Michael Baake
Claudia Alfes-Neumann
Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld

Bielefeld, 26.04.2022

# Funktionentheorie II

## Sommersemester 2022

## Übungsblatt 4

**(13)** Es sei $H$ die obere Halbebene und $G := \{z \in H : |z| > 1\}$. Zeigen Sie, dass $z \longmapsto z+\frac{1}{z}$ einen analytischen Isomorphismus zwischen $G$ und $H$ definiert.

Was passiert am Rand?

Was entlang der imaginären Achse? **(3 Punkte)**

**(14)** Sei $\tau \in \mathbb{H} = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ und $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Wir setzen $M\tau := \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$.
Zeigen Sie, dass $\mathrm{Im}(M\tau) = \frac{\mathrm{Im}(\tau)}{|c\tau+d|^2}$ gilt und leiten Sie ab, dass die Vorschrift

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ (M,\tau) &\longmapsto M\tau \end{aligned}$$

eine Gruppenoperation von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}$ definiert, die transitiv ist.

**(2 Punkte)**

**(15)** Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ von den Matrizen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.

**Hinweis:** z.B.: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ und Induktion nach $|c|$ für $M \in \langle T, S \rangle$.

**(3 Punkte)**

**(16)** Seien $c, d \in \mathbb{Z}$ teilerfremd. Dann gibt es Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, so dass $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

(Dies ist als *Ergänzungslemma* bekannt.)

**(2 Punkte)**

**(17)** Berechnen Sie den Stabilisator von i in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, also die Gruppe
$\mathrm{stab}(\mathrm{i}) = \{M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) : M\mathrm{i} = \mathrm{i}\}$

**(2 Punkte)**

Abgabe bis Freitag, 29.04.2022, 12 Uhr!