$$\cos\alpha\sin y + \sin\alpha\cos a\cos y = \cos x\sin\varphi = \frac{\sin a\sin\alpha}{\operatorname{tg} x}$$

oder

$$\operatorname{tang} x\sin y + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} x\cos a\cos y = \operatorname{tg}\alpha\sin a\,.$$

Zusatz 3.

20. Nimmt man I. $\sin\alpha\cos a$ — II. $\cos\alpha$, so erhält man:

$$\begin{aligned}(1-C^2)(\sin\alpha\cos a\sin y-\cos\alpha\cos y) &= (\sin^2\alpha\cos^2 a-\cos^2\alpha)\cos\varphi\\ &= (1-C^2)\cos\varphi\,,\end{aligned}$$

oder nach Division mit $(1-C^2)$:

$$\sin\alpha\cos a\sin y - \cos\alpha\cos y = \cos\varphi\,.$$

Zusatz 4.

21. Die Combination I. $\sin x$ — III. $\sin\alpha$ giebt

$$(1-C^2)(\sin x\sin y - \sin\alpha\sin s) = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\sin x\sin y = \sin\alpha\sin s\,.$$

Da ferner $\sin x\sin\varphi = \sin a\sin\alpha$ ist, so erhält man $\sin a\sin y = \sin\varphi\sin s$ oder die Proportion:

$$\sin a : \sin\varphi = \sin x : \sin\alpha = \sin s : \sin y\,.$$

Zusatz 5.

22. Die Verbindung I. $\sin a\cos\alpha\sin x$ + IV. $\sin x\cos a$ liefert:

$$\begin{aligned}&(1-C^2)(\sin a\cos\alpha\sin x\sin y + \sin\alpha\cos a\cos s)\\ &= \cos x(\sin a\cos^2\alpha\sin x\sin\varphi + \sin\alpha\cos^2 a)\,.\end{aligned}$$

Wegen $\sin x\sin\varphi = \sin a\sin\alpha$ kann man diese Gleichung auch so schreiben:

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cos x(\sin^2 a\cos^2\alpha + \cos^2\alpha) &= (1-\sin^2 a\sin^2\alpha)\sin\alpha\cos x\\ &= (1-C^2)\sin\alpha\cos x\end{aligned}$$

oder nach Division mit $(1-C^2)$:

$$\sin a\cos\alpha\sin x\sin y + \sin\alpha\cos a\cos s = \sin\alpha\cos x\,.$$

Beachtet man, dass $\sin y = \dfrac{\sin \alpha \sin s}{\sin x}$ ist, so lautet diese Gleichung:

$$\sin a \cos \alpha \sin s + \cos a \cos s = \cos x\,.$$

Zusatz 6.

23. Die Combination I. $\cos a$ — IV. $\cos \alpha \sin \varphi$ liefert ferner:

$$\begin{gathered}(1 - C^2)(\cos a \sin y - \cos \alpha \sin \varphi \cos s) \\ = \cos \varphi (\sin \alpha \cos^2 a + \sin a \cos^2 \alpha \sin x \sin \varphi)\end{gathered}$$

oder mit Rücksicht auf $\sin x \sin \varphi = \sin a \sin \alpha$:

$$\sin \alpha \cos \varphi (\cos^2 a + \sin^2 a \cos^2 \alpha) = (1 - C^2) \sin \alpha \cos \varphi\,,$$

oder endlich nach Division mit $(1 - C^2)$:

$$\cos a \sin y - \cos \alpha \sin \varphi \cos s = \sin \alpha \cos \varphi\,.$$

Da nun $\sin y = \dfrac{\sin \varphi \sin s}{\sin a}$ ist, so geht diese Gleichung über in:

$$\cos a \sin \varphi \sin s - \sin a \cos \alpha \sin \varphi \cos s = \sin a \sin \alpha \cos \varphi$$

oder

$$\operatorname{tg} \varphi \sin s - \cos \alpha \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \varphi \cos s = \sin \alpha \operatorname{tg} a\,.$$

Zusatz 7.

24. Aus der Verbindung II. $\cos a \sin x$ + III. $\cos \alpha$ erhält man:

$$\begin{gathered}(1 - C^2)(\cos a \sin x \cos y + \cos a \sin s) \\ = \cos x (\sin \alpha \cos^2 a \sin x \sin \varphi + \sin a \cos^2 \alpha)\end{gathered}$$

oder mit Beachtung von $\sin x \sin \varphi = \sin a \sin \alpha$:

$$\sin a \cos x (\sin^2 \alpha \cos^2 a + \cos^2 \alpha) = (1 - C^2) \sin a \cos x;$$

dividirt man mit $(1 - C^2)$ durch, so wird:

$$\cos a \sin x \cos y + \cos \alpha \sin s = \sin a \cos x$$

oder wegen $\sin s = \dfrac{\sin x \sin y}{\sin \alpha}$:

$$\sin\alpha \cos a \sin x \cos y + \cos\alpha \sin x \sin y = \sin\alpha \sin a \cos x$$

oder endlich

$$\operatorname{tg}\alpha \cos a \operatorname{tg} x \cos y + \operatorname{tg} x \sin y = \operatorname{tg}\alpha \sin a\ ,$$

übereinstimmend mit der Gleichung in § 19.

Zusatz 8.

25. Wenn man $-$ II. $\sin a \cos \alpha +$ III. $\cos a \sin \alpha \sin \varphi$ nimmt, so ergiebt sich:

$$(1 - C^2)(\cos a \sin \alpha \sin s \sin \varphi - \sin a \cos \alpha \cos y)$$
$$= \cos\varphi (\sin a \cos^2 \alpha + \cos^2 a \sin \alpha \sin x \sin \varphi)$$

oder wegen $\sin x \sin\varphi = \sin a \sin\alpha$:

$$\sin a \cos\varphi (\cos^2\alpha + \cos^2 a \sin^2 \alpha) = (1 - C^2) \sin a \cos\varphi\ .$$

Da $\sin s = \dfrac{\sin a \sin y}{\sin\varphi}$ ist, so geht diese Gleichung über in:

$$\cos a \sin\alpha \sin y - \cos\alpha \cos y = \cos\varphi\ ,$$

genau wie in § 20.

Zusatz 9.

26. Bildet man ferner: II. $\sin a \sin x -$ IV., so erhält man:

$$(1 - C^2)(\sin a \sin x \cos y - \cos s) = \cos a \cos x (\sin a \sin\alpha \sin x \sin\varphi - 1)$$

oder wegen $\sin x \sin\varphi = \sin a \sin\alpha$:

$$\cos a \cos x (\sin^2 a \sin^2\alpha - 1) = -(1 - C^2) \cos a \cos x\ .$$

Dividirt man mit $-(1 - C^2)$ durch, so wird also:

$$\cos s - \sin a \sin x \cos y = \cos a \cos x\ .$$

Zusatz 10.

27. Die Verbindung II — IV. $\sin\alpha \sin\varphi$ giebt:

$$(1 - C^2)(\cos y - \sin\alpha \sin\varphi \cos s)$$
$$= \cos\alpha \cos\varphi (\sin a \sin\alpha \sin x \sin\varphi - 1)$$

oder

$$\sin\alpha \sin\varphi \cos s - \cos y = \cos\alpha \cos\varphi\ .$$

Zusatz 11.

28. Die Combination III. $\sin a \cos \alpha +$ IV. $\cos a$ liefert:

$$(1 - C^2)(\sin a \cos \alpha \sin s + \cos a \cos s) = \cos x (\sin^2 a \cos^2 \alpha + \cos^2 a)$$

oder

$$\sin a \cos \alpha \sin s + \cos a \cos s = \cos x ,$$

übereinstimmend mit § 22.

Zusatz 12.

29. Endlich erhält man durch III. $\cos a$ — IV. $\sin a \cos \alpha$:

$$(1 - C^2)(\cos a \sin s - \sin a \cos \alpha \cos s)$$
$$= \sin x \cos \varphi (\cos^2 a + \sin^2 a \cos^2 \alpha) \qquad \text{oder}$$

$$\cos a \sin s - \sin a \cos \alpha \cos s = \sin x \cos \varphi = \frac{\sin a \sin \alpha \cos \varphi}{\sin \varphi}$$

oder endlich

$$\operatorname{tg} \varphi \sin s - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha \cos s = \operatorname{tg} a \sin \alpha ,$$

wie auch in § 23 gefunden wurde.

Aufgabe V.

.4. **30**. *Die Beziehungen zwischen den Seiten und den Winkeln eines beliebigen sphärischen Dreiecks aufzustellen.*

Auflösung.

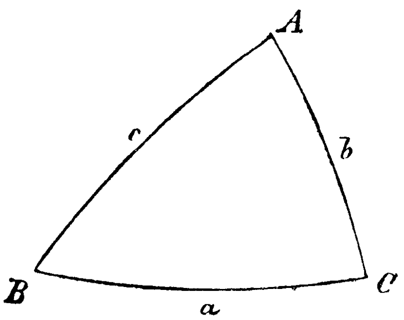

Fig. 4.

Wie auch das gegebene sphärische Dreieck ABC beschaffen sein mag, so kann man eine seiner Ecken, z. B. A, als den Pol der Kugel annehmen, so dass AB und AC zwei Meridiane sind, während die dritte Seite BC die kürzeste, der Kugeloberfläche angehörende Linie zwischen den Punkten B und C vorstellt. Damit kann das Dreieck mit dem in der letzten Aufgabe betrachteten Dreieck EOM identificirt werden; bezeichnen nämlich A, B, C die Winkel des gegebenen Dreiecks in den gleichnamigen Ecken, und werden die Seiten $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ gesetzt, so entsprechen sich die in der vorigen Figur und die in der jetzigen angewandten Bezeichnungen in folgender Weise:

frühere Bezeichnung:	a,	x,	s;	y,	α,	φ
jetzige Bezeichnung:	c,	b,	a;	A,	B,	C.

Die in den Zusätzen zur letzten Aufgabe gefundenen Formeln liefern daher für das sphärische Dreieck ABC die folgenden Beziehungen:

I. $\sin a : \sin A = \sin b : \sin B = \sin c : \sin C$, nach § 21.

$$\text{II.}\quad \begin{cases} \cos C = \cos c \sin A \sin B - \cos A \cos B, & \text{nach § 20.} \\ \cos B = \cos b \sin A \sin C - \cos A \cos C, & \text{nach Analogie.} \\ \cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C, & \text{nach § 27.} \end{cases}$$

$$\text{III.}\quad \begin{cases} \cos c = \cos C \sin a \sin b + \cos a \cos b, & \text{nach Analogie.} \\ \cos b = \cos B \sin a \sin c + \cos a \cos c, & \text{nach § 22.} \\ \cos a = \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c, & \text{nach § 26.} \end{cases}$$

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} \sin a \,\mathrm{tg}\, C - \sin B \,\mathrm{tg}\, c = \cos a \cos B \,\mathrm{tg}\, C \,\mathrm{tg}\, c, & \text{nach § 23.} \\ \sin b \,\mathrm{tg}\, A - \sin C \,\mathrm{tg}\, a = \cos b \cos C \,\mathrm{tg}\, A \,\mathrm{tg}\, a, & \text{nach Analogie.} \\ \sin c \,\mathrm{tg}\, B - \sin A \,\mathrm{tg}\, b = \cos c \cos A \,\mathrm{tg}\, B \,\mathrm{tg}\, b, & \text{nach § 19.} \end{cases}$$

Diese vier Formeln enthalten in der That alle Gleichungen, die wir bei der vorigen Aufgabe III aufgestellt haben.

Zusatz 1.

31. Die erste Gleichung drückt die allgemein bekannte Eigenschaft aller sphärischen Dreiecke aus, dass die Sin der Seiten in demselben Verhältniss zu einander stehen, wie die Sin der gegenüberliegenden Winkel.

Zusatz 2.

32. Wenn also in einem sphärischen Dreieck eine Seite und ihr Gegenwinkel, und ausserdem noch eine Seite, oder noch ein Winkel bekannt sind, so erhält man mit Hülfe dieses Satzes sofort den Gegenwinkel dieser Seite oder die Gegenseite dieses Winkels.

Zusatz 3.

33. Jede der soeben aufgestellten Formeln enthält nur vier der dem Dreieck angehörenden Stücke; wenn drei dieser Stücke gegeben sind, so kann also aus der entsprechenden Gleichung das vierte bestimmt werden.

Zusatz 4.

34. Es müssen sich also damit die Regeln zur Auflösung aller sphärischen Dreiecke aufstellen lassen. Das Dreieck enthält nun sechs Stücke, nämlich die drei Seiten und die drei Winkel; wenn drei davon bekannt sind, so müssen sich die drei übrigen berechnen lassen, wie in den folgenden Aufgaben zu zeigen sein wird.

Aufgabe VI.

ig. 4. **35.** *In einem sphärischen Dreieck sind die drei Seiten gegeben, man soll die Winkel bestimmen.*

Auflösung.

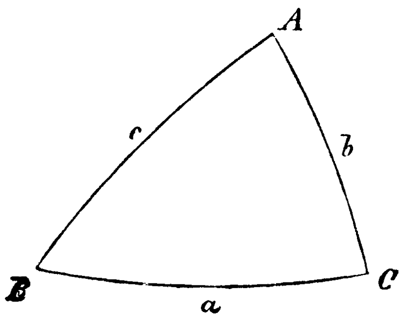

Fig. 4.

Die drei gegebenen Seiten seien $AB = c$, $AC = b$, und $BC = a$; zur Bestimmung der drei Winkel A, B, C stehen die Gleichungen III zu Gebot, die liefern:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

Zusatz 1.

36. Man erhält hieraus

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c}$$

oder wegen

$$\cos(b - c) = \cos b \cos c + \sin b \sin c:$$

$$1 - \cos A = \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \sin c}.$$

Zusatz 2.

37. Da nun $\cos p - \cos q = 2 \sin \tfrac{1}{2}(q - p) \sin \tfrac{1}{2}(p + q)$ ist, so kann man an Stelle der letzten Gleichung auch schreiben:

$$1 - \cos A = \frac{2 \sin \tfrac{1}{2}(a - b + c) \sin \tfrac{1}{2}(a + b - c)}{\sin b \sin c}$$

oder wegen $1 - \cos A = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A$ auch:

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(a - b + c) \sin \tfrac{1}{2}(a + b - c)}{\sin b \sin c}};$$

und ebenso

$$\sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(b - a + c) \sin \tfrac{1}{2}(b + a - c)}{\sin a \sin c}}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(c - a + b) \sin \tfrac{1}{2}(c + a - b)}{\sin a \sin b}}.$$

Zusatz 3.

38. Addirt man dagegen zu den Gleichungen in § 35 auf beiden Seiten 1, so erhält man aus der ersten:

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c + \sin b \sin c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\sin b \sin c}$$

oder wegen

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A:$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(b+c+a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+c+b)}{\sin a \sin c}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin a \sin b}}$$

Zusatz 4.

39. Aus den zwei letzten Gruppen von Gleichungen erhält man als Ausdrücke für die Tang der halben Winkel:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(b+c+a)}}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a+c)\sin\frac{1}{2}(b+a-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+c+b)}}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(c-a+b)\sin\frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}}.$$

Zusatz 5.

40. Diese Formeln sind für die logarithmische Rechnung sehr bequem. Uebrigens könnte man, nachdem einer der Winkel, z. B. A, bestimmt ist, die beiden andern auch ebenso einfach durch die Gleichungen

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}, \quad \sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a}$$

bestimmen, wenn nur bekannt ist, ob diese Winkel grösser oder kleiner als ein Rechter sind; wenn man sich aber der eben gefundenen Formeln bedient, so ist keine Zweideutigkeit vorhanden, da die gefundenen halben Winkel stets kleiner als ein rechter Winkel sind.

Zusatz 6.

41. Aus den Formeln für die Tang der halben Winkel kann man noch weitere bemerkenswerthe Gleichungen erhalten; multiplicirt man je zwei, so erhält man z. B.

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}$$

oder wegen:

$$\sin p + \sin q = 2\sin\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)$$
$$\sin p - \sin q = 2\sin\tfrac{1}{2}(p-q)\cos\tfrac{1}{2}(p+q):$$

$$1 + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B = \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)} \quad \text{und}$$

$$1 - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B = \frac{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}\,.$$

Zusatz 7.

42. Addirt und subtrahirt man dagegen je zwei jener Formeln, so ergiebt sich z. B.:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A \pm \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \frac{(\sin\frac{1}{2}(a+c-b) \pm \sin\frac{1}{2}(b+c-a))\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}}$$

oder, mit Einführung von $\frac{1}{2}C$:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A \pm \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b) \pm \sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}\,.$$

Mit Hülfe derselben Reduction wie oben erhalten wir also:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \frac{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(a+b+c)} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \frac{2\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}c}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}\,.$$

Zusatz 8.

43. Da ferner $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}A + \operatorname{tg}\frac{1}{2}B}{1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}A\operatorname{tg}\frac{1}{2}B}$ ist, so ergeben sich aus den Formeln der Zusätze 6 und 7 die Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a+b)}$$

und nach Analogie

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + C) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(a - c)}{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2}(a + c)}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B + C) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(b - c)}{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2}(b + c)}\,.$$

Zusatz 9.

44. Endlich erhält man mit Rücksicht auf

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B}{1 + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B}$$

aus diesen Formeln:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a - b)}{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C \sin \tfrac{1}{2}(a + b)}\,,$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - C) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a - c)}{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2}(a + c)}\,,$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(b - c)}{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2}(b + c)}\,.$$

Aufgabe VII.

ig. 4. **45.** *In einem sphärischen Dreieck sind die drei Winkel gegeben, man soll die drei Seiten bestimmen.*

Auflösung.

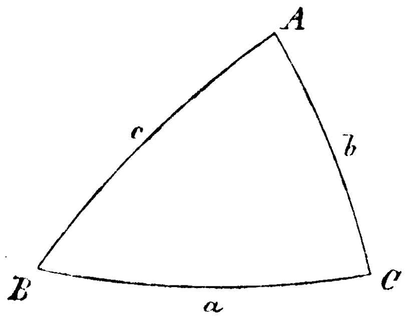

Fig. 4.

In dem Dreieck ABC (Fig. 4) seien die Winkel A, B, C gegeben; man sucht die Seiten $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Die Gleichungen II des § 30 liefern sofort für die Cos dieser Seiten die Ausdrücke:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}\,.$$

Zusatz 1.

46. Aus der ersten dieser Gleichungen folgen zunächst die zwei weitern:

$$1 - \cos a = \frac{-\cos A - \cos(B + C)}{\sin B \sin C}$$

$$1 + \cos a = \frac{\cos A + \cos(B - C)}{\sin B \sin C},$$

oder, mit Rücksicht auf $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)$:

$$1 - \cos a = -\frac{2\cos\frac{1}{2}(A + B + C)\cos\frac{1}{2}(B + C - A)}{\sin B \sin C}$$

$$1 + \cos a = \frac{2\cos\frac{1}{2}(A + B - C)\cos\frac{1}{2}(A - B + C)}{\sin B \sin C}.$$

Zusatz 2.

47. Da nun $1 - \cos a = 2\sin^2\frac{1}{2}a$ und $1 + \cos a = 2\cos^2\frac{1}{2}a$ ist, so ergeben sich hieraus die Formeln:

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos\frac{1}{2}(A + B + C)\cos\frac{1}{2}(B + C - A)}{\sin B \sin C}}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}b = \sqrt{-\frac{\cos\frac{1}{2}(A + B + C)\cos\frac{1}{2}(A + C - B)}{\sin A \sin C}}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}c = \sqrt{-\frac{\cos\frac{1}{2}(A + B + C)\cos\frac{1}{2}(A + B - C)}{\sin A \sin B}},$$

wobei zu bemerken ist, dass die Summe der Winkel $(A + B + C)$ mehr als zwei Rechte beträgt, ihre Hälfte grösser als ein Rechter und deren Cos also negativ ist.

Zusatz 3.

48. Für die Cos der halben Seiten erhält man:

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A + B - C)\cos\frac{1}{2}(A - B + C)}{\sin B \sin C}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(B+A-C)\cos\frac{1}{2}(B-A+C)}{\sin A \sin C}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(C+A-B)\cos\frac{1}{2}(C-A+B)}{\sin A \sin B}};$$

diese Formeln für die Sin (in 47) und Cos der halben Seiten sind wieder für die logarithmische Rechnung bequem.

Zusatz 4.

49. Noch wichtiger und für die Rechnung mit Logarithmen eben so bequem sind aber die aus jenen Formeln unmittelbar sich ergebenden Ausdrücke für die Tang der halben Seiten, nämlich:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A-B+C)}}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b = \sqrt{-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\cos\frac{1}{2}(B+A-C)\cos\frac{1}{2}(B-A+C)}}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c = \sqrt{-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\cos\frac{1}{2}(C+A-B)\cos\frac{1}{2}(C-A+B)}}$$

Zusatz 5.

50. Durch Multiplication je zweier dieser Ausdrücke für die Tang der halben Seiten erhält man z. B.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b = -\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}$$

und hieraus ergeben sich die zwei Gleichungen:

$$1 - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b = \frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)},$$

$$1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b = \frac{2\sin\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}.$$

Zuzatz 6.

51. Addirt und subtrahirt man dagegen wieder je zwei jener Formeln, so entsteht z. B. die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a \pm \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b$$
$$= \frac{\left(\cos\frac{1}{2}(B+C-A) \pm \cos\frac{1}{2}(A+C-B)\right)\sqrt{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}}{\sqrt{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}}.$$

Da nun $\operatorname{tg}\frac{1}{2}c = \sqrt{-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\cos\frac{1}{2}(C+A-B)\cos\frac{1}{2}(C-A+B)}}$ ist, so geht die letzte Gleichung über in:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a \pm \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b = \frac{\left(\cos\frac{1}{2}(B+C-A) \pm \cos\frac{1}{2}(A+C-B)\right)\operatorname{tang}\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}.$$

Zusatz 7.

52. Hieraus erhält man durch Vereinigung der zwei Cos im Zähler die beiden Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b = \frac{2\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(A-B)\operatorname{tang}\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b = \frac{2\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}C\operatorname{tang}\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}.$$

Zusatz 8.

53. Ganz ähnlich wie in § 43 ergeben sich hieraus die Formeln für die Tang der halben Summe zweier Seiten:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+c) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+C)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b+c) = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a.$$

Zusatz 9.

54. Und ebenso für die Tang der halben Differenz zweier Seiten:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a-c) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-C)}{\sin \frac{1}{2}(A+C)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} b$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b-c) = \frac{\sin \frac{1}{2}(B-C)}{\sin \frac{1}{2}(B+C)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a .$$

Die Formeln werden sich auch für die folgenden Aufgaben sehr nützlich zeigen.

Aufgabe VIII.

g. 4. **55.** *In einem sphärischen Dreieck sind zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben; man soll die dritte Seite und die beiden andern Winkel bestimmen.*

Auflösung.

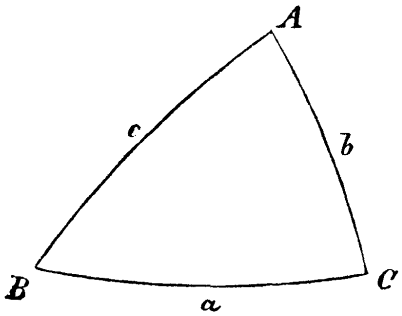

Fig. 4.

In dem Dreieck ABC seien die zwei Seiten $AB = c$, $AC = b$, sowie der zwischenliegende Winkel A gegeben; zu berechnen sind die Seite $BC = a$ und die Winkel B und C.

Die dritte Formel der Gruppe III in § 30 liefert unmittelbar a aus:

$$\cos a = \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c ;$$

ferner erhält man B aus der dritten Formel der Gruppe IV ebendaselbst mittels:

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin A \operatorname{tg} b}{\sin c - \operatorname{tg} b \cos c \cos A}$$

und demnach C nach Analogie aus:

$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin A \operatorname{tg} c}{\sin b - \operatorname{tg} c \cos b \cos A}$$

Die Ausdrücke für die Cotg der gesuchten Winkel sind etwas bequemer, so dass die folgenden drei Gleichungen die Auflösung unserer Aufgabe enthalten:

$$\cos a = \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c\,,$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\sin c \operatorname{ctg} b - \cos c \cos A}{\sin A}\,,$$

$$\operatorname{ctg} C = \frac{\sin b \operatorname{ctg} c - \cos b \cos A}{\sin A}\,.$$

Zusatz 1.

56. Da $\cos b \cos c = \frac{1}{2}\cos(b-c) + \frac{1}{2}\cos(b+c)$ und $\sin b \sin c = \frac{1}{2}\cos(b-c) - \frac{1}{2}\cos(b+c)$ ist, so kann der Cos der Seite a auch auf folgende Art ausgedrückt werden:

$$\cos a = \tfrac{1}{4}\cos(A-b+c) + \tfrac{1}{4}\cos(A+b-c) - \tfrac{1}{4}\cos(A-b-c) \\ - \tfrac{1}{4}\cos(A+b+c) + \tfrac{1}{2}\cos(b-c) + \tfrac{1}{2}\cos(b+c)\,.$$

Zusatz 2.

57. Für die logarithmische Rechnung ist übrigens diese Formel noch unbequemer als die ursprüngliche. Indessen kann man diese letztere zur Rechnung mit Logarithmen geeignet machen durch Einführung eines Winkels u mittels der Gleichung $\operatorname{tg} u = \frac{\cos A \sin b}{\cos b}$ oder $\operatorname{tg} u = \cos A \operatorname{tg} b$; mit Benutzung des so zu bestimmenden Winkels u wird:

$$\cos a = \operatorname{tg} u \cos b \sin c + \cos b \cos c = \frac{\cos b \cos(c-u)}{\cos u}\,,$$

so dass nunmehr alles für die logarithmische Rechnung der Seite a sehr bequem ist.

Zusatz 3.

58. Derselbe Winkel u, zu bestimmen aus $\operatorname{tg} u = \cos A \operatorname{tg} b$, macht auch die Gleichung für den Winkel B zur Rechnung mit Logarithmen geeigneter; es wird

$$\operatorname{tang} B = \frac{\sin A \operatorname{tg} b}{\sin c - \operatorname{tg} u \cos c} = \frac{\sin A \operatorname{tg} b \cos u}{\sin(c-u)} = \frac{\operatorname{tg} A \sin u}{\sin(c-u)}.$$

Den dritten Winkel C wird man aus $\sin C = \frac{\sin A \sin c}{\sin a}$ bestimmen.

Zusatz 4.

59. Die bequemste Art der Berechnung der Winkel B und C folgt aber aus den Formeln in den §§ 43 und 44. Danach ist nämlich:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B+C) = \frac{\cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2}(b+c)} \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} A$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{\sin \frac{1}{2}(b-c)}{\sin \frac{1}{2}(b+c)} \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} A.$$

Aus halber Summe und halber Differenz ergeben sich B und C unmittelbar; und man kann dann auch die dritte Seite a zuletzt berechnen nach

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B} \sin A = \frac{\sin c}{\sin C} \sin A .$$

Aufgabe IX.

Fig. 4. **60.** *In einem sphärischen Dreieck sind gegeben zwei Winkel und die zwischen ihnen liegende Seite; man soll den dritten Winkel und die beiden übrigen Seiten berechnen.*

Auflösung.

Es sei ABC das Dreieck, in dem die Winkel A und B und die Seite $AB = c$ bekannt sind; gesucht werden der dritte Winkel C und die Seiten $AC = b$ und $BC = a$. Aus der ersten Gleichung der Gruppe II in § 30 erhält man zunächst:

$$\cos C = \cos c \sin A \sin B - \cos A \cos B;$$

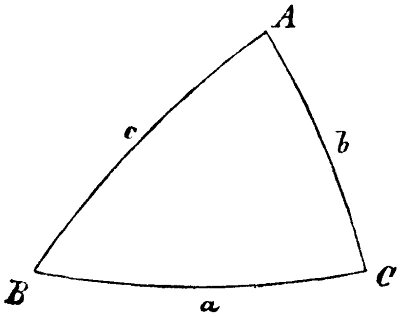

Fig. 4.

ferner liefert die dritte Gleichung der Gruppe IV:

$$\operatorname{tg} b = \frac{\sin c \operatorname{tg} B}{\sin A + \cos c \cos A \operatorname{tg} B}$$ und nach Analogie wird

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin c \operatorname{tg} A}{\sin B + \cos c \cos B \operatorname{tg} A} .$$

Es ergiebt sich damit also, wenn an Stelle der Tang der Seiten ihre Cotg genommen werden, die in den folgenden drei Gleichungen enthaltene Auflösung:

$$\cos C = \cos c \sin A \sin B - \cos A \cos B$$

$$\operatorname{ctg} a = \frac{\operatorname{ctg} A \sin B + \cos c \cos B}{\sin c}$$

$$\operatorname{ctg} b = \frac{\operatorname{ctg} B \sin A + \cos c \cos A}{\sin c} .$$

Zusatz 1.

61. Bequemer erhält man die zwei Seiten aus den für die logarithmische Rechnung sich besser eignenden Formeln der §§ 52 und 53:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (a + b) = \frac{\cos \frac{1}{2} (A - B)}{\cos \frac{1}{2} (A + B)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (a - b) = \frac{\sin \frac{1}{2} (A - B)}{\sin \frac{1}{2} (A + B)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c .$$

Zusatz 2.

62. Nach Bestimmung der Seiten a und b erhält man den Winkel C aus

$$\sin C = \frac{\sin A}{\sin a} \sin c = \frac{\sin B}{\sin b} \sin c ;$$

auch liesse sich der $\cos C$ mit Hülfe der Cos von Combinationen der gegebenen Stücke ausdrücken durch:

$$\cos C = \tfrac{1}{4} \cos (c + A - B) + \tfrac{1}{4} \cos (c - A + B) - \tfrac{1}{4} \cos (c - A - B)$$
$$- \tfrac{1}{4} \cos (c + A + B) - \tfrac{1}{2} \cos (A - B) - \tfrac{1}{2} \cos (A + B) .$$

Aufgabe X.

Fig. 4. **63.** *In einem sphärischen Dreieck sind bekannt zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen; oder zwei Winkel und die Gegenseite des einen. Man soll die übrigen Stücke des Dreiecks bestimmen.*

Auflösung.

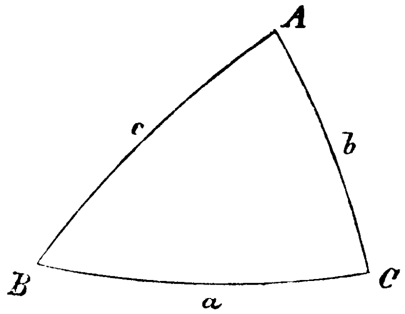

Fig. 4.

Im Dreieck ABC seien im ersten Fall gegeben die zwei Seiten $BC = a$ und $AC = b$, sowie der Winkel A, der Gegenwinkel von a. Es ergiebt sich dann sofort der Winkel B, der Gegenwinkel der zweiten gegebenen Seite, aus $\sin B = \frac{\sin A}{\sin a} \sin b$.

Im zweiten Falle seien A und B die gegebenen Winkel, $BC = a$ die gegebene Seite; man erhält dann zunächst die Seite b aus $\sin b = \frac{\sin a}{\sin A} \sin B$.

Im einen und andern Fall kann man also als gegebene Stücke ansehen die zwei Seiten $BC = a$ und $AC = b$, sowie die ihnen gegenüberliegenden Winkel A und B; man hat aus diesen Stücken die Seite $AB = c$ und den Winkel C zu berechnen.

Die erste Formel der Gruppe IV liefert:

$$\sin a \operatorname{tg} C - \sin B \operatorname{tg} c = \cos a \cos B \operatorname{tg} C \operatorname{tg} c\,,$$

und also auch, mit Vertauschung der Seiten a und b und gleichzeitig der Winkel A und B:

$$\sin b \operatorname{tg} C - \sin A \operatorname{tg} c = \cos b \cos A \operatorname{tg} C \operatorname{tg} c\,.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen das eine mal $\operatorname{tg} C$, das andere mal $\operatorname{tg} c$, so erhält man:

$$\operatorname{tg} c = \frac{\sin A \sin a - \sin B \sin b}{\sin A \cos B \cos a - \cos A \sin B \cos b} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin A \sin a - \sin B \sin b}{\cos B \cos a \sin b - \cos A \sin a \cos b}\,.$$

Und diesen Gleichungen ist noch hinzuzufügen:

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a\,.$$

Zusatz 1.

64. Aus $\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$ folgt, dass die Gleichungen für $\operatorname{tg} c$ und $\operatorname{tg} C$ auch so geschrieben werden können:

$$\operatorname{tg} c = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\cos B \sin A \cos a - \cos A \sin b \cos b} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin B \cos B \cos a - \sin A \cos A \cos b}.$$

Zusatz 2.

65. Bequemere, besonders für die logarithmische Rechnung sich besser eignende Formeln erhält man aber auch hier wieder durch Benutzung der Gleichungen in den §§ 43, 44, 53 und 54, nämlich:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-b),$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Aufgabe XI.

66. *Die Oberfläche eines beliebigen sphärischen Dreiecks zu bestimmen.*

Auflösung.

Es sei EOM das gegebene Dreieck und es werden, wie oben in § 17, die Seite OE mit a, der Winkel OEM mit α, der Winkel EOM mit y, die Seite OM mit x und der Winkel OME mit φ bezeichnet. Das unendlich schmale Dreieck

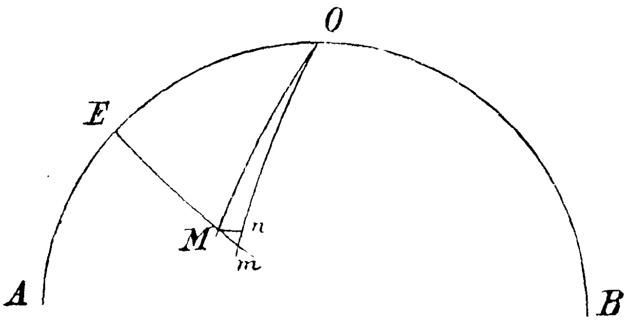

Fig. 3.

MOm ist das Differential der gesuchten Dreiecksfläche; und da $mn = dx$ und $Mn = dy \cdot \sin x$ ist, so wird das Differential von MOm durch das Product $dy \cdot dx \cdot \sin x$ ausgedrückt, so dass

$$MOm = dy \int dx \sin x = dy\,(1 - \cos x) \qquad \text{ist}$$

und demnach die gesuchte Dreiecksfläche aus

$$EOM = y - \int dy \cos x \qquad \text{sich ergiebt.}$$

Da nun oben gefunden worden ist

$$dy = \frac{C\,dx}{\sin x \sqrt{\sin^2 x - C^2}},$$

so geht der letzte Ausdruck über in:

$$\text{Fläche } EOM = y - \int \frac{C\,dx \cos x}{\sin x \sqrt{\sin^2 x - C^2}}.$$

Ferner ist, wegen $C = \sin a \sin \alpha$, $\sin \varphi = \frac{C}{\sin x}$, und $\cos \varphi = \frac{\sqrt{\sin^2 x - C^2}}{\sin x}$ gefunden worden; es ist demnach:

$$d\varphi \cos \varphi = -dx \frac{\cos x}{\sin^2 x}, \quad \text{also} \quad d\varphi = -\frac{C\,dx \cos x}{\sin x \sqrt{\sin^2 x - C^2}} \quad \text{und}$$

$$-\int \frac{C\,dx \cos x}{\sin x \sqrt{\sin^2 x - C^2}} = \varphi + \text{Const.}$$

Für die Oberfläche des Dreiecks EOM erhält man damit:

$$EOM = y + \varphi + \text{Const.} = \alpha + y + \varphi - \text{Const.}$$

Um den Werth der Const. zu bestimmen, sei $y = 0$, womit $\varphi = 180^\circ - \alpha$ wird; die mit dieser Annahme verschwindende Dreiecksfläche wird also $= 180^\circ -$ Const., d. h. die Const. ist $= 180^\circ$. Die Oberfläche des Dreiecks EOM ergiebt sich demnach $= \alpha + y + \varphi - 180^\circ$.

Zusatz 1.

67. Um die Oberfläche eines beliebigen sphärischen Dreiecks zu finden, hat man also, wenn der Halbmesser der Kugel die Längeneinheit ist, nur den Ueberschuss der Summe der drei Winkel des Dreiecks über zwei Rechte zu bilden. Auf einer Kugelfläche von beliebigem Halbmesser ist der ge-