Michael Baake
Claudia Alfes-Neumann
Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld

Bielefeld, 09.05.2022

Funktionentheorie II

Sommersemester 2022

Übungsblatt 6

(22) In $\mathbb{C}^2$ betrachten wir eine Quadrik der Form

$$Q = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = f(u)\}$$

wobei f ein quadratisches Polynom sei.

(a) Unter welchen Bedingungen an f ist Q singularitätenfrei?
Warum genügt es dann, Polynome der Form $(u - \alpha)(u - \beta)$ mit $\alpha \neq \beta$ zu betrachten?

(b) Zeigen Sie mittels einer affinen Transformation des $\mathbb{C}^2$, dass es im singularitätenfreien Fall genügt, die Quadrik

$$Q' = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : \, u^2 + v^2 = 1\}$$

zu betrachten.

(c) Zeigen Sie, dass $z \longmapsto \varphi(z) = \big(\cos(z), \sin(z)\big)$ eine surjektive und lokal injektive, holomorphe Abbildung von $\mathbb{C}$ auf Q' definiert. Wie kann man sie injektiv machen?

(1+1+2 Punkte)

(23) Es seien γ und η zwei Kurven in $\mathbb{C}$, die sich im Punkt z_0 schneiden und dort beide differenzierbar sind. Bezeichne ϑ den Winkel zwischen den Tangenten.
Sei nun U eine Umgebung von z_0 und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, mit $f'(z_0) \neq 0$.

Zeigen Sie: Die Kurven $f \circ \gamma$ und $f \circ \eta$ schneiden sich in $f(z_0)$, ebenfalls unter dem Winkel ϑ.

Hinweis: Wählen Sie eine geschickte Version des Skalarprodukts und legen Sie ϑ durch sin und cos fest.

(2 Punkte)

(24) Eine Abbildung, die Winkel erhält, nennt man *konform*. Aus Aufgabe 23 lernen wir also, dass holomorphe Funktionen mit nicht-verschwindender Ableitung konform sind.

Somit ist jeder analytische Isomorphismus konform (warum?), aber nicht umgekehrt. Zeigen Sie dies mit einem konkreten Beispiel.

(1 Punkt)

Abgabe bis Freitag, 13.05.2022, 12 Uhr!