

Funktionentheorie II

Sommersemester 2022

Übungsblatt 14

(57) Zeigen Sie, dass

$$E_4(z)^2 = E_8(z)$$

gilt und leiten Sie damit folgende Beziehung zwischen Teilersummenfunktionen her

$$\sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m) = \frac{\sigma_7(n) - \sigma_3(n)}{120}.$$

(2 Punkte)

(58) Wir definieren die Eisensteinreihe vom Gewicht 2 durch

$$G_2(z) = \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(mz + n)^2}.$$

Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{H}$ und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt, dass

$$G_2\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^2 G_2(z) - 2\pi ic(cz + d).$$

Hinweis: Betrachten Sie

$$G_{2,\varepsilon}(z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(mz + n)^2 |mz + n|^{2\varepsilon}}, \quad z \in \mathbb{H}, \varepsilon > 0,$$

und zeigen Sie, dass $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_{2,\varepsilon}(z) = G_2(z) - \pi/(2 \operatorname{Im}(z))$. Ersetzen Sie dazu für $m \neq 0$ die Summe über n durch ein Integral und betrachten Sie die Differenz.

(3 Punkte)

(59) Zu $z \in \mathbb{H}$ definieren wir die η -Funktion

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi iz}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 58, dass für alle $\tau \in \mathbb{H}$ gilt, dass

$$\eta(\tau + 1) = e^{\frac{2\pi i}{24}} \eta(\tau) \quad \text{und} \quad \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}} \eta(\tau).$$

(Hierbei wählt man den Zweig der Wurzel, der für positive Argumente selbst positiv wird.)

Hinweis: Betrachten Sie $\frac{\eta'}{\eta}$ und beachten Sie, dass sich die Fourier-Darstellung von G_k auf den Fall $k = 2$ erweitern lässt. **(3 Punkte)**

(60) Sei $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\varphi : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}), \quad M \mapsto \overline{M},$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\mathrm{Kern}\varphi = \Gamma(N)$. Die Faktorgruppe $\Gamma/\Gamma(N)$ ist isomorph zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Insbesondere ist $\Gamma(N)$ eine Untergruppe von endlichem Index in Γ .

(2 Punkte)