Michael Baake
Claudia Alfes-Neumann
Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld

Bielefeld, 01.06.2022

Funktionentheorie II

Sommersemester 2022

Übungsblatt 10

(38) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, und $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(G)$ eine normale Funktionenfamilie.

Zeigen Sie: Dann ist $\mathcal{F}$ in G lokal beschränkt.

(2 Punkte)

(39) Sei $\mathcal{F}$ normal in G, und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\{f^{(k)} : f \in \mathcal{F}\}$ normal in G ist.

Hinweis: Cauchy-Ungleichung.

(2 Punkte)

(40) Beweisen Sie folgendes Konvergenzlemma:

Sei $D = \{|z| < 1\}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine auf D beschränkte Folge holomorpher Funktionen. Dann ist die Funktionenfolge genau dann kompakt konvergent, wenn $\big(f_n^{(k)}(0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ konvergiert.

Hinweis: Für die Rückrichtung darf o.B.d.A. angenommen werden, dass $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{z\in D} |f_n(z)| \leq 1$. Betrachten Sie nun die Taylorreihen der f_n auf $B_r(0)$ mit $0 < r < 1$.

(3 Punkte)

(41) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, g holomorph auf G, und es gebe ein $c \in G$, wo die Reihe $g(z) + g'(z) + g''(z) + \cdots + g^{(n)}(z) + \cdots$ konvergiert. Zeigen Sie:

Dann ist g eine ganze Funktion und die Reihe konvergiert kompakt in $\mathbb{C}$.

(2 Punkte)

(42)* Es bezeichne Q_d das d-te Kreisteilungspolynom aus der Vorlesung.

Zeigen Sie:

(a) $\deg(Q_d) = \varphi(d)$, wobei φ die Euler'sche φ-Funktion bezeichnet;

(b) $z^n - 1 = \prod\limits_{d\,|\,n} Q_d(z)$;

(c) Q_d besitzt ganzzahlige Koeffizienten;

(d) Berechnen Sie Q_d für $d \leq 10$. Hier sind alle Koeffizienten aus $\{-1, 0, 1\}$. Wie sieht das allgemein aus?

(3 Punkte)

(43) Berechnen Sie das logarithmische Mahler-Maß für folgende Polynome:

(a) $x^3 - 2x^2 + 1$;

(b) $x^3 - x$;

(c) $2 + x + y$.

(2 Punkte)

Hinweis: Bei (c) kann man die Formel von Jensen zweimal einsetzen.

Abgabe bis Freitag, 10.06.2022, 12 Uhr!