
Funktionentheorie II

Sommersemester 2022

Übungsblatt 1

(1) Sei L ein Gitter in \mathbb{C} und sei

$$K(L) := \{f \text{ ist elliptische Funktion bzgl. } L\}.$$

Zeigen Sie:

- (a) $K(L)$ ist ein Körper, der \mathbb{C} als Unterkörper enthält.
- (b) Mit $f \in K(L)$ ist auch $f' \in K(L)$.

(2 Punkte)

(2) Sei $L = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ ein Gitter in \mathbb{C} , mit halboffenem Fundamentalparallelogramm

$$P := \{\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 : 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < 1\},$$

und sei $f \in K(L)$.

Zeigen Sie: Ist f nicht konstant, so nimmt f in P jeden Wert aus $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gleich oft an (unter Berücksichtigung von Vielfachheiten).

(2 Punkte)

(3) Zeigen Sie: Für jedes Gitter $L \subset \mathbb{C}$ und $k > 2$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^k}$$

absolut. Hingegen ist $\sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^2}$ divergent.

(3 Punkte)