

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ABN7435

UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 12/08/92 CC STAT mm E/L 1

010: : |a 03012895//r85

035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B46866

035/2: : |a (CaOTULAS)160036611

040: : |a DLC/ICU |c ICU |d MiU

041:1 : |a ger |h frelat

050/1:0 : |a QA535 |b .E88

100:1 : |a Euler, Leonhard, |d 1707-1783.

245:00: |a Zwei abhandlungen über sphärische trigonometrie. |b Grundzüge der sphärischen trigonometrie und Allgemeine sphärische trigonometrie 1753 und 1779. |c Von Leonhard Euler. Aus dem französischen und lateinischen übers. und hrsg. von E. Hammer. Mit 6 figuren im text.

260: : |a Leipzig, |b W. Engelmann, |c 1896.

300/1: : |a 65, [1] p. |b diagr. |c 20 cm.

440/1: 0: |a Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. |v nr. 73

500/1: : |a Original titles: I. Principes de la trigonométrie sphérique, tirés de la méthode des plus grands et plus petits; mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres (Berlin), classe de philosophie experimentale, tome 9, année 1753. [Berlin, 1755]--II. Trigonometria sphaerica universa, ex primis principiis breviter et dilucide derivata; Acta Academiae

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____

Camera Operator: _____

Ankündigung.

Der grossartige Aufschwung, welchen die Naturwissenschaften in unserer Zeit erfahren haben, ist, wie allgemein anerkannt wird, nicht zum kleinsten Maasse durch die Ausbildung und Verbreitung der Unterrichtsmittel, der Experimentalvorlesungen, Laboratorien u. s. w., bedingt. Während aber durch die vorhandenen Einrichtungen zwar die Kenntniss des gegenwärtigen Inhaltes der Wissenschaft auf das erfolgreichste vermittelt wird, haben hochstehende und weitblickende Männer wiederholt auf einen Mangel hinweisen müssen, welcher der gegenwärtigen wissenschaftlichen Ausbildung jüngerer Kräfte nur zu oft anhaftet. Es ist dies das Fehlen des historischen Sinnes und der Mangel an Kenntniss jener grossen Arbeiten, auf welchen das Gebäude der Wissenschaft ruht.

Diesem Mangel soll durch die Herausgabe der Klassiker der exakten Wissenschaften abgeholfen werden. In handlicher Form und zu billigem Preise sollen die grundlegenden Abhandlungen der gesammten exakten Wissenschaften den Kreisen der Lehrenden und Lernenden zugänglich gemacht werden. Es soll dadurch ein Unterrichtsmittel beschafft werden, welches das Eindringen in die Wissenschaft gleichzeitig belebt und vertieft. Dasselbe ist aber auch ein Forschungsmittel von grosser Bedeutung. Denn in jenen grundlegenden Schriften ruhten nicht nur die Keime, welche inzwischen sich entwickelt und Früchte getragen haben, sondern es ruhen in ihnen noch zahllose andere Keime, die noch der Entwicklung harren, und dem in der Wissenschaft Arbeitenden und Forschenden bilden jene Schriften eine unerschöpfliche Fundgrube von Anregungen und fördernden Gedanken.

Die Klassiker der exakten Wissenschaften sollen ihrem Namen gemäss die rationellen Naturwissenschaften, von der Mathematik bis zur Physiologie umfassen und werden Abhandlungen aus den Gebieten der Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie einschliesslich Krystallkunde) und Physiologie enthalten.

Die allgemeine Redaktion führt von jetzt ab Professor Dr. Arthur von Oettingen (Leipzig); die einzelnen Ausgaben werden durch hervorragende Vertreter der betreffenden Wissenschaften besorgt werden. Die Leitung der einzelnen Abtheilungen übernehmen: für Astronomie Prof. Dr. Bruns (Leipzig), für Mathematik Prof. Dr. Wangerin (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. Groth (München), für Pflanzenphysiologie Prof. Dr. W. Pfeffer (Leipzig), für Chemie Prof. Dr. W. Ostwald (Leipzig).

Um die Anschaffung der Klassiker der exakten Wissenschaften Jedem zu ermöglichen und ihnen weiteste Verbreitung zu sichern, ist der Preis für den Druckbogen à 16 Seiten von jetzt an auf *M* —.25 festgesetzt worden. Textliche Abbildungen und Tafeln jedoch machen eine entsprechende Preiserhöhung erforderlich.

Fortsetzung auf der dritten Seite des Umschlages.

Alexander Ziwief

Zwei Abhandlungen

über

SPHÄRISCHE TRIGONOMETRIE.

Grundzüge der sphärischen Trigonometrie

und

Allgemeine sphärische Trigonometrie

1753 und 1779.

Von

LEONHARD EULER.

Aus dem Französischen und Lateinischen übersetzt
und herausgegeben

von

E. Hammer.

Mit 6 Figuren im Text.



LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1896.

I.

Grundzüge der sphärischen Trigonometrie.

Abgeleitet nach der Methode der grössten
und kleinsten Werthe.

Von

L. Euler.

Bekanntlich stellt ein einer Kugeloberfläche angehörender Grosskreisbogen den kürzesten Weg dar, der auf dieser Fläche zwischen zwei beliebigen Punkten des Bogens vorhanden ist. Ein sphärisches Dreieck kann also auf folgende Art definirt werden: denkt man sich auf der Oberfläche einer Kugel drei Punkte gegeben und zwischen je zweien die kürzeste der Fläche angehörende Linie gezogen, so ist das durch diese drei Linien begrenzte Stück der Kugeloberfläche ein sphärisches Dreieck. Die Methode der grössten und kleinsten Werthe wird, da die Seiten eines sphärischen Dreiecks kürzeste Linien sind, zur Bestimmung dieser Seiten tauglich sein; sodann wird man die Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln aufstellen können und gerade diese sind der Gegenstand der sphärischen Trigonometrie. Denn mit den drei Punkten, die als Ecken des Dreiecks gegeben sind, sind sowohl die drei Seiten als die drei Winkel des Dreiecks bestimmt, und diese sechs Stücke stehen derart in Beziehung zu einander, dass, wenn drei beliebige von ihnen gegeben sind, die drei andern bestimmt werden können.

Diese Eigenschaft haben die sphärischen Dreiecke mit den ebenen, die die elementare Trigonometrie auflösen lehrt, gemeinsam. Ein ebenes Dreieck ist ein Stück einer Ebene, das durch drei auf dieser Ebene bezeichnete Punkte dadurch gegeben ist, dass man diese drei Punkte paarweise durch

kürzeste Linien, d. h. in der Ebene gerade Linien, verbindet. Ganz ebenso ist ein sphärisches Dreieck das Stück einer Kugelfläche, das durch drei auf dieser Fläche bezeichnete Punkte dadurch gegeben wird, dass man diese drei Punkte paarweise durch die kürzesten Linien verbindet, die auf der Kugelfläche gezogen werden können. Das sphärische Dreieck geht in ein ebenes über, wenn der Halbmesser der Kugel unbegrenzt wächst; eine Ebene kann als Kugelfläche von unendlich grossem Halbmesser angesehen werden.

Ohne Zweifel wird man einwenden, dass es methodischen Regeln zuwiderlaufe, wenn man die Infinitesimalrechnung zur Herleitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie gebrauchen wolle; ganz abgesehen davon, dass es unnöthig erscheine, diese Grundlagen noch auf neuen Wegen festzustellen, da doch die, denen man seither gefolgt ist, sich auf die Elementargeometrie gründen und die Strenge dieses Zweiges der Mathematik anderen Abschnitten als Muster diene. Allein dagegen habe ich erstens zu bemerken, dass die Methode der grössten und kleinsten Werthe ein neues Interesse gewinnt, wenn gezeigt wird, dass man mit ihrer Hilfe allein zur Auflösung der sphärischen Dreiecke gelangen kann; und sodann ist es immer von Nutzen, auf verschiedenen Wegen dieselben Wahrheiten zu erreichen, da aus diesem Verfahren sich stets neue Gesichtspunkte ergeben.

Ausserdem ist aber daran zu erinnern, dass jene Methode der grössten und kleinsten Werthe viel allgemeiner ist, als das sonst übliche Verfahren. Denn dieses beschränkt sich auf die Behandlung von Dreiecken, die einer Ebene oder einer Kugelfläche angehören, während jene Methode ganz ebenso auf beliebige Oberflächen angewandt werden kann; wenn man die Dreiecke untersuchen will, die auf einer beliebigen sphäroidischen oder conoidischen Fläche dadurch gebildet werden, dass man ihre drei Eckpunkte annimmt, während ihre Seiten die drei kürzesten der Oberfläche angehörenden Linien zwischen je zweien dieser drei Punkte bilden sollen, so versagt die gewöhnliche Methode für diese Untersuchung, man muss vielmehr hier dann unbedingt die Methode der grössten und kleinsten Werthe benutzen, ohne die selbst die Natur der Dreiecksseiten (jener drei kürzesten Linien) nicht zu erkennen wäre. Die Wichtigkeit dieser Art der Untersuchung leuchtet ein: die Oberfläche der Erde ist nicht sphärisch, sondern sphäroidisch, ein der Erdoberfläche angehörendes Dreieck ist demnach von der eben

besprochenen Art. Man hat sich, um dies einzusehen, nur drei Punkte auf der Erdoberfläche angenommen zu denken und sie paarweise durch die kürzesten Linien zu verbinden, die zwischen je zweien auf der sphäroidischen Fläche gezogen werden können (diese Linien kann man sich durch Fäden, die von einem zum andern Punkt gespannt werden, versinnlichen). In dieser Art hat man sich die Dreiecke vorzustellen, die bei den Triangulationen zu Erdmessungszwecken gebildet werden. Freilich betrachtet man diese Dreiecke gewöhnlich als eben und geradlinig, höchstens werden sie sphärisch berechnet; wenn man sie aber sehr viel grösser machen könnte und ihre Berechnung mit der äussersten möglichen Genauigkeit durchzuführen hätte, so müsste man ohne Zweifel die wirkliche Natur dieser Dreiecke feststellen und könnte dies nur mit Hilfe der mehrfach angedeuteten Methode.

Diesem Ausblick auf die geodätische Wichtigkeit der Methode entsprechend wird es angezeigt sein, sie auch zur Auflösung der sphärischen Dreiecke zu verwenden; denn einmal wird die Untersuchung auch als Grundlage für die Auflösung der einer beliebigen sphäroidischen Oberfläche angehörenden Dreiecke dienen können, und auf der andern Seite wird sie bemerkenswerthe Ergebnisse liefern, sowohl für die sphärische Trigonometrie selbst, als auch für die Methode der grössten und kleinsten Werthe, deren Ausdehnung und Nutzen mehr und mehr erkannt werden wird. Seitdem gezeigt worden ist, dass die meisten mechanischen und physikalischen Probleme bei Anwendung dieser Methode sich sehr einfach gestalten, kann auch der Nachweis dafür, dass dieselbe Methode eine so wesentliche Förderung der Auflösung der Aufgaben der reinen Geometrie liefert, nur mit Freuden begrüsst werden.

Um die Untersuchung auf eine Art zu beginnen, die sie sowohl für den Fall der Kugel als auch für ein beliebiges Sphäroid anwendbar macht, mögen zunächst zwei, sich diametral gegenüberliegende Punkte der Kugeloberfläche als Pole und der von beiden gleich weit abstehende Grosskreis als Aequator angesehen werden; die kürzesten Linien, die von einem der Pole nach beliebigen Punkten des Aequators gezogen werden können, stellen Meridiane dar, die den Aequator senkrecht schneiden. Wenn es sich um eine Kugeloberfläche handelt, so kann man auf ihr ein aus kürzesten Linien gebildetes Dreieck stets so legen, dass eine der Seiten als Theil des Aequators erscheint; und wenn das Dreieck rechtwinklig

ist, so kann die eine der den rechten Winkel einschliessenden Seiten als Stück des Aequators, die andere als Theil eines Meridians angenommen werden. Denn die Wahl der zwei Pole ist ja in diesem Falle der sphärischen Oberfläche vollständig beliebig. Für eine sphäroidische Oberfläche gilt dies natürlich nicht mehr, jedoch wird im Folgenden nur von der Kugeloberfläche gesprochen, während ich mir die sphäroidischen Flächen für eine andere Abhandlung vorbehalte.

Aufgabe I.

Fig. 1. 1. Auf dem Aequator AB ist der Bogen AP gegeben und auf dem Meridian OP der Punkt M ; man soll die kürzeste Linie AM finden, die auf der Kugeloberfläche zwischen den Punkten A und M gezogen werden kann.

Auflösung.

Der Kugelhalbmesser sei $= 1$, der Aequatorbogen $AP = x$ (Fig. 1), der Meridianbogen $PM = y$; der gesuchte Bogen AM

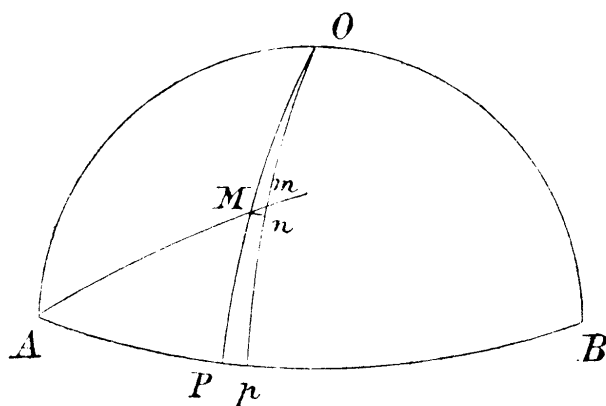


Fig. 1.

habe ferner die Länge s und werde um die unendlich kleine Strecke $Mm = ds$ verlängert, ferner werde durch m der Meridian Omp gezogen und endlich der auf diesem Meridian senkrecht stehende unendlich kleine Bogen Mn . Es ist damit also $Pp = dx$, $mn = dy$; und

da sich Pp zu Mn verhält wie 1 zum Sin. des Bogens OM oder zum cos. von $PM = y$, so ist $Mn = dx \cdot \cos y$, und das in n rechtwinklige Dreieck Mmn liefert:

$$Mm = \sqrt{(dy)^2 + (dx \cos y)^2}$$

und es ist folglich

$$AM = s = \int \sqrt{(dy)^2 + (dx \cos y)^2}.$$

Man hat also zwischen x und y eine Beziehung aufzustellen derart, dass, wenn ihnen bestimmte Werthe AP und PM gegeben werden, das Integral $\int \sqrt{(dy)^2 + (dx \cos y)^2}$ den kleinsten möglichen Werth erhalte.

Es sei $dy = p \cdot dx$, um das Integral auf die Form $\int dx \sqrt{p^2 + \cos^2 y}$ zu bringen. Das Integral $\int Z dx$, wo Z eine solche Function von x, y und p ist, dass $dZ = M dx + N dy + P dp$ gesetzt werden kann, nimmt nun, wie ich gezeigt habe, seinen grössten oder kleinsten Werth an, wenn $N dx - dP = 0$ ist. In unserem Fall ist

$$Z = \sqrt{p^2 + \cos^2 y},$$

also

$$dZ = - \frac{dy \sin y \cos y}{\sqrt{p^2 + \cos^2 y}} + \frac{p dp}{\sqrt{p^2 + \cos^2 y}},$$

und demnach

$$M = 0, \quad N = - \frac{\sin y \cos y}{\sqrt{p^2 + \cos^2 y}}, \quad P = \frac{p}{\sqrt{p^2 + \cos^2 y}}.$$

Es ist also $dZ = N dy + P dp$ zu setzen; multiplicirt man die Gleichung $N dx - dP = 0$ mit p , so erhält man, da $dy = p dx$ ist

$$N dy - p dP = 0 \quad \text{oder} \quad N dy = p dP;$$

setzt man diesen Werth für $N dy$ in den Ausdruck für dZ , so wird

$$dZ = p dP + P dp,$$

somit durch Integration:

$$Z = Pp + C, \quad \text{oder also}$$

$$\sqrt{p^2 + \cos^2 y} = \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + \cos^2 y}} + C, \quad \text{einfacher:}$$

$$\cos^2 y = C \sqrt{p^2 + \cos^2 y}.$$

Hieraus folgt:

$$C^2 p^2 = \cos^2 y (\cos^2 y - C^2) \quad \text{oder}$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\cos y \sqrt{\cos^2 y - C^2}}{C}.$$

Die gesuchte Beziehung zwischen x und y wird also geliefert durch die Differentialgleichung:

$$dx = \frac{C dy}{\cos y \sqrt{\cos^2 y - C^2}}$$

und mit ihr erhält man ferner

$$ds = dx \sqrt{p^2 + \cos^2 y} = \frac{dx \cos^2 y}{C}, \quad \text{oder}$$

$$ds = \frac{dy \cos y}{\sqrt{\cos^2 y - C^2}}$$

und der Bogen s selbst wird:

$$s = \int \frac{dy \cos y}{\sqrt{\cos^2 y - C^2}}.$$

Zusatz 1.

2. Die Gleichung $dx = \frac{C dy}{\cos y \sqrt{\cos^2 y - C^2}}$ kommt also auf der Kugelfläche der Linie AM zu, die die Eigenschaft besitzt, dass sie den kürzesten möglichen Weg zwischen zwei beliebigen ihrer Punkte vorstellt. Dass diese Linie zugleich ein Grosskreis der Kugel ist, habe ich anderwärts gezeigt; es kommt aber für unsere Zwecke gar nicht in Betracht, welche Beziehung die Linie zur Kugelfläche hat, wenn nur bekannt ist, dass ihr die angegebene Eigenschaft zukommt.

Zusatz 2.

3. Aus

$$dx = \frac{C dy}{\cos y \sqrt{\cos^2 y - C^2}} \text{ folgt } Mn = dx \cos y = \frac{C dy}{\sqrt{\cos^2 y - C^2}}.$$

Nun drückt $\frac{Mn}{mn}$ die Tang. des Winkels AMP aus und es ist also

$$\text{tg } AMP = \frac{C}{\sqrt{\cos^2 y - C^2}};$$

und da ferner

$$Mm = ds = \frac{dy \cos y}{\sqrt{\cos^2 y - C^2}}$$

und der Bruch $\frac{Mn}{Mm}$ gleich dem Sin. des Winkels AMP ist,

$$\text{so wird: } \sin AMP = \frac{C}{\cos y} \text{ und } \cos AMP = \frac{\sqrt{\cos^2 y - C^2}}{\cos y}.$$

Zusatz 3.

4. Setzt man $y = 0$, so dass der Punkt M mit A zusammenfällt, so drückt der damit entstehende Werth des Bruchs $\frac{dy}{dx}$ die Tang. des Winkels PAM aus, $\frac{dy}{ds}$ seinen Sin.

und $\frac{dx}{ds}$ seinen Cos. Da dann $\cos y = 1$ ist, so wird für

$$\text{diesen Fall } dx = \frac{C dy}{\sqrt{1 - C^2}} \text{ und } ds = \frac{dy}{\sqrt{1 - C^2}} \text{ und demnach:}$$

$$\text{tg } PAM = \frac{\sqrt{1 - C^2}}{C}, \quad \sin PAM = \sqrt{1 - C^2}, \quad \cos PAM = C.$$

Zusatz 4.

5. Führt man also den Winkel PAM an Stelle der Constanten C ein und setzt nun diesen Winkel $PAM = \zeta$, so wird wegen $C = \cos \zeta$:

$$dx = \frac{dy \cos \zeta}{\cos y \sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}} \quad \text{und} \quad ds = \frac{dy \cos y}{\sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}}.$$

Bezeichnet man ferner den Winkel AMP mit θ , so wird:

$$\text{tg } \theta = \frac{\cos \zeta}{\sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}}, \quad \sin \theta = \frac{\cos \zeta}{\cos y}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}}{\cos y}.$$

Zusatz 5.

6. Es sind noch die zwei Differentialgleichungen zu integrieren, die die Werthe von dx und ds ausdrücken. Man wird finden:

$$x = \arcsin \frac{C \sin y}{\cos y \sqrt{1-C^2}} \quad \text{oder} \quad \sin x = \frac{C \sin y}{\cos y \sqrt{1-C^2}} = \frac{\cos \zeta \sin y}{\sin \zeta \cos y};$$

$$s = \arccos \frac{\sqrt{\cos^2 y - C^2}}{\sqrt{1-C^2}} \quad \text{oder} \quad \cos s = \frac{\sqrt{\cos^2 y - C^2}}{\sqrt{1-C^2}} = \frac{\sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}}{\sin \zeta}.$$

Zusatz 6.

7. Um aus den Grössen ζ und y die übrigen Grössen x , s und θ zu bestimmen, stehen nun also nach dem Vorhergehenden die Gleichungen zu Gebot:

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{\cos \zeta \sin y}{\sin \zeta \cos y}, & \cos x &= \frac{\sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}}{\sin \zeta \cos y}, & \operatorname{tg} x &= \frac{\cos \zeta \sin y}{\sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}}; \\ \sin s &= \frac{\sin y}{\sin \zeta}, & \cos s &= \frac{\sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}}{\sin \zeta}, & \operatorname{tg} s &= \frac{\sin y}{\sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}}; \\ \sin \theta &= \frac{\cos \zeta}{\cos y}, & \cos \theta &= \frac{\sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}}{\cos y}, & \operatorname{tg} \theta &= \frac{\cos \zeta}{\sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}}. \end{aligned}$$

Zusatz 7.

8. Wenn man die einzige Wurzelgrösse, $\sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}$, die in diesen Gleichungen vorkommt, wegschaffen will, so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\cos s}{\cos x} &= \cos y, & \frac{\cos \theta}{\cos x} &= \sin \zeta, & \frac{\cos \theta}{\cos s} &= \frac{\sin \zeta}{\cos y}; \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} s} &= \cos \zeta, & \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} \theta} &= \sin y, & \frac{\operatorname{tg} s}{\operatorname{tg} \theta} &= \frac{\sin y}{\cos \zeta}; \\ \sin x &= \frac{\cos \zeta \sin y}{\sin \zeta \cos y}; & \cos x \cdot \operatorname{tg} s &= \frac{\sin y}{\sin \zeta \cos y}; & \cos x \cdot \operatorname{tg} \theta &= \frac{\cos \zeta}{\sin \zeta \cos y}; \\ \cos s \cdot \operatorname{tg} x &= \frac{\cos \zeta \sin y}{\sin \zeta}; & \sin s &= \frac{\sin y}{\sin \zeta}; & \cos s \cdot \operatorname{tg} \theta &= \frac{\cos \zeta}{\sin \zeta}; \\ \cos \theta \cdot \operatorname{tg} x &= \frac{\cos \zeta \sin y}{\cos y}; & \cos \theta \cdot \operatorname{tg} s &= \frac{\sin y}{\cos y}; & \sin \theta &= \frac{\cos \zeta}{\cos y}. \end{aligned}$$

Zusatz 8.

9. Die fünf Stücke x , y , s , ζ und θ gehören dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck APM an; wählt man unter den eben angeschriebenen Gleichungen diejenigen aus, die nur je drei von diesen Stücken enthalten, so erhält man die folgenden 9 Gleichungen in einfachster Form:

$$\begin{array}{lll} \text{I. } \cos s = \cos x \cos y; & \text{II. } \cos \theta = \sin \zeta \cos x; & \text{III. } \operatorname{tg} x = \cos \zeta \operatorname{tg} s; \\ \text{IV. } \operatorname{tg} x = \sin y \operatorname{tg} \theta; & \text{V. } \operatorname{tg} y = \sin x \operatorname{tg} \zeta; & \text{VI. } \sin y = \sin \zeta \sin s \\ \text{VII. } \cos s \operatorname{tg} \zeta \operatorname{tg} \theta = 1; & \text{VIII. } \operatorname{tg} y = \cos \theta \operatorname{tg} s; & \text{IX. } \cos \zeta = \sin \theta \cos s \end{array}$$

sind zwei beliebige Stücke gegeben, so kann man mit Hülfe dieser Gleichungen, wenn als zehnte noch hinzugefügt wird die aus den drei linksstehenden Gleichungen des § 7 (Zusatz 6) folgende:

$$\text{X. } \sin x = \sin \theta \sin s,$$

stets die drei übrigen Stücke finden, ohne dass jetzt mehr eine Wurzelausziehung nothwendig wäre.

Aufgabe II.

10. Die Formeln zur Auflösung sämtlicher Fälle der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke aufzustellen.

Auflösung.

Von den Winkeln des Dreiecks (Fig. 2), die mit A , B , C bezeichnet werden sollen, sei C der rechte; die Seiten werden mit den kleinen Buchstaben a , b , c bezeichnet und zwar derart, dass a die Gegenseite des Winkels A u. s. f. ist, dass also c die Hypotenuse, a und b die beiden Katheten des Dreiecks bezeichnen. Im Vergleich dieses Dreiecks mit der vorhin benutzten Figur ist also:

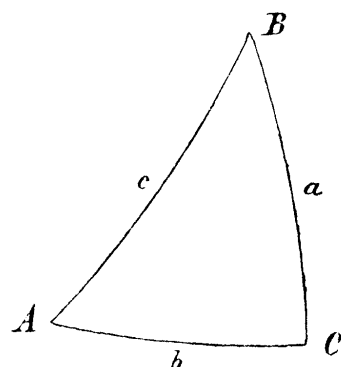


Fig. 2.

$$s = c; \quad x = b; \quad y = a; \quad \zeta = A; \quad \theta = B.$$

Die Aufgabe ist nun die, aus irgend zwei gegebenen unter diesen fünf Stücken die drei übrigen zu bestimmen; und die obenstehenden Formeln liefern sofort die in der folgenden Zusammenstellung gegebenen Auflösungen aller möglichen Fälle:

Die zwei gegebenen Stücke:	Bestimmung der drei übrigen durch die Gleichungen:		
I. $a, b.$	$\cos c = \cos a \cos b;$	$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b};$	$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}.$
II. $a, c.$	$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a};$	$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c};$	$\cos B = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}.$
III. $b, c.$	$\cos a = \frac{\cos c}{\cos b};$	$\cos A = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c};$	$\sin B = \frac{\sin b}{\sin c}.$
IV. $a, A.$	$\sin b = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} A};$	$\sin c = \frac{\sin a}{\sin A};$	$\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}.$
V. $a, B.$	$\operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg} B;$	$\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} a}{\cos B};$	$\cos A = \cos a \sin B.$
VI. $b, A.$	$\operatorname{tg} a = \sin b \operatorname{tg} A;$	$\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos A};$	$\cos B = \cos b \sin A.$
VII. $b, B.$	$\sin a = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B};$	$\sin c = \frac{\sin b}{\sin B};$	$\sin A = \frac{\cos B}{\cos b}.$
VIII. $c, A.$	$\sin a = \sin c \sin A;$	$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos A;$	$\operatorname{tg} B = \frac{1}{\cos c \cdot \operatorname{tg} A}.$
IX. $c, B.$	$\sin b = \sin c \sin B;$	$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cos B;$	$\operatorname{tg} A = \frac{1}{\cos c \cdot \operatorname{tg} B}.$
X. $A, B.$	$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B};$	$\cos b = \frac{\cos B}{\sin A};$	$\cos c = \frac{1}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}.$

Zusatz 1.

11. Die Kathete a und ihr Gegenwinkel A kommen in diesen Formeln ganz gleichwerthig mit der Kathete b und ihrem Gegenwinkel B vor, so dass es gleichgiltig ist, welche von beiden Seiten, a oder b , man als Basis des Dreiecks nehmen will, wie es auch die Natur des Gegenstandes verlangt.

Zusatz 2.

12. Die grosse Zahl der Gleichungen, durch die der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Stücken eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks ausgedrückt werden kann, lässt sich auf die folgende geringe Anzahl von Formeln zurückführen, die demnach allein auswendig zu merken sind:

$$\text{I.} \quad \sin c = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}.$$

$$\text{II.} \quad \cos c = \cos a \cos b.$$

$$\text{III.} \quad \cos c = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B.$$

$$\text{IV.} \quad \cos A = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}, \quad \cos B = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}.$$

$$\text{V.} \quad \sin A = \frac{\cos B}{\cos b}, \quad \sin B = \frac{\cos A}{\cos a}.$$

$$\text{VI.} \quad \sin a = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B}, \quad \sin b = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} A}.$$

Zusatz 3.

13. Nur die durch diese sechs Gleichungen ausgedrückten Eigenschaften des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks sind, wie schon angedeutet, zu merken, um die für alle denkbaren Fälle erforderlichen Formeln vorrätig zu haben.

Aufgabe III.

14. *Die Fläche eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks zu bestimmen.* Fig. 1.

Auflösung.

In dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck APM (Fig. 1) sei die Basis $AP = x$, die Seite $PM = y$; der dem Meridian

OMP unendlich nahe liegende Omp liefert $Pp = dx$, $mn = dy$. Da ferner $Mn = dx \cdot \cos y$ ist, so wird die ∞ -schmale Fläche

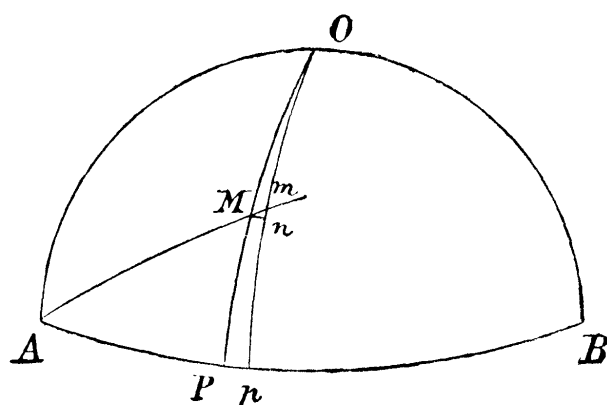


Fig. 1.

$PMmp = dx \sin y$; dies ist das Differential der Dreiecksfläche APM und diese selbst also $= \int dx \sin y$. Nun ist aber, wenn ζ den Winkel PAM bedeutet, gefunden worden:

$$dx = \frac{dy \cos \zeta}{\cos y \sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}},$$

so dass demnach als Ausdruck für die Oberfläche des Dreiecks APM erhalten wird:

$$\int \frac{dy \sin y \cos \zeta}{\cos y \sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}}.$$

Führt man an Stelle von y den Winkel $AMP = \theta$ ein, so erhält man wegen $\sin \theta = \frac{\cos \zeta}{\cos y}$ und $\cos \theta = \frac{\sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}}{\cos y}$:

$$d\theta \cos \theta = \frac{dy \cos \zeta \sin y}{\cos^2 y}, \quad \text{also} \quad d\theta = \frac{dy \cos \zeta \sin y}{\cos y \sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}}$$

und somit die gesuchte Dreiecksfläche

$$= \int d\theta = \theta + \text{Const.}$$

Um den Werth der Const. zu bestimmen, ist zu bemerken, dass die Dreiecksfläche verschwinden muss, wenn M mit A zusammenfällt; in diesem Falle wird $\theta = 90^\circ - \zeta$. Es muss also $90^\circ - \zeta + \text{Const.} = 0$ oder

$$\text{Const.} = \zeta - 90^\circ \text{ sein.}$$

Als Werth der gesuchten Dreiecksfläche APM erhält man damit:

$$\zeta + \theta - 90^\circ,$$

d. h. der Ueberschuss der Summe der beiden Winkel PAM und AMP über einen rechten Winkel drückt die Dreiecksfläche aus.

Zusatz 1.

15. Die Summe der zwei Winkel PAM und AMP ist also stets grösser als ein rechter Winkel, und zwar wächst der Ueberschuss in demselben Maass, wie die Fläche des Dreiecks. Das Product aus der Länge eines Grosskreisbogens, die jenem Ueberschusse entspricht, und dem Halbmesser der Kugel giebt die Fläche des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks.

Zusatz 2.

16. Daraus folgt auch leicht die Fläche eines beliebigen sphärischen Dreiecks. Denn da man durch eine Höhe ein solches Dreieck in zwei rechtwinklige zerlegen kann, so erhält man seine Fläche, indem man den Ueberschuss der Summe seiner drei Winkel über 180° , durch den entsprechenden Grosskreisbogen gemessen, mit dem Halbmesser der Kugel multiplicirt.

Aufgabe IV.

17. Auf der Oberfläche einer Kugel sind zwei Punkte E und M gegeben; man soll die kürzeste Linie EM zwischen diesen beiden Punkten bestimmen.

Auflösung.

Man verbinde (Fig. 3) die beiden Punkte mit dem einen der Pole durch die Meridiane OE und OM , von denen der letztere variabel gedacht werde. Es seien die Meridianbögen $OE = a$, $OM = x$ und der Winkel $EO M = y$; bei den gesuchten Grössen sei der Bogen EM mit s , der Winkel OEM mit α , der Winkel OME mit φ bezeichnet. Dieser Winkel φ ist mit x , y und s veränderlich, während a und α unveränderlich bleiben. Auf den dem Meridian OM ∞ -naheliegenden

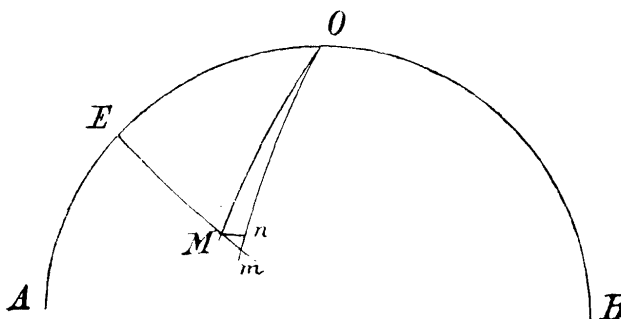


Fig. 3.

Meridian Om fälle man von M aus das Loth Mn ; es ist dann, wenn der Halbmesser der Kugel die Längeneinheit ist, $mn = dx$, der Winkel $MOm = dy$, $Mn = dy \cdot \sin x$. Man erhält hieraus:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Mn}{mn} = \frac{dy \sin x}{dx} \text{ oder } \sin \varphi = \frac{dy \sin x}{ds} \text{ und } \cos \varphi = \frac{dx}{ds}.$$

Da nun $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy \sin x)^2}$ ist, so soll $\int \sqrt{(dx)^2 + (dy \sin x)^2}$ ein Minimum werden. Setzt man $dy = p \cdot dx$, so ist also, mit $Z = \sqrt{1 + (p \sin x)^2}$, der Ausdruck $\int Z dx$ zum Minimum zu machen. Ist nun allgemein $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$, so ist die Bedingung des Minimums: $Ndx - dP = 0$. In Anwendung auf unsern

Fall ist $N = 0$, $P = \frac{p \sin^2 x}{\sqrt{1 + (p \sin x)^2}}$, also unsere Bedingung für das Minimum:

$$dP = 0, \text{ d. h. } P = \text{Const.},$$

oder es muss sein:

$$\frac{p \sin^2 x}{\sqrt{1 + (p \sin x)^2}} = C \text{ oder } \frac{dy \sin^2 x}{\sqrt{(dx)^2 + (dy \sin x)^2}} = C,$$

oder

$$\frac{dy \sin^2 x}{ds} = \sin x \sin \varphi = C.$$

Zur Bestimmung von C ist zu bemerken, dass mit verschwindendem Winkel $EOm = y$ werden muss $x = a$ und $\varphi = 180^\circ - \alpha$ oder $\sin \varphi = \sin \alpha$, d. h. man erhält aus diesem Grenzfall $\sin a \sin \alpha = C$. Das Minimum erfordert also die Gleichung:

$$\frac{dy \sin^2 x}{\sqrt{(dx)^2 + (dy \sin x)^2}} = \sin a \sin \alpha.$$

Um diese Differentialgleichung zu integrieren, hat man, wenn für $\sin a \sin \alpha$ vorläufig wieder C gesetzt wird,

$$dy = \frac{C dx}{\sin x \sqrt{\sin^2 x - C^2}} \quad \text{und damit}$$

wegen $ds = \frac{dy \sin^2 x}{C},$

$$ds = \frac{dx \sin x}{\sqrt{\sin^2 x - C^2}}.$$

Durch die Integration erhält man also:

$$\begin{aligned} y &= -\arcsin \frac{C \cos x}{\sin x \sqrt{1 - C^2}} + \arcsin \frac{C \cos a}{\sin a \sqrt{1 - C^2}} \\ &= -\arccos \frac{\sqrt{\sin^2 x - C^2}}{\sin x \sqrt{1 - C^2}} + \arccos \frac{\sqrt{\sin^2 a - C^2}}{\sin a \sqrt{1 - C^2}}, \\ s &= -\arccos \frac{\sqrt{\sin^2 x - C^2}}{\sqrt{1 - C^2}} + \arccos \frac{\sqrt{\sin^2 a - C^2}}{\sqrt{1 - C^2}} \\ &= -\arcsin \frac{\cos x}{\sqrt{1 - C^2}} + \arcsin \frac{\cos a}{\sqrt{1 - C^2}}; \end{aligned}$$

die rechts hinzugefügten Constanten sind so gewählt, dass $x = a$ wird mit $y = 0$ und $s = 0$. Wenn in beiden Gleichungen die beiden Arc der rechten Seite vereinigt werden, so erhält man:

$$\begin{aligned} y &= \arcsin \frac{C \cos a \sqrt{\sin^2 x - C^2} - C \cos x \sqrt{\sin^2 a - C^2}}{(1 - C^2) \sin a \sin x}, \\ s &= \arcsin \frac{\cos a \sqrt{\sin^2 x - C^2} - \cos x \sqrt{\sin^2 a - C^2}}{1 - C^2} \quad \text{oder:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - C^2) \sin a \sin x \sin y &= C \cos a \sqrt{\sin^2 x - C^2} - C \cos x \sqrt{\sin^2 a - C^2}, \\ (1 - C^2) \sin s &= \cos a \sqrt{\sin^2 x - C^2} - \cos x \sqrt{\sin^2 a - C^2}. \end{aligned}$$

Mit Benutzung der Cos von y und von s wird:

$$\begin{aligned} (1 - C^2) \sin a \sin x \cos y &= \sqrt{(\sin^2 a - C^2)(\sin^2 x - C^2)} + C^2 \cos a \cos x, \\ (1 - C^2) \cos s &= \sqrt{(\sin^2 a - C^2)(\sin^2 x - C^2)} + \cos a \cos x. \end{aligned}$$

Setzt man für C wieder den oben gefundenen Werth $\sin a \sin \alpha$, so wird

$$\sqrt{\sin^2 a - C^2} = -\sin a \cos \alpha;$$

der Winkel α ist hier nämlich stumpf zu nehmen, damit φ in E spitz sei: mit $y = 0$ wird $\varphi = 180^\circ - \alpha$, also sein $\cos$ gleich $-\cos \alpha$. Damit wird aus den letzten vier Gleichungen:

$$(1 - \sin^2 a \sin^2 \alpha) \sin x \sin y = \sin \alpha \cos a \sqrt{\sin^2 x - \sin^2 a \sin^2 \alpha} + \sin \alpha \cos \alpha \sin a \cos x;$$

$$(1 - \sin^2 a \sin^2 \alpha) \sin x \cos y = -\cos \alpha \sqrt{\sin^2 x - \sin^2 a \sin^2 \alpha} + \sin a \cos a \sin^2 \alpha \cos x;$$

$$(1 - \sin^2 a \sin^2 \alpha) \sin s = \cos a \sqrt{\sin^2 x - \sin^2 a \sin^2 \alpha} + \sin a \cos \alpha \cos x$$

$$(1 - \sin^2 a \sin^2 \alpha) \cos s = -\sin a \cos \alpha \sqrt{\sin^2 x - \sin^2 a \sin^2 \alpha} + \cos a \cos x;$$

und diesen vier Gleichungen ist noch hinzuzufügen:

$$\sin x \sin \varphi = \sin a \sin \alpha .$$

Zusatz 1.

18. Da $\sin a \sin \alpha = \sin x \sin \varphi$ ist, so wird

$$\sqrt{\sin^2 x - \sin^2 a \sin^2 \alpha} = + \sin x \cos \varphi$$

und unsere vier Gleichungen werden, wenn der Abkürzung halber wieder C^2 an Stelle von $\sin^2 a \sin^2 \alpha$ oder $\sin^2 x \sin^2 \varphi$ gesetzt wird:

$$\text{I } (1 - C^2) \sin y = \sin \alpha \cos a \cos \varphi + \cos \alpha \cos x \sin \varphi$$

$$\text{II } (1 - C^2) \cos y = -\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \cos a \cos x \sin \varphi$$

$$\text{III } (1 - C^2) \sin s = \cos a \sin x \cos \varphi + \sin a \cos \alpha \cos x$$

$$\text{IV } (1 - C^2) \cos s = -\sin a \cos \alpha \sin x \cos \varphi + \cos a \cos x .$$

Zusatz 2.

19. Diese vier Gleichungen kann man, um einfachere Formeln zu erhalten, auf verschiedene Art combiniren. Nimmt man zuerst

$$\text{I. } \cos \alpha + \text{II. } \sin \alpha \cos a ,$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} & (1 - C^2) (\cos \alpha \sin y + \sin \alpha \cos a \cos y) \\ & = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 a) \cos x \sin \varphi ; \end{aligned}$$

da nun $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 a = 1 - \sin^2 \alpha \sin^2 a = 1 - C^2$ ist, so wird: