Michael Baake
Claudia Alfes-Neumann
Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld

Bielefeld, 19.04.2022

Funktionentheorie II

Sommersemester 2022

Übungsblatt 3

(9) Zeigen Sie, dass die Funktionen g_2 und g_3 auf H holomorph sind (Vervollständigung der Beweisskizze aus der Vorlesung).

(3 Punkte)

(10) Beweisen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} \mathfrak{P}(z) & \mathfrak{P}'(z) & 1 \\ \mathfrak{P}(u) & \mathfrak{P}'(u) & 1 \\ \mathfrak{P}(z+u) & -\mathfrak{P}'(z+u) & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Hinweis: Setzen Sie zunächst $z+u=v$, betrachten Sie die Determinante als Funktion von z, und argumentieren Sie mit den Nullstellen dieser Funktion.

(3 Punkte)

(11) Sei $L = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ ein Gitter, und sei f eine ganze Funktion ohne Nullstellen.

Es gelte $f(z+\omega_1) = a \cdot f(z)$ und $f(z+\omega_2) = b \cdot f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, mit festen Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$, $a \cdot b \neq 0$.

Zeigen Sie: Dann gibt es Zahlen $A, B \in \mathbb{C}$ mit $A \neq 0$ und $f(z) = A \cdot e^{Bz}$.

(2 Punkte)

(12) Sei $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ gegeben durch $z \mapsto f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, und sei $\mathcal{G}_0$ die Gruppe der invertierbaren Abbildungen dieser Art. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} SL(2,\mathbb{C}) &\to \mathcal{G}_0 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Ermitteln Sie den Kern K, und charakterisieren Sie $\mathcal{G}_0$ als Faktorgruppe.

Betrachten Sie nun

$$\mathcal{G} = \left\{ f : f \in \mathcal{G}_0 \vee f(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \right\}$$

und charakterisieren Sie $\mathcal{G}$.

(2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 22.04.2022, 12 Uhr!