Michael Baake
Claudia Alfes-Neumann
Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld

Bielefeld, 22.06.2022

Funktionentheorie II

Sommersemester 2022

Übungsblatt 13

(53) Beweisen Sie die kompakte Konvergenz einer gegebenen Dirichlet-Reihe in $\{\mathrm{Re}(s) > \sigma_c\}$. **(2 Punkte)**

(54) Sei $0 < a \leq 1$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$. Zeigen Sie:

$$\Gamma(s)\zeta(s,a) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

(3 Punkte)

(55) Ist $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{C}$ stetig und beschränkt, so heißt

$$F(s) := \mathcal{L}\{f\}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t \quad \text{mit} \quad s \in H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$$

die *Laplace-Transformierte* von f. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) $\mathcal{L}\{\frac{t^n}{n!}\, e^{-\alpha t}\}(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}_0, \alpha > 0)$

(b) $\mathcal{L}\{af + bg\} = a\mathcal{L}\{f\} + b\mathcal{L}\{g\}$

(c) Ist $f \in C^n(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ mit $n \geqslant 1$ und $F = \mathcal{L}\{f\}$, so gilt

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

(d) Es gilt der Faltungssatz:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}, \text{ wobei } (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

(1+1+2+2 Punkte)

(56) Die *Volterra'sche Faltungsgleichung* 1. Art lautet

$$\int_0^t k(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)$$

und spielt in der Signaltheorie eine Rolle. Bei gegebenen Funktionen k und f wird die Funktion x gesucht.

Lösen Sie diese Gleichung für folgenden Fall:

$$k(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1\,, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0\,, \\ 1 - e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1\,, \\ e^{1-t}(1-\frac{1}{e}), & t > 1\,. \end{cases}$$

Hinweis: Setzen Sie die Laplace-Transformation ein, sowie deren Eigenschaften aus der vorigen Aufgabe.

(3 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 01.07.2022, 12 Uhr!