq X$*. Se, per ogni* $a \in X$*,* $s(a) \subseteq U \Rightarrow a \in U$ *allora* $U = X$*.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo di avere che $X \setminus U \neq \emptyset$. Questo allora avrà un minimo elemento, chiamiamolo a. Di conseguenza $s(a) \subseteq U$, ma allora per ipotesi $a \in U$. Assurdo. $\square$

Vedremo più avanti come in realtà ogni insieme bene ordinato è simile ad un unico ordinale e quindi, con un po' di elasticità, potremo pensare all'induzione transfinita come ad un'estensione dell'induzione matematica.

4.3 Topologia ordinata

Iniziamo introducendo la notazione che adotteremo in questo paragrafo, ma avvertiamo da principio il lettore che ci sentiremo legittimati a modificarla, analogamente a come si legge qualche riga più in basso, nello studio dei controesempi.

In un insieme totalmente ordinato $(X, \leq)$, a causa della loro rilevanza nell'argomento, indicheremo come segue alcuni sottinsiemi di X:

- $]\leftarrow, a[\ := \{x \in X \text{ tale che } x < a\}$ (*semirette aperte a destra*)

- $]b, \rightarrow[\ := \{x \in X \text{ tale che } b < x\}$ (*semirette aperte a sinistra*)

- $]c, d[\ := \{x \in X \text{ tale che } c < x < d\}$ (*intervalli aperti*) con $a, b, c, d \in X$.

Constatiamo, in primis, che negli insiemi bene ordinati ogni sottinsieme ha un minimo, dunque ogni semiretta aperta avrà un primo elemento. Ad esempio, nel caso dei numeri naturali, $]\leftarrow, 5[=[0, 5[$ [2],così come per ogni altro valore in $\mathbb{N}$.

In secondo luogo, evidenziamo che in buona parte dei casi gli intervalli aperti saranno insiemi discreti, perciò dovremo evitare di confonderli con gli intervalli della retta reale.

Con quest'accortezza possiamo finalmente introdurre una topologia per gli insiemi ordinati.

Definizione 26. *Sia* $(X, \leq)$ *un insieme totalmente ordinato. La* topologia ordinata*, o* topologia d'ordine*, su* X *è la topologia generata dalle semirette aperte e dagli intervalli aperti di* X *e dallo stesso* X*. In altre parole,*
$\mathcal{B} := \{\ ]\leftarrow, a[,\ ]b, \rightarrow[\ \} \cup \{\ ]c, d[\ \} \cup \{X\}$ *al variare di* a, b, c, d *in* X *è una sua base.*

Controlliamo che $\mathcal{B}$ è effettivamente una base per una topologia.

Sicuramente $\cup\mathcal{B} = X$. Rimane da appurare che

$$\forall A, B \in \mathcal{B},\ \forall x \in A \cap B\ \exists C \in \mathcal{B} \text{ tale che } x \in C \subseteq A \cap B$$

ma, dati $A, B \in \mathcal{B}$ si ha che $A \cap B$ o è l'insieme vuoto o ricade nelle categorie soprascritte (è una facile verifica per elencazione dei casi). Abbiamo dunque che $\mathcal{B}$ è senza dubbio una base per una topologia.

Concludiamo il paragrafo con uno sguardo a quello che succede negli insiemi totalmente ordinati in termini di filtri d'intorni. Osserviamo che, se (X, τ) è uno spazio topologico, è sicuramente più facile analizzare una base per il filtro degli intoni di ogni punto piuttosto che cercare di elencare tutti gli elementi di τ. Consideriamo $x \in X$ e vediamo come si presenterà una base $\mathcal{B}(x)$ per $\mathcal{U}_x$.

Nel caso di un insieme totalmente ordinato un'ottima scelta è data da $\mathcal{B}(x) = \{\ ]c, d[\ \}_{\substack{c<x \\ x<d}}$ a meno che x non sia il primo o l'ultimo elemento di X, nel qual caso $\mathcal{B}(x) = \{[x, d)\}_{x<d}$ oppure $\mathcal{B}(x) = \{(c, x]\}_{c<x}$. Questo segue direttamente dal fatto che per ogni semiretta aperta di $\mathcal{B}$, se $\mathcal{B}$ è una base per la topologia ordinata τ, che non consti di un solo punto, è possibile trovare un intervallo aperto contenuto in essa.

[2]Useremo le parentesi quadre al contrario per indicare gli estremi che vogliamo includere nelle semirette aperte o negli intervalli.

Nel caso di insiemi bene ordinati, la questione per i casi limite rimane la stessa, mentre migliora un pochino per tutti gli altri, infatti si avrà che $\mathcal{B}(x) = \{[c, d[\}_{\substack{c \leq x \\ x < d}}$, poiché ogni sottinsieme di X ora ha un minimo elemento. Non possiamo ovviamente dare una ricetta globale per la ricerca delle basi per i filtri degli intorni, tuttavia possiamo facilitare il lavoro tenendo a mente questi accorgimenti.

4.4 Funzioni tra insiemi ordinati

Vediamo ora come è possibile confrontare tra loro due insiemi ordinati.

Definizione 27. *Siano $(X, \leq)$ e $(Y, \leq')$ due insiemi ordinati. Una funzione $f : X \longrightarrow Y$ si dice* similitudine *se è biunivoca e se, per ogni $x, y \in X$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq' f(y)$. Scriveremo $X \cong Y$ se esiste una similitudine tra $(X, \leq)$ e $(Y, \leq')$.*

Mostriamo subito come questa definizione si può applicare in maniera equivalente per l' s-ordine associato a $\leq$, in modo tale da poter scegliere di volta in volta la verifica più conveniente.

Lemma 2. *Siano $(X, \leq)$ e $(Y, \leq')$ due insiemi ordinati ed $f : X \longrightarrow Y$ una funzione biunivoca. Allora f è una similitudine $\Leftrightarrow$ f conserva gli s-ordini corrispondenti.*

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$ $x < y \Rightarrow x \leq y$ e $x \neq y$, quindi applicando f si ottiene che $f(x) \leq' f(y)$, poichè f rispetta $\leq$, e $f(x) \neq f(y)$ poiché f è biunivoca.

$(\Leftarrow)$ $x \leq y \Rightarrow x < y$ oppure $x = y$, quindi, procedendo come sopra si avrà che $f(x) <' f(y)$ o $f(x) = f(y)$. $\square$

Un esempio banale di similitudine è l'identità, un altro esempio sono tutte le traslazioni "verso destra" della retta reale con l'ordine usuale.

Si ricava poi, direttamente dalla definizione di similitudine, che l' "essere simile" è una relazione di equivalenza grazie al fatto che l'inversa di una similitudine e la composizione di similitudini sono anch'esse similitudini (è una facile verifica).

Proposizione 7. *Se $f : X \longrightarrow Y$ è una similitudine e $(X, \leq)$ un insieme bene ordinato con $Y \subseteq X$, allora $x \leq f(x)$ per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Supponiamo che esista $x \in X$ tale che $f(x) < x$, allora, per il buon ordinamento, l'insieme degli elementi di questo tipo ha un minimo. Se quindi chiamiamo y quest'ultimo, si ha che $x < y \Rightarrow x \leq f(x)$. In particolare, poichè $f(y) < y$ allora $f(y) \leq f(f(y))$, ma vale anche $f(f(y)) < f(y)$ essendo f una similitudine, il che è assurdo. $\square$

Proposizione 8. *Siano* $(X, \leq)$ *e* $(Y, \leq')$ *due insiemi bene ordinati, allora se* $X \cong Y$ *esiste un'unica similitudine fra di loro.*

Dimostrazione. Supponiamo $g, h : X \longrightarrow Y$ siano due similitudini, allora $f := g^{-1} \circ h$ è dunque una similitudine $X \longrightarrow X$. Abbiamo quindi che $x \leq f(x) = g^{-1}(h(x))$ per $x \in X \Rightarrow g(x) \leq h(x)$ per ogni $x \in X$. Definendo ora $f' := h^{-1} \circ g$ e ragionando in maniera analoga si ottiene $h(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in X$ e dunque $g = f$. □

L'ipotesi di buon ordinamento è assolutamente necessaria, infatti se scegliamo $n \in \mathbb{Z}$ e consideriamo $f_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da $f_n(x) := x + n$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$ abbiamo una similitudine diversa dall'identità.

Proposizione 9. *Se* $(X, \leq)$ *è un insieme bene ordinato e* $a \in X$*, allora non esiste alcuna similitudine* $f : X \longrightarrow s(a)$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista una similitudine $f : X \longrightarrow s(a)$ per qualche $a \in X$. Quindi, poiché $s(a) \subseteq X$, si ha che $x \leq f(x)$ per ogni $x \in X$ e in particolare $a \leq f(a)$. Di conseguenza $f(a) \notin s(a)$ ma $Im(f) = \{y \in s(a) \text{ tali che } \exists x \in X \text{ tale che } y = f(x)\} \subseteq s(a)$. Assurdo. □

Osserviamo che anche qui il buon ordine è assolutamente necessario, infatti, dati $\mathbb{Z}_- := \{x \in \mathbb{Z} \text{ tali che } x \leq 0\}$ e $\mathbb{Z}_{--} := \mathbb{Z}_- \setminus \{0\}$, se prendiamo $f : \mathbb{Z}_- \longrightarrow \mathbb{Z}_{--}$ definita da $f(x) := x - 1$, si ha che questa è una similitudine.

Si vede inoltre che un insieme bene ordinato $(X, \leq)$ è simile a $(S_X, \subseteq)$ dove S_X è l'insieme di tutti i segmenti iniziali determinati da elementi di X: basta infatti definire $f : X \longrightarrow S_X$ mediante $f(x) = s(x)$.

4.5 Ordinali

Definizione 28. *Un* ordinale *è un insieme bene ordinato* $(X, \leq)$ *tale che ogni suo elemento coincide con il suo segmento iniziale, cioè* $s(x) = x$ *per ogni* $x \in X$.

Ci chiediamo, vista questa definizione spiazzante, di fatto quale sia la relazione d'ordine associata ad un ordinale. Ci accorgiamo tuttavia che la risposta è prodotto di pochi passaggi logici, infatti

$$\forall x, y \in X \;\; x < y \Leftrightarrow s(x) \subset s(y) \Leftrightarrow x \subset y$$

e anche

$$x < y \Leftrightarrow x \in s(y) = y \Leftrightarrow x \in y.$$

Quindi scrivere $<$ nel caso degli ordinali equivale a scrivere $\subset$ oppure $\in$.

Diamo subito qualche esempio per fissare le idee:

- $\emptyset$ è un ordinale detto *ordinale nullo*
- $\{\emptyset\}$ è un ordinale, infatti $s(\emptyset) = \emptyset$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ è un ordinale, infatti $s(\emptyset) = \emptyset, s(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ è ancora un ordinale

e possimo procedere identicamente per crearne altri. Potrebbe sembrare allora che, conoscendo un ordinale X, si possa ricavare un nuovo ordinale (vedremo poi dirsi *ordinale successore*) direttamente da X, infatti

Lemma 3. *Se X è un ordinale allora lo è anche $X \cup \{X\}$.*

Dimostrazione. Se $X = \emptyset$ si ha che $X \cup \{X\} = \{\emptyset\}$, che è un ordinale. Supponiamo ora $X \neq \emptyset$. X è un insieme bene ordinato quindi ogni suo sottinsieme non vuoto U ha un minimo elemento. Considerando ora $U' := U \cup \{X\}$, il minimo di U' coincide con il minimo di U essendo X strettamente maggiore di ogni suo elemento, quindi $X \cup \{X\}$ è bene ordinato. Ci rimane da dimostrare che $s(a) = a$ per ogni $a \in X \cup \{X\}$, ma

$$s_{X\cup\{X\}}(a) = \begin{cases} s_X(a) & \text{se } a \in X \\ X & \text{se } a = X. \end{cases}$$

□

Teorema 7. *Sia X un ordinale e sia a un suo elemento, allora $a = s(a)$ è un ordinale.*

Dimostrazione. Prendiamo $b \in s(a)$, allora

$$(s(a))(b) := \{x \in s(a) \text{ tale che } x < b\} = \{x \in X \text{ tale che } x < a \text{ e } x < b\}$$

$$= \{x \in X \text{ tale che } x < b\} = s(b) = b.$$

(l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che $b \in X$, che è un ordinale). □

Teorema 8. *Sia X un ordinale e Y un suo sottinsieme proprio ($Y \subset X$). Se Y è un ordinale, $Y = s(a)$ per qualche $a \in X$.*

Dimostrazione. Poichè $Y \subset X$ si ha che $X \setminus Y \neq \emptyset$, per cui poniamo $a = \min(X \setminus Y)$. Di conseguenza $s_X(a) \subseteq Y$. Per ogni $b \in Y \subset X$ abbiamo che $s_X(b) = b = s_Y(b)$, poiché sia X che Y sono ordinali. Distinguiamo allora due casi:

- $a < b \Rightarrow a \in s_X(b) = s_Y(b) \Rightarrow a \in Y$. Assurdo
- $b < a \Rightarrow b \in s_X(a)$, per cui $Y \subseteq s_X(a)$.

□

Proposizione 10. *Se X e Y sono due ordinali lo è anche $X \cap Y$.*

Dimostrazione. $a \in X \cap Y \Rightarrow s_X(a) = a = s_Y(a)$, cioè $a = \{x \in X \text{ tale che } x < a\} = \{x \in Y \text{ tale che } x < a\}$ da cui $a = \{x \in X \cap Y \text{ tale che } x < a\} = s_{X\cap Y}(a)$. □

Teorema 9. *Se X e Y sono due ordinali, si ha che uno è un segmento iniziale dell'altro. Inoltre, se $X \cong Y$ allora $X = Y$.*

Dimostrazione. Dimostriamo la prima asserzione. Se $X \subset Y$ o $Y \subset X$ abbiamo finito per il teorema 8. Se non è così, $X \cap Y$ è comunque un ordinale per la proposizione 10, quindi

$$\begin{cases} X \cap Y \subset X \Rightarrow X \cap Y = s_X(a),\ a \in X \\ X \cap Y \subset Y \Rightarrow X \cap Y = s_Y(b),\ b \in Y. \end{cases}$$

Inoltre

$$a = s_X(a) = X \cap Y = s_Y(b) = b$$

cioè $a = b$ e questo elemento sta in $X \cap Y$. Ma se $X \cap Y = s_X(a)$ si ha che $x \in X \cap Y \Rightarrow x \in a$. In particolare $a \in a$. Assurdo. Dunque sarà $X \subset Y$ oppure $Y \subset X$.

Per dimostrare la seconda affermazione basta osservare che, dal precedente risultato, abbiamo che se $X \neq Y$ uno fra X e Y è segmento iniziale dell'altro, ma per la proposizione 9 questo non è possibile, dunque $X = Y$. □

Quest'ultimo teorema ci dice che, dati due ordinali X e Y,

$$X \in Y \text{ o } Y \in X \text{ oppure } X = Y$$

cioè che la classe degli ordinali è totalmente ordinata.

Come accennato nel paragrafo sugli insiemi bene ordinati, possiamo finalmente dimostrare che ogni insieme bene ordinato è simile ad un ordinale.

Teorema 10. *Sia $(X, \leq)$ un insieme bene ordinato tale che $s(a)$ è simile ad un ordinale per ogni $a \in X$. Allora X è simile ad un ordinale.*

Dimostrazione. Per ogni $a \in X$ prendiamo una similitudine $g_a : s(a) \longrightarrow \overline{a}$, dove $\overline{a}$ è un ordinale, e notiamo che g_a e $\overline{a}$ sono unici per la proposizione 8 e per il teorema 9. Prendiamo ora una funzione f da X nella classe di tutti gli ordinali definita da $f(a) = g_a(s(a))$ per ogni $a \in X$. Chiamiamo Y l'immagine di f, che ordiniamo secondo $\subseteq$, e osserviamo che f è sicuramente ben definita per le osservazioni appena fatte.

Affermiamo a questo punto che $x < y \Rightarrow f(x) \subset f(y)$. Abbiamo infatti che $s_X(x) = (s_X(y))(x)$, perciò

$$g_y|_{s_X(x)} : s_X(x) \longrightarrow s_{\overline{y}}(g_y(x))$$

è una similitudine, inoltre, $s_{\overline{y}}(g_y(x))$ è un ordinale, poiché è contenuto propriamente nell'ordinale $\overline{y}$, quindi, per la proposizione 8, abbiamo che $\overline{x} \cong s_{\overline{y}}(g_y(x))$. Questa diventa un'uguaglianza grazie al teorema 9, per cui $\overline{x} \subset \overline{y}$.

Ricapitolando, abbiamo che f è una similitudine tra $(X, \leq)$ e $(Y, \subseteq)$, di conseguenza $(Y, \subseteq)$ è bene ordinato [3]; ci rimane solamente da dimostrare che è un ordinale.

Notiamo che, se $y \in X$, allora $\overline{y}$ è un ordinale, dunque se $x < y$ si ha che

$$\overline{x} = s_{\overline{y}}(g_y(x)) = g_y(x).$$

Segue che

$$s_Y(\overline{y}) = \{\overline{x} \in Y \text{ tali che } \overline{x} \subset \overline{y}\} = \{\overline{x} \in Y \text{ tali che } x < y\} =$$

$$= \{g_y(x) \text{ tali che } x < y\} = g_y(s_X(y)) = \overline{y}.$$

Y è dunque un ordinale. □

Teorema 11. *Ogni insieme bene ordinato è simile ad un unico ordinale.*

Dimostrazione. L'unicità segue direttamente dal teorema 9, ci manca solo l'esistenza.

Sia $(X, \leq)$ un insieme bene ordinato. Abbiamo intenzione di sfruttare il teorema 10, quindi ci basta provare che, per ogni $a \in X$, $s(a)$ è simile ad un ordinale.

Definiamo ora l'insieme

$$E = \{a \in X \text{ tali che } s(a) \text{ non è simile ad un ordinale}\}$$

e vogliamo dimostrare che E è l'insieme vuoto. Procediamo dunque per assurdo e supponiamo $E \neq \emptyset$. Poiché X è bene ordinato esiste $a = \min E$, di conseguenza, per ogni $x < a$, $s(x)$ è simile ad un ordinale. Abbiamo tuttavia che $(s(a))(x) = s(x)$ per ogni $x < a$, cioè ogni segmento iniziale in $s(a)$ è simile ad un ordinale, perciò, per il teorema precedente, anche $s(a)$ è simile ad un ordinale. Assurdo. □

[3] Che l'immagine tramite una similitudine di un insieme bene ordinato è bene ordinata è un rapido controllo.

Convenzionalmente gli ordinali vengono indicati con lettere greche minuscole e così decidiamo di fare anche noi; useremo tuttavia una simbologia specifica per alcuni ordinali particolari come vedremo tra poco.

Come abbiamo già accenato all'inizio di questo paragrafo, inoltre, possiamo distinguere gli ordinali in tre tipi diversi:

- l'*ordinale nullo*
- gli *ordinali successori*, del tipo $\alpha \cup \{\alpha\}$ per qualche ordinale α [4]
- gli *ordinali limite*, cioè ordinali non nulli che non siano successori.

Vedremo nel prossimo capitolo come questo possa influenzare seriamente lo studio di uno spazio topologico.

Teorema 12. *La classe $\mathcal{O}_n$ degli ordinali è bene ordinata.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C}$ una sottoclasse non vuota di $\mathcal{O}_n$; vogliamo dimostrare che esiste il minimo di $\mathcal{C}$. Prendiamo allora un ordinale $\alpha \in \mathcal{C}$. Se $\alpha = \min \mathcal{C}$ abbiamo finito, altrimenti definiamo l'insieme $A = \{\beta \in \mathcal{C} \text{ tali che } \beta < \alpha\}$. Abbiamo dunque che $A \neq \emptyset$, poiché $\alpha \neq \min \mathcal{C}$, e che $A \subseteq \alpha$, che è bene ordinato. Di conseguenza A ha un minimo elemento, che coincide proprio con $\min \mathcal{C}$.

Supponiamo per assurdo non sia così, cioè che $\min \mathcal{C} \neq \min A$; allora deve esistere $\gamma \in \mathcal{C}$ tale che $\gamma < \min A$, poiché, se esiste, il minimo di $\mathcal{C}$ è minore o uguale a $\min A$. Quindi $\gamma \in \mathcal{C}$ e $\gamma < \min A < \alpha \Rightarrow \gamma \in A$. Assurdo. $\square$

Grazie a questo teorema possiamo ora tirare le somme del nostro discorso.

Definizione 29. *Un ordinale $(X, \leq)$ si dice* ordinale finito *se X è un insieme finito.*

Definizione 30. *Diremo che un ordinale $(X, \leq)$ è un* ordinale infinito *se X è un insieme infinito, che è un* ordinale non numerabile *se X è un insieme non numerabile.*

Siamo sicuri che ordinali di questo genere esistono, poiché esistono insiemi finiti, insiemi infiniti e insiemi non numerabili [5]; ogni insieme inoltre può essere bene ordinato per il teorema 5 ed è simile ad un ordinale per il teorema 11.

---

[4] Sceglieremo, per pura comodità cerebrale, di indicare il successore di un ordinale α con la scrittura $\alpha + 1$, senza dimenticare che questo simbolo non indica altro che $\alpha \cup \{\alpha\}$.

[5] Un insieme non numerabile è, ad esempio, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Prendiamo dunque la classe degli ordinali infiniti e chiamiamo ω il suo elemento minimo: questo è il primo ordinale infinito, che può intuitivamente essere pensato come il primo ordinale che non sia un numero naturale. È quasi evidente che ω debba essere un ordinale limite , poiché come sappiamo, il successore di un numero naturale è ancora un numero naturale.

Analogamente possimo definire il primo ordinale non numerabile Ω, come il minimo elemento della classe degli ordinali non numerabili. Anche quest'ultimo è un ordinale limite, ma ne saremo persuasi con certezza nel prossimo capitolo. Per ora, quindi, fermiamoci qui.

Capitolo 5

Secondo controesempio

Questo capitolo è lo svolgimento dell'esempio 42 di [Ste78], con alcune implementazioni.

E' giunto il momento di riscuotere i frutti di una preparazione così lunga e scrupolosa. Costruiremo infatti in questo capitolo uno spazio topologico soddisfacente la compattezza per successioni, ma non quella per ricoprimenti; al contrario del secondo capitolo, tuttavia, ci verrà richiesta qui una concentrazione esageratamente maggiore nonché un'elasticità considerevole. Non dobbiamo comunque lasciarci spaventare, ma cogliere l'occasione per ammirare tante gemme matematiche riposte tutte nello stesso scrigno.

Iniziamo definendo X come l'insieme di tutti gli ordinali numerabili, che indichiamo con $[0,\Omega)$ ed equipaggiamo con la topologia ordinata τ. Procediamo poi studiandone la chiusura $[0,\Omega]$, cosa che ci permetterà di trarre numerose conclusioni sullo stesso X.

Teorema 13. *Sia (X,τ) uno spazio topologico, dove τ è la topologia ordinata. Se ogni sottinsieme di X ha un estremo inferiore e un estremo superiore in X, allora X è compatto.*

Dimostrazione. Dimostriamo che l'ipotesi è condizione necessaria e sufficiente affinché X sia compatto.

Condizione necessaria : Facciamo vedere che se vi fosse un sottinsieme $A \subseteq X$ privo di un estremo superiore in X, X non potrebbe essere compatto. Consideriamo a questo proposito l'insieme $B = \{\beta \in X \text{ tale che } \alpha < \beta \ \forall \alpha \in A\}$ e le famiglie $A_- = \{\ ]\leftarrow, \alpha[\text{ tale che } \alpha \in A\}$ e $B_+ = \{\ ]\beta, \rightarrow[\text{ tale che } \beta \in B\}$. Se definiamo ora $\mathcal{A} = A_- \cup B_+$, abbiamo che $\mathcal{A}$ ricopre interamente X. Dato $x \in X$, infatti, se per ogni $\alpha \in A$, $x \notin \,] \leftarrow, \alpha[$, allora $x \notin A$, ma se x non stesse neppure in alcuna semiretta $]\beta, \rightarrow [$, vorrebbe dire che $x = \sup A$. Quindi $\mathcal{A}$ è un ricoprimento aperto di X, da cui tuttavia non è estraibile alcun sottoricoprimento finito [1]. Si verifica analogamente che è necessario che ogni sottinsieme di X abbia un inf in X.

Condizione sufficiente : Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X; definiamo di conseguenza l'insieme
$S := \{y \in X$ tali che $] \leftarrow, y[$ è ricoperto da un numero finito di elementi di $\mathcal{A}\}$. Vogliamo dimostrare che $S = X$. Poniamo $\alpha := \sup S$ e notiamo che se $\alpha \in A \in \mathcal{A}$ allora $A \subseteq S$.

Se $\alpha = \sup X$ abbiamo finito, altrimenti esiste un intervallo $]x, y[\subseteq A$ tale che $\alpha \in \,]x, y[$. L'intervallo $]\alpha, y[$ non può però essere vuoto, poiché altrimenti si avrebbe $] \leftarrow, \alpha] \subseteq S$, ma allora $y \in S$. Assurdo.

□

E' chiaro che $[0, \Omega]$ soddisfa tutte queste condizioni ed è perciò compatto per ricoprimenti. Non possiamo tuttavia dire lo stesso per X: se X fosse compatto, infatti, dovrebbe pure essere chiuso in $[0, \Omega]$ poiché quest'ultimo è di Hausdorff [2]. Questo è però assurdo, poiché $\{\Omega\}$ non può essere un aperto in quanto Ω non è un ordinale successore.

Possiamo tuttavia ricavare un'altra informazione dal risultato precedente.

Dalla compattezza di $[0, \Omega]$ segue che ogni successione in $[0, \Omega]$ ammette un punto di accumulazione in $[0, \Omega]$. Quello che vogliamo far vedere è però che Ω non può essere punto di accumulazione di alcuna di queste successioni e quindi che anche X è numerabilmente compatto.

Consideriamo dunque $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow X$ e vogliamo far vedere che esiste un intorno di Ω che non contiene elementi della successione. Prendiamo dunque l'insieme $\mathcal{M} := \{[0, \alpha_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ e definiamo $M := \cup \mathcal{M}$, che è numerabile poiché unione numerabile di insiemi numerabili. Segue allora che $\mu := \max M < \Omega$ e $\alpha_n \leq \mu$ per ogni n, ma allora esiste $\gamma \in X$ tale che $\mu < \gamma < \Omega$, poichè Ω è un ordinale limite. Abbiamo quindi trovato un intorno di Ω non contenente punti della successione: basta prendere $[\gamma, \Omega]$.

Ricapitolando, abbiamo che (X, τ) è uno spazio topologico numerabilmente compatto ma non compatto, tuttavia quello che vogliamo ottenere

---

[1] Se vi fosse un sottoricoprimento finito, corrisponderebbe ad un insieme $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_r\}$ dunque A avrebbe un massimo.

[2] Dati $\alpha, \beta \in [0, \Omega]$ con $\alpha < \beta$ si ha che $] \leftarrow, \alpha + 1[$ e $]\alpha, \rightarrow [$ sono due aperti disgiunti contenenti α e β ripettivamente.

è che è pure sequenzialmente compatto. Potremmo però concludere il discorso se il nostro spazio topologico soddisfacesse il Primo Assioma di Numerabilità...e fortunatamente è proprio così!

Verifichiamo dunque quest'ultima condizione, elencando per ogni ordinale la base d'intorni corrispondente.

- Se α è l'*ordinale nullo* avremo che $\mathcal{B}(\alpha) = \{[0, 1[\} = \{0\}$
- Se α è un *ordinale successore* si ha che $\mathcal{B}(\alpha) = \{]\alpha - 1, \alpha + 1[\} = \{\alpha\}$
- Se α è un *ordinale limite* la questione è un po' più delicata. Affermiamo che $\mathcal{B}(\alpha) = \{\ ]\beta, \alpha + 1[$ tale che $\beta < \alpha\}$ è una base per il filtro degli intorni di α.
  Infatti, se U è un intorno di α devo poter trovare in $\mathcal{B}(\alpha)$ un altro intorno che sia contenuto in U.
  Prendiamo un elemento $\gamma \in U$:
  - Se $\gamma < \alpha$ si ha che $]\gamma, \alpha + 1[\ \subseteq U$
  - Se $\alpha < \gamma$ si ha che $\exists \beta < \alpha$ tale che $]\beta, \gamma[\ \subseteq U$, o meglio ancora, $]\beta, \alpha + 1[\ \subseteq U$

Ogni ordinale in X, proprio perché numerabile, ha quindi una base di intorni numerabile. Possiamo di conseguenza concludere finalmente il nostro controesempio, grazie alla proposizione 2.

Capitolo 6

Terzo controesempio

Questo capitolo è lo svolgimento dell'esercizio 48 di [Ste78], con alcune aggiunte.

Nonostante fino ad ora abbiamo considerato spazi topologici in cui le tre definizioni di compattezza non sono equivalenti, vogliamo ora mostrare che è possibile trovare spazi non metrizzabili, che risultino tuttavia sia compatti per ricoprimenti che per successioni (e di conseguenza pure numerabilmente compatti).

Consideriamo dunque l'insieme $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che } 0 \leq x, y \leq 1\}$, ovvero il quadrato unitario nel piano, che ordiniamo come segue:

$$(x, y) < (z, t) \Leftrightarrow x < z \text{ oppure } x = z \text{ e } y < t.$$

Questa relazione d'ordine è detta *ordine lessicografico*.
In sostanza un punto P di X risulta minore di un altro punto Q se si trova più in basso o a sinistra di Q.

Vediamo che, per definizione di ordine lessicografico, $(X, <)$ risulta un insieme totalmente ordinato; possiamo dunque equipaggiare X con la topologia ordinata τ relativa a $<$.
Mostreremo che, pur non essendo (X, τ) uno spazio topologico metrizzabile, esso è compatto e sequenzialmente compatto.

Mostriamo per prima cosa che (X, τ) soddisfa il primo assioma di numerabilità, infatti

- $\mathcal{B}((0,0)) = \{[(0,0), (0, \frac{1}{n})[\text{ tale che } n \in \mathbb{N}^*\}$
- $\mathcal{B}((1,1)) = \{](1, 1 - \frac{1}{n}), (1,1)] \text{ tale che } n \in \mathbb{N}^*\}$

- $\mathcal{B}((x,0)) = \{](x-\frac{1}{n},1),(x,\frac{1}{n})[$ tale che $n \in \mathbb{N}$ e $\frac{1}{n} < x\}$
- $\mathcal{B}((x,1)) = \{](x,1-\frac{1}{n}),(x+\frac{1}{n},0)[$ tale che $n \in \mathbb{N}$ e $\frac{1}{n} < 1-x\}$
- $\mathcal{B}((x,y)) = \{](x,y-\frac{1}{n}),(x,y+\frac{1}{n})[$ tale che $n \in \mathbb{N}$ e $\frac{1}{n} < min(y,1-y)\}$

che sono tutte evidentemente numerabili.

Per assicurarci della compattezza di (X,τ) sfruttiamo il teorema 13, dobbiamo prima però verificare che l'ipotesi sia soddisfatta.

Consideriamo un sottinsieme $A \subseteq X$ e dimostriamo che esiste $\sup A$ in X. Definiamo $A_x = \pi_x(A) = \{x \in [0,1]$ tali che $(x,y) \in A\}$. Sappiamo che A_x ha un estremo superiore in $[0,1]$, poiché questo è chiuso e limitato. Chiamiamo dunque λ il sup di A_x e studiamo l'intersezione di A con $\pi_x^{-1}(\lambda)$, che chiamiamo A_λ.

Consideriamo ora due casi:

$A_\lambda \neq \emptyset$: Abbiamo che $\pi_y(A_\lambda)$ ha un sup in $[0,1]$ che chiamiamo μ. Segue che $(\lambda,\mu) = \sup A$.

$A_\lambda = \emptyset$: Abbiamo che $\sup A = (\lambda, 0)$, infatti

- $(x,y) \in A \Rightarrow x < \lambda \Rightarrow (x,y) < (\lambda,0)$.
- Se esiste (λ',μ') tale che $(x,y) < (\lambda',\mu')$ per ogni $(x,y) \in A$ si ha che $\lambda \leq \lambda'$, poiché $\lambda = \sup A_x$, dunque $(\lambda,0) \leq (\lambda',\mu')$.

Per verificare che ogni sottinsieme di X ha un inf si procede alla stessa maniera.

(X,τ) è dunque uno spazio compatto che soddisfa il primo assioma di numerabilità, quindi è pure sequenzialmente compatto.

Rimane solamente da dimostrare che il nostro spazio topologico non è metrizzabile. Diamo dunque un paio di definizioni che ci serviranno molto presto.

Definizione 31. *Uno spazio topologico (X,τ) si dice* separabile *se esiste un sottinsieme denso in X che sia numerabile.*

La retta reale, ad esempio, è un insieme separabile, infatti l'insieme dei razionali è denso in $\mathbb{R}$ ed è notoriamente numerabile.

Lemma 4. *In uno spazio separabile ogni famiglia di sottinsiemi aperti disgiunti è numerabile.*

Dimostrazione. Consideriamo uno spazio topologico separabile (X, τ) e una famiglia $\mathcal{A}$ di sottinsiemi aperti disgiunti di X. Sia ora D un sottinsieme numerabile denso in X che, dunque, ha intersezione non vuota con ogni elemento di $\mathcal{A}$.

Definiamo ora la funzione $f : D \longrightarrow \mathcal{A}$ mediante $f(x) = A \Leftrightarrow x \in A$. Vediamo per prima cosa che è ben definita, infatti

$$\begin{cases} f(x) = A \\ f(x) = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \Rightarrow A = B$$

poiché $\mathcal{A}$ è una famiglia di aperti disgiunti. Affermiamo poi che f è suriettiva, infatti

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap D \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in D \text{ tale che } x \in A \Rightarrow \exists x \in D \text{ tale che } f(x) = A.$$

Abbiamo quindi trovato una funzione suriettiva $D \longrightarrow \mathcal{A}$, grazie a cui esiste una funzione suriettiva $\mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{A}$, che è perciò numerabile.

□

Vediamo come sfruttare quest'ultima.

Definiamo $I_x := \{(x, y) \in X \text{ tale che } \frac{1}{4} < y < \frac{3}{4}\}$ per ogni $x \in [0, 1]$ e consideriamo la classe $\mathcal{I} := \{I_x \text{ tale che } x \in [0, 1]\}$. Quest'ultima è evidentemente una famiglia non numerabile di aperti disgiunti di X, che non può dunque essere separabile.

Concludiamo, quindi, che X non è metrizzabile essendo compatto e non separabile, grazie alla seguente:

Proposizione 11. *Uno spazio topologico (X, τ) che sia metrizzabile e compatto è anche separabile.*

Dimostrazione. Sia d una distanza su X che induce la topologia τ. Definiamo per ogni $\epsilon > 0$ l'insieme $\mathcal{B}_\epsilon(X) := \{B(x, \epsilon)\}_{x \in X}$, cioè l'insieme delle palle aperte di raggio fissato ϵ, che risulta un ricoprimento aperto di X. Si può allora, per ogni $\epsilon > 0$, estrarre da $\mathcal{B}_\epsilon(X)$ un sottoricoprimento finito $\mathcal{B}_\epsilon$, poiché X è compatto. In particolare, per ogni numero naturale positivo n, esistono $s(n)$ e $\{x_{n,1}, \ldots, x_{n,s(n)}\}$ tali che

$$\bigcup_{i=1}^{s(n)} B(x_{n,i}, \frac{1}{n}) = X.$$

Definiamo di conseguenza $D = \{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,\ldots,s(n) \\ n \in \mathbb{N}^*}}$.

L'insieme D è un insieme evidentemente denso in X ed è anche numerabile essendo unione numerabile di insiemi finiti. □

Bibliografia

[Dem86] D. C. Demaria. *Topologia generale Vol.2.* Tirrenia, 1986.

[Dev93] K. Devlin. *The joy of sets.* Springer-Verlag, 1993.

[Hal98] P. R. Halmos. *Naive set theory.* Springer-Verlag, 1998.

[Kow65] H. J. Kowalsky. *Topological spaces.* Academic Press, 1965.

[Lip71] S. Lipschutz. *Topologia.* Etas Libri, 1971.

[Ser01] E. Sernesi. *Geometria 2.* Bollati Boringhieri, 2001.

[Ste78] J. A. Seebach Jr; L. A. Steen. *Counterexamples in topology.* Springer-Verlag, 1978.

Indice analitico