Actes

du

PREMIER CONGRÈS INTERNATIONAL DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

(Commission Internationale de l'Enseignement mathématique, CIEM)

LYON, 24–30 AOÛT 1969

Proceedings

of the

FIRST INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION

(International Commission on Mathematical Education, ICMI)

LYON, 24–30 AUGUST, 1969

Editor:

THE EDITORIAL BOARD OF EDUCATIONAL STUDIES IN MATHEMATICS

D. REIDEL PUBLISHING COMPANY / DORDRECHT-HOLLAND

CONTENTS

The editors regret that the address of Z. P. Diénès, 'La mathématique à l'école primaire', could not be inserted.

HANS FREUDENTHAL

ALLOCUTION DU PREMIER CONGRÈS INTERNATIONAL DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE LYON, 24–31 AOÛT 1969

Le 29 juillet 1654 un Français écrivait à un autre: "Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris." Lyon est à distance égale de ces deux, et il me semble que la vérité ne doit pas être autre ici et après trois siècles.

Les correspondants dont je vous parlais, étaient Pascal et Fermat. C'est une grande découverte de constater certaines propriétés d'invariance de la vérité, mais à vrai dire, cette correspondance traitait d'une découverte plutôt technique, du calcul des probabilités, où Pascal et Fermat venaient de faire leurs premiers pas. Pascal fut l'interprète de ce sentiment de surprise extrême que chaque mathématicien a éprouvé maintes fois quand deux méthodes conduisaient au même résultat, quand deux mathématiciens développaient indépendamment des idées équivalentes.

La correspondance tournait autour de deux problèmes dont on dit qu'ils avaient été posés par le fameux Chevalier de Méré. Ce joueur savait – peut-être c'était une vieille expérience – qu'il était favorable de parier sur l'apparition d'au moins un six en quatre coups de dé et il se sentit dupé quand avec deux dés il apparut défavorable de parier sur au moins un six double dans 24 coups. En effet c'était un résultat étrange. Avec deux dés il y a six fois le nombre de possibilités qu'avec un seul et par conséquent si un seul dé demande une série de quatre pour un pari paritaire, elle devrait six fois quatre avec deux dés. C'est simple comme bonjour, d'après la règle de trois. Le calcul effectif des probabilités montrait que la probabilité d'un six au moins en quatre coups avec un seul dé, est de $1-(\frac{5}{6})^4 \sim 0.516$, celle d'un six double au moins en 24 coups avec deux dés est de $1-(\frac{35}{36})^{24} \sim 0.491$, ce que de Méré appela un scandale. L'autre problème du Chevalier de Méré était celui "des partis". Deux joueurs ont contracté une série de jeux; la probabilité de gagner un seul est un demi pour chacun des joueurs; celui qui accumulerait le premier cinq jeux gagnés, recevrait la mise en jeu. Par force majeure la série doit être interrompue au moment où A a gagné quatre et B trois jeux. La question se pose de partager la mise. Les uns proposaient le partage de 4:3 pour A contre B, les autres insistaient sur $(5-3):(5-4)$. En supposant la série continuée, Pascal montra que les chances de A et de B d'aboutir à 5 jeux étaient de 3:1, et c'est alors la proportion juste d'après la mise doit être partagée. Une autre fois la règle de trois a échoué.

J'aime cette histoire parce qu'elle jette une lumière éclatante sur le grand problème de l'enseignement mathématique. De Méré et ses camarades de la table de jeu qui appliquaient la mathématique aux jeux, étaient sans doute des gens bien instruits. Ils connaissaient le calcul arithmétique et la règle de trois, et il est bien naturel qu'ils appliquaient ce qu'ils avaient appris. On sait bien qu'il y a des cas où, au lieu de la règle de trois directe, on doit se servir de sa version inverse, mais en somme c'est toujours, pour ainsi dire, une fonction linéaire. Même aujourd'hui le physicien qui doit expliquer théoriquement une fonction empirique, commencerait avec la supposition qu'elle soit linéaire, ce qui en bien des cas sera approximativement vrai. Dans le cas des deux dés l'extrapolation linéaire est même très bonne, mais la déviation, quelque faible qu'elle soit, suffisait pour que de Méré perdît sont argent. Il faisait l'erreur de se fier aux mathématiques faites qu'il avait apprises; s'il en avait appris moins, il se serait fié aux mathématiques à faire, c'est-à-dire au bon sens. Voilà le grand problème de l'enseignement mathématique: d'unir les forces de la mathématique faite qu'on apprend, et de la mathématique à faire qu'on doit créer lui-même.

Je continue en anglais.

In fact I think this has been and still is the big problem of mathematical education. Mathematics involves general principles and universal techniques. Teachers like teaching techniques, because students like learning techniques, trustworthy techniques that never fail. Techniques are necessary as a means of mastering nature and society, but techniques are also dangerous if their validity is overestimated. Nobody can teach and nobody can learn enough prefabricated mathematics to meet all possible mathematizable situations. Moreover a mathematical subject that has reached the state of a technique, can with more efficiency be handled by machines than by man.

Mathematics is more than a technique. Learning mathematics is acquiring an attitude of mathematical behaviour. Mathematics was granted a place in education because educators valued it as a whetstone of wit, as powerful as Latin or even more powerful. Meanwhile mathematics has become an indispensable tool in our civilization. Mathematicians are inclined to teach mathematics as an aim in itself because they know and cultivate mathematics as such. But as soon as they look around they will notice that mathematics as an aim in itself counts for a very small minority only. For all others mathematics is important enough to play a part in their education. Mathematics should be taught to be fully integrated by the learner, which means that he should enjoy it and know how to use it if need be. Mathematics should not be taught as an aim in itself but with a view to its educational consequences. Mathematics should not be taught to fit a minority, but to everybody, and they should learn, not only mathematics but also what to do with mathematics. This does not mean teaching applied mathematics, but rather creating an attitude, the attitude of discovering mathematics whereever it applies.

Il n'est pas douteux que de toutes les branches de l'éducation, la mathématique marche en tête du renouvellement. Ce fut d'abord une réforme des programmes. On découvrit que l'enseignement ne devait pas ignorer les grands principes que la mathématique avait développés pendant un siècle. Bientôt la discussion se déplaça aux méthodes. On découvrit que les nouveaux programmes demandaient et favorisaient de nouvelles méthodes didactiques. On apprit qu'il faut subordonner le programme et la méthode au but général de l'éducation mathématique et intégrer l'éducation mathématique à l'éducation générale. On s'attacha à la rééducation des maîtres qui doivent enseigner cette nouvelle mathématique avec de nouvelles méthodes, les yeux fixés sur des buts nouveaux dans une société se renouvelante.

Vous vous êtes réunis au premier Congrès International de l'Enseignement Mathématique, mais depuis le début de ce siècle la CIEM a exercé une activité internationale et comme la mathématique même le mouvement récent de renouvellement de l'enseignement n'a pas connu de frontières. La mathématique fut la première science de l'humanité et elle est devenue la première dans l'histoire de beaucoup de nations nouvelles. Il y a alors des mathématiciens presque partout où vivent des hommes. C'est notre tâche de les aider à faire des recherches et à élever de jeunes mathématiciens.

Evidemment la vérité est la même à Toulouse et à Paris. Mais le monde s'est élargi. On peut substituer à ces deux cités françaises quelqu'autre paire d'endroits du globe terrestre. Ou ne serais-je pas plus actuel, si je parlais de la vérité qui est la même sur la Terre et la Lune? Quand-même j'ai insisté à Paris et Toulouse, cités d'un pays qui depuis des siècles a contribué non seulement à la mathématique, mais aussi à la culture de son enseignement. Pour le passé il suffit de rappeler le nom de Clairaut, grand pédagogue de la géométrie et premier renovateur depuis l'antiquité. Pour le présent chaque mathématicien sait dans quelle mesure l'école mathématique française a contribué à donner à la mathématique cette forme où elle peut être enseignée à plus de monde que jamais, à tout le monde, et chaque homme actif dans l'enseignement mathématique connaît les noms de ses collègues français qui se sont battus en première ligne pour les idéaux du renouvellement.

Par droit de primogéniture la France était destinée de loger ce Premier Congrès International de l'Enseignement Mathématique. Nous sommes heureux que nos collègues français aient voulu se charger de cette tâche lourde, mais pleine de promesse. Je vous assure que ce n'était pas une sinécure d'organiser ce congrès.

By coming to this place in such a large number you have proved that mathematical education is a big thing. I am sure this congress will prove that it is a great thing, too. On behalf of those who have worked hard to make this congress a success I welcome you and I invite you to use this week of scientific and social events as a great opportunity to exchange experiences and ideas, to meet people from nearby and far away, and to enjoy all good things this country and this city can offer you.

BENT CHRISTIANSEN

INDUCTION AND DEDUCTION IN THE LEARNING OF MATHEMATICS AND IN MATHEMATICAL INSTRUCTION

I. INTRODUCTION

I appreciate very much having been invited to give an address to this first international congress. I hope that my remarks – being of a rather general nature – may have the interest of the audience.

It is my belief that the very necessary changes in the millions of classrooms with regard to the approach to mathematical education will not take place unless we explain ourselves at many levels of language. At one level we will have to convince the students at universities and training colleges of the necessity of using new means. At other levels of communication, we will have to motivate for debate the participants in the in-service training, the students in the schools and certainly also the parents and the authorities. While the research increases with regard to mathematical teaching, thereby providing sharper and stronger answers to important educational problems, it is thus in my opinion – for implementation purposes – still necessary to discuss in a general way the philosophy of mathematical education.

II. THE PREPARATION OF THE USE OF THE AXIOMATIC METHOD

Let me begin my address by stating a view on mathematics in the following way:

The foremost goal of mathematics on scientific level is *the study of structures.*

The most important means for the attainment of this goal is the *axiomatic method.*

If this is accepted – and I think general acceptance is at hand among mathematicians – what are then *the consequences for school teaching*? My own answer is, that even if the use of the deductive method has been dominant in all teaching of mathematics up to our days, and even if deduction is an indispensable part of any axiomatic development, then the relevant preparation of the use of the axiomatic method – on any level of school teaching – consists in an application of the inductive approach to a degree that goes far beyond what is at present customary [1].

It is to-day generally accepted that the speed with which our knowledge is increased implies that one of the foremost aims of any teaching is to enable students to gain further knowledge on their own, or – put in another way – it is an all important goal for education in school in general to teach students *how to learn* [2]. The meeting of this goal will strongly influence the whole organization of the teaching of mathematics. Its obtainment will in my opinion through all grades in school make the use of the inductive approach indispensable.

III. DEVELOPMENT OF LEARNING ABILITY

When we agree that it is a most important task of the teacher to give the individual student the best possible conditions for developing *learning ability* we will have to promote certain views and attitudes and certain working methods in the student himself. In order to establish such views and attitudes in the individual student special measures must certainly be taken with regard to the planning of the whole teaching situation. Thus, if we – for the sake of the argument – accept both the inductive approach and the deductive method as important means for the student himself in his *learning of mathematics*, then it becomes conclusive in what way these two themes are presented by the teacher in *the mathematical instruction.*

In the preceding remarks I have loosely pointed to the interrelationship between the general question of goals and means in the teaching of mathematics and the four themes of this address: The inductive approach, the deductive method, the mathematical instruction, and the learning of mathematics. I shall now try to characterize each of these themes individually:

IV. THE INDUCTIVE APPROACH

The inductive approach [3] is for me a special working method applicable by any human being trying to obtain cognition with regard to any field of knowledge. The situation in which the inductive approach is used may be a narrow one, as is the case if the person is occupied with some clearly specified problem in some specified context, or the situation may be wide, as is the case if the person is occupied with a complex of unspecified and vaguely stated problems without any known connection to well established fields of knowledge for the person in question. The characteristics of the inductive approach may now be stated in the following schematic way:

(1) The person engage himself in experiments with or within the situation at hand. The experiments may be concerned with objects of a physical nature or with objects created by the mind as concepts, structures or whole theories. Further the experiments may be of a trial-and-error type, or they may from the start (or at least nearly so) be carried out after some system or plan.

(2) During the experimentation the person observes the result of each experiment. In some cases no conscious recording is made of the observations, but all the same a transfer is taking place from the basic (and often perceptual) level of the experiments to some higher and clearly conceptual level. In other cases the observations are recorded in the memory, and in still other cases a conscious recording takes place by use of tables or reports; also in these cases the observations give rise to conceptual activity.

(3) The observations – and the thought-processes in connection with the observations – may now give rise to an awareness of (or even a formulation of) some hypothesis regarding the situation. The person guesses about the problem in consideration. In many cases the hypothesis has the form of a generalization including all the examples observed as special cases.

(4) Further experiments may now be carried out in order to test the hypothesis. For instance it could be observed if necessary consequences of the premisses are fulfilled under the hypothesis, or it may be observed if a generalization covers the result in new special cases.

(5) A deductive framework is sought, inside which a proof may be given of the hypothesis. Such a proof may be given in some axiomatic theory having a model (practical or theoretical) comprising the original problem.

In short, the inductive approach (in one of its forms) may be characterized in the following four steps: (1) Experimentation. (2) Observation. (3) Forming of a hypothesis. (4) Further experimentation in order to test the hypothesis.

The deductive reasoning described in (5) above does not belong to the inductive approach. However, it should be observed that the inductive approach forms a strong motivation for a subsequent use of deduction with regard to verification (or falsification) of the hypothesis (relative to some mathematical model).

V. THE DEDUCTIVE METHOD

The use of the deductive method could be passed by at this occasion on the ground that the theme is well-known by this audience. However, let me give a few comments: First, let us regard the concept of proof in some formal axiomatic theory. A formula "*T*" may in such a setting be recognized as proved, if and only if a column of strings (of symbols of the theory) may be established such that each string is a formula of the theory, and such that the formula "*T*" is the last line in the column, while each other line is either an axiom of the theory or a consequence of one or more preceding lines (by rules of inference belonging to the axiomatic theory). Now, clearly, this idea of deduction is very far apart from the deduction belonging to the field of elementary mathematics as treated in schools to-day. What *do* we mean by the deductive method, if we argue that this method should be used in the teaching of mathematics at secondary level?

During the primary school the child collects lots of experiences with regard to the nature of its surroundings. On a perceptual basis of reference concepts are formed and conceptual processes are started regarding predicates which shall later become a part of mathematics, even if at that later stage the cognition will have been carried much further, and the "nature" of the objects of space and of intellect much changed. This whole phase is clearly governed by the inductive approach, even if this is not always recognized and, therefore, not sufficiently taken into account in the planning of the education in schools. In these years the child especially acquires a large amount of knowledge about numbers and operations on numbers and also about geometric concepts. The knowledge is "stored" as general statements (of the form: "$\forall x \in E: P(x)$") which are accepted as true mostly by generalization from observation of examples. If the mathematics curriculum was more extensive the experiences and the acquired knowledge would also comprise elements of probability theory, or regarding algebraic structures or topology.

When "explanations" are given in later grades of the primary school, and in the early grades of secondary school, they mostly consists of references to such statements accepted by the child to be generally true. Also arguments are given in order to demonstrate that a statement "Q" is true in all cases where (for instance) two statements "P_1" and "P_2" are both true. Again, such arguments may consist of references to "facts" known from earlier stages; but furthermore statements are often used as being true without *any* reference to background knowledge. That this is the case you may realize by thinking through how the traditional proof is given for a theorem such as "The opposite sides in any parallelogram are of equal length".

However, we should not show any respect for such reasoning. If a student is motivated to follow the argumentation – or better to give his own arguments – his cognition of the "objects" under consideration may become deeper and broader, and links may be formed among general statements of different nature. If we do not accept the "intuitive arguments" at the intermediate level we run a serious risk of turning out students about whom it might at later stages be said: "They have no intuition at all! Why can't they see this – it's so obvious!" At the intuitive level we shall not in all cases feel obliged to *prove* things to be true. Often it is really our primary object to convince students by very informal arguments that something has to happen in all situations of a certain type. Also, we should recognize that the informal arguments have important features common with the deductive method as used at later stages, for instance in connection with an axiomatic theory.

Just as other fields of elementary mathematics has been reoriented in the last decades, such that the whole presentation has become "saner", it is possible to give students at the primary level (and certainly at the intermediate level) manifold occasions to follow shorter arguments, where the similarity to proving on later levels is quite clear. One topic to be mentioned in this connection is the solution of open statements. Moreover, in connection with problem solving (still utilizing the inductive approach) it will over and over be the case that the learner thinks analytically: "If I had a solution, then *this* would also be the case. Hence, the only possible solution is ..." Or: "I cannot use this as a solution, because then I would have *that*, which would not be true under the conditions given." This means that one of the most important features of deductive reasoning becomes thoroughly familiar to the student. On such grounds the first steps may be taken for a proper treatment of elements of logic including dealing with truthfunctions, equivalences, and also some few rules of deduction [4].

VI. THE MATHEMATICAL INSTRUCTION

The mathematical instruction covers for me a more narrow field than the teaching of mathematics. The latter comprises all kinds of activities by which the teacher tries to impart information and attitudes to the learner. The former is more directly concerned with the furnishing of necessary information and skills. In the traditional setting the teacher's rôle as instructor was rather prominent. The presentation of the subject-matter, the explanation of difficult points, the indoctrination of modes of speaking and writing, the preparation of exercises etc. belonged in many cases to the most important tasks of the teacher, and they were performed normally for the whole class at a time. To-day, however, these phases of the teacher's job are of decreasing importance. More and more weight is placed upon the teacher's ability to inspire the students to personal activity or to create informal discussions about mathematical situations in the classroom. All the same, when asking for means to the attainment of goals for the teaching of mathematics it is still relevant to point out such measures that may be taken in connection with the mathematical instruction.

VII. THE LEARNING OF MATHEMATICS

Finally a few comments on *the learning of mathematics*: It has already implicitly been stated that one thing is the view on the organization of the teaching of mathematics to a class of students as seen from the teacher, and quite another thing is the situation in the classroom as seen from the individual learner. In order to ensure that *learning of mathematics* can take place special measures must be taken by the teacher, such that each student acquires working methods by which he is able to enlarge his knowledge of mathematics independent of the teacher. The motivation of students to personal activity with mathematical situations becomes highly important, while reproduction of definitions and proofs of theorems (all important in connection with the traditional mathematical instruction) may be without much value.

VIII. GENERAL GOALS FOR THE TEACHING OF MATHEMATICS

I shall now – in order to have a proper setting for my discussion of the rôle of the inductive approach and the deductive method – give an outline of goals of the teaching of mathematics which are in my opinion relevant with regard to our own time. I shall start by stating the primary aims in a most general way as a two-fold aim, which in its first part (a) takes into consideration the need of the individual, and in its second part (b) the need of society [5]:

(a) An adequate contribution to the preparation of the individual student for his own life taken in narrow sense.

(b) An adequate contribution to the preparation of the individual student for subsequent education taken in broader sense.

I remark at once that obviously extensive fields are common to (a) and (b), and further, that this two-fold aim in my opinion could be adopted by any school subject whatever.

In accordance with (a) the teaching of mathematics to-day must be organized in such a way that the individual can have easy access to such phases of mathematics that can give him personal satisfaction or enrichment; and moreover – in accordance with (b) – in such a way that he is best possibly prepared to gain further knowledge. Thus the need of society for categories of persons having special training is obviously taken into account under the heading (b).

IX. PRIMARY GOALS AND SECONDARY GOALS

Asking for the means to the attainment of the two-fold aim I arrive at several derived aims, still of a general nature. In Table I I have listed the primary goals (a) and (b) in a more extensive version, and then several secondary (or derived) goals. Each of these goals may now be regarded as a goal in its

TABLE I

(a) The teaching of mathematics shall make its contribution to the preparation of the individual student for life in general, regardless of his possible function in society and of his possible view of life.
(b) The teaching shall make its contribution to the preparation of the individual student for subsequent learning and education – in mathematics as well as in other subjects – both at school and afterwards.

Cognition of mathematics as a means of description of the surrounding world and of our intellectual processes in general. Recognition of the possibility to make predictions concerning practical situations relative to a chosen mathematical description.	Recognition of mathematics as an open subject, constantly being developed and changed.	Acquisition of such an attitude towards mathematics that the fundamental rôle of problem solving is recognized, and such that the activities combined with problem solving are regarded as intriguing, interesting and, to some extent, joyful.	Appreciation of mathematics as a deductive theory, and especially of the rôle of the axiomatic method.
Recognition of the value of the inductive approach in all mathematical activities to such an extent that this approach becomes the natural working method in the learning of mathematics.	Appreciation of the aesthetic values of mathematics, for instance, the joy of experimentation with mathematical situations, the joy of finding patterns, of designing presentation of ideas, of solving problems, of proving theorems.	Ability to communicate in and about mathematics at a level of precision corresponding to the situation at hand.	Ability to study mathematics on one's own, and, more generally, capability of self education.
Understanding of the subject matter in the chosen curriculum, that is true acquisition of concepts, knowledge of links between the various concepts and of the rôle of patterns and structures as unifying components in the body of mathematics.	Knowledge of the rôle of the daily language in the building of mathematical structures and knowledge of the first elements of logic.	Ability to set up correspondences between practical situations on the one side and mathematical concepts or structures on the other. Further, capability of using the *chosen* model to find answers (relative to the model) to problems connected with the original practical situation.	

own right for the teaching of mathematics, but it has been set down as a means of obtaining the goals (a) and (b). Clearly, the derived goals have also extensive common ground, and – therefore – in many cases the work for fulfilment of one of these goals will also serve towards the fulfilment of one or more of the others.

X. THE HIERARCHY OF GOALS

The outline shows that the goals form a hierarchy. This would become still more obvious if we now did proceed by asking what means could serve to the obtainment of the derived aims. We would then be brought into contact with special mathematical topics, and we would have to make a choice of mathematical procedures and pedagogical methods permitting the attainment of the goals.

If we, for instance, want to give students at the intermediate level *understanding of mathematics*, we have to ask for unifying concepts and structures. Hence we end by advocating the use of the language of sets, relations, and functions, as well as the use of structures like groups and vector spaces. If we want to give *joy* and *insight into the aesthetic values of mathematics* we end (presumably) by advocating the use of the inductive method. Wanting to show *mathematics as an open field* leads to the necessity of leaving some topics open for further discussion, and indicates that it is poor pedagogy to "deliver" all mathematics considered in nice finished packets. Wanting to show *the special rôle of language*, as well as wanting to teach *how to read mathematics*, calls for a treatment of some parts of logic, but also rises the need of pedagogical means that can motivate young children to personal activity with mathematical text-material. Having as a goal that students may be able *to communicate in and about mathematics* most certainly calls for new pedagogical approaches. The need of *understanding the rôle of the deductive method* calls for knowledge of other parts of logic. The need of showing *how to apply mathematics* calls for knowledge of numbers and operation on numbers, knowledge of geometry, of analysis, of statistics, etc. etc., and ultimately for insight into the axiomatic method.

XI. THE SUBJECTIVE NATURE OF THE DIDACTICAL DISCUSSION

In the preceding part of my address I have made general comments on the didactics of mathematics, that is on the relation between goals for the teaching of mathematics and means that might be used to the attainment of these goals. I should like to stress that my remarks have been of a very personal nature. Obviously most comments on the goals of the teaching of mathematics in general must be of a subjective nature. One person may state what *he* finds to be the most important general goals of the teaching of mathematics. Furthermore this person may point out what are – in *his* opinion – the relevant means for the attainment of such goals. He may then write his own textbook in accordance with the views stated, and he may develop such teaching materials that can be used for the approaches to the various topics in his curriculum. In my opinion there exists no collection of goals that can – in relation to a general teaching situation – be called objectively *the proper goals*, and no means that can – at the present state of the research in the field of the didactics of mathematics – be said objectively to be *the most relevant means*. It has been argued that mathematics of to-day comprises some all important topics and some indispensable structures that should certainly be a part of any modern curriculum for school teaching. There again I disagree. An association of teachers, an experimental project, a group of influential mathematicians can each state what is regarded as the goals and the proper means. Still, such views are of a subjective nature.

It could in this light be asked if the didactical discussion is of any importance. The answer is obviously affirmative. At any time "one" can through arguments and discussions arrive at a collection of goals and means that can be agreed upon by a majority of mathematicians and mathematics teachers – or at least by a substantial number of such persons. If such goals are accepted by the authorities and laid down as rules or laws (hopefully not in a too strict manner) they become extremely important for the development of the practical teaching.

XII. CATEGORIES OF DERIVED GOALS

It is seen that the recognition of the value of the inductive approach and the appreciation of the deductive method are mentioned in my outline as secondary goals, and thereby – following my model – also as means to the attainment of other goals. The derived goals are grouped in a special way in Table I. In the first line I have listed goals which are closely connected to the question: What is mathematics? The working for such goals may transfer to students certain views and attitudes with regard to the nature and rôle of mathematics. In the second line I have listed goals that are related to the working methods of the learner himself. Finally, in the third line I have listed goals of a certain "objective" type concerning rather factual matters. It should be emphasized, however, that the goals are closely interrelated, and that the order of presentation is not meant to be fixed or to indicate any evaluation of the goals.

XIII. MATHEMATICS AND THE PHILOSOPHY OF SCIENCE

From the early history there has been a very close connection between mathematics and the philosophy of science. May I recommend that we as mathematicians and mathematics teachers in the school of our time take the responsibility to change the teaching of mathematics in such a way that the epistemological aspects are emphasized [6]. Looking at my hierarchy of goals I would accordingly recommend that all teaching of mathematics should be given under the main view that mathematics is a means of description of practical situations, or of our thoughts about such situations, as well as of our thought-processes in general. In this you will see my own answer to the question: What is mathematics? I regard mathematics as a kind of language. It is built by use of terms (including variables), predicates, and quantifiers. It contains as larger parts the various axiomatic structures as for instance groups, rings, fields, topological spaces, metric spaces, vector spaces, etc. etc. I accept that this language, mathematics, in a very few persons may have its own life. I accept that there might be some few mathematicians for whom the activities with the formal axiomatic theories are interesting and important. However, I feel absolutely confident that for nearly all mathematicians the excitement of the work with mathematics is in some way or other connected with the interrelation between some observed data and the mathematical language, or with the interrelationship between some parts of this language (for instance between various mathematical structures).

XIV. WHAT IS MATHEMATICS?

It is obvious that my formulation of the goals in the outline (Table I) is strongly influenced by my answer to the question: *What is mathematics*? Clearly the way a person regards mathematics will influence his selection of goals and later of means. Really a discussion of the nature of mathematics should precede in some way the didactical discussion of the goals or be a part of this discussion. Even if a discussion of the question posed cannot lead to any final clarification, I am sure that it will be valuable. If a teacher of mathematics has the view that mathematics is a collection of (axiomatic) structures, then his whole teaching may be influenced by this view. Such a teacher may have accepted several goals as important, but when he is trying to obtain these goals through his teaching he will – due to his view on the nature of mathematics – try to draw the students' interest towards the structures, towards the theories treated. If such a teacher has accepted as a goal that students should be able to describe daily life situations by means of the mathematical language, he may still feel that the "proper" thing does not start until you have arrived inside *his* mathematics.

Now let us on the other hand regard a teacher having the idea that mathematics shows itself *only* in connection with practical situations. Such a teacher may try to give access to various mathematical structures, but in the presentation of such structures he may over and over again emphasize the importance in relation to daily life, and he may come out with a mathematics teaching where mathematics theories as such are never regarded because the whole field treated reveals itself to the students as a mixture of practical situations and mathematical terminology, a mixture of experiments and thought-processes about these experiments.

My own view is – as already implicitly stated – between the two views I have just tried to call to your attention: I am convinced that learning of mathematics will not take place unless the student is motivated for this learning. Hence, as I want to show mathematics as a means of description, it becomes essential that the students *themselves* feel absorbed by the use of mathematical concepts for description purposes. Further, in our cognition of space and life the possibility of making predictions – for instance with regard to future events of the most varied types – is of tremendous importance. Thus it becomes necessary to develop the mathematical language to such a degree that the concept of an axiomatic theory is included in this language. Not until this concept is thoroughly comprehended and appreciated by the learner can he have true insight into the nature and rôle of mathematics in our time. Hence, I have to ask for a mathematics teaching motivating children to take personal part in the development of the mathematical language from the basic concepts, met in the first years of life, up to examples of axiomatic theories, as they may be expanded at the secondary level.

XV. THE EPISTEMOLOGICAL ASPECTS IN THE LEARNING OF MATHEMATICS

We do not need to look far for the necessary motivation: From the first year of life the child enters into engagement with its surroundings, and the growth of cognition is started. For a majority of humanity a deepening of the cognition takes place as a more or less continuous process through the larger part of the life span. In our attempt to obtain cognition of any object (of physical or intellectual nature) the object changes. You look at a thing and get a first impression of its nature. You touch the thing, and your whole view may change. You study the thing further and you put your observations in relationship to knowledge earlier acquired, and your conception of the thing – and thereby the thing itself – again changes. If you describe the thing by a language having its own structure, you interfere once again with the cognition of the thing. The description may not fit properly with all observations. Then you often start two processes: on the one hand you try to adapt your choice of description, on the other hand you study the thing further – in order to see if all observations were proper – and the thing again is recognized in a broader or deeper way than before the formulation of the description, that was not quite satisfying.

I have tried to call to your attention a very general theme from epistemology. However, it is my belief that we should take advantage of the deep impulse in the young child and student to penetrate into the unknown, to classify where there are yet no classes, to see inclusions where they are not yet pointed out, to find relations between objects under consideration, to clarify actions of one object upon other objects, etc. etc. Therefore, in schools mathematics should reveal itself to the students through *the process of description.* To this process belong: (1) preliminary discussions on suitable levels of precision of the domain to be described (and this domain may naturally itself be of conceptual type), (2) establishing of correspondences from the domain under consideration to already known fields of mathematical concepts and structures, (3) further study of the original domain in order to verify if the description was satisfactory, and (4) certainly also the further theoretical study of mathematical structures in order to find better means for the description.

XVI. ON THE USE OF "PRACTICAL SITUATIONS" IN THE TEACHING OF MATHEMATICS

The view, which I have here advocated, on the way of presentation of mathematics in schools does not mean an acceptance of the view that mathematics only shows itself in connection with practical situations. Neither is it an acceptance of the view that mathematics is a collection of structures. My opinion is in between these two views. First, let me state that (at least from the secondary level) the objects for description will often be of a conceptual nature. For instance we could engage ourselves in a feasible description of the rational numbers and the operations on these numbers, or we could try to describe the interrelationships between the distance-preserving mappings of the plane onto itself. Next, let me emphasize that considerations on conceptual levels, or – I could say – cognitive processes in general, are closely related to those domains of a perceptual nature that have formed the base of reference for the abstraction of the concepts under consideration. The most fatal mistake in mathematics teaching is the building of secondary and higher concepts on primary concepts, for which there has been given none or next to none base of reference. In the teaching of children and young students we must keep in mind that their cognition is not like ours. They have not had our experiences, they do not have our bases of reference. Where we may take a few steps back from one conceptual level to another in order to get proper grounds for our "understanding" and "thinking", they may have to use a level of even more basic nature. Hence, the preparation of the use of the axiomatic method, which also I advocate most strongly, must be made carefully through adolescence. The use of undefined or primitive objects and of axioms in the building of an axiomatic theory does not solve our problem. The primitive objects may be sets, sets of sets, relations, functions; in that case the bases of reference for these concepts certainly go far beyond the conceptual level, and hence, we are *not* in a purely theoretical phase. And as soon as we start interpretation of our axiomatic theory the need of bases of reference on various levels is obvious.

XVII. SITUATIONS FOR DESCRIPTION MUST BE PROPERLY EXPLORED

If we agree to present mathematics to children as a means of description of situations, we have the obligation to create these situations properly. Only if this is done mathematics may be experienced to be the process of description. This process can give rise to joyful situations, and it can reveal aesthetic values. When the situation for description is perceived really all tools are allowed. One should encourage children to experiment in the base of reference. One should create domains of perceptual nature on which the primitive concepts can be abstracted. Then the description takes place, but during the description one sees together with the children, that it is not working properly. Hence you have to develop your mathematical language further; but maybe you also have to look closer at the thing you are describing. Such a feed-back process could easily give rise to a mixture of objects for description and means of description, against which I have warned earlier. If, however, you are aware of a difficulty or a danger, you are able to counteract it. In our case we shall in school discuss *openly* with the children the two domains, which we – as mathematicians – want to separate. The child (and certainly the student in secondary school) will be able to make the separation. In many cases the description by means of mathematical concepts or structures will be regarded definitely as an image (a model) of the domain for description. Moreover, a choice is often made between various possible descriptions, and thereby it becomes even clearer, that our philosophy is that things do not have some fixed existence, but that we try to choose some description of them, suitable for some definite purpose, which by the way varies from situation to situation.

XVIII. ON THE FORMATION OF PRIMARY AND SECONDARY CONCEPTS

As it is well known, Z. P. Dienes has in a number of books and articles advocated that the formation of new concepts is promoted by experiences gained in rather involved situations [7]. He argues that by making the learning situation very clear and very easy in the sense that only the core of the subject matter is presented, we will not succeed in having established in the learner a concept that can be used properly in future complicated situations.

I agree with Dienes in this view on the formation of primary concepts, and also in the importance of having for smaller children concrete materials and situations as base of reference for these concepts. When the question is about the formation of secondary and higher concepts in the age group 11-up I believe, however, that this to a large extent is possible by using the language and the primary concepts in the way that is so well-known from traditional textbooks. It must be admitted that we have to-day arrived to a development of mathematics penetrating the whole society. We could not on this ground maintain that the earlier teaching of mathematics was a total failure. Certainly not. At least mathematicians and mathematics teachers have been able to pick up so much mathematics that this development of our time could take place. But what I am interested in is really not the part of the humanity that becomes mathematicians or mathematics teachers. I am interested in the huge majority of people who, all over the world, are exposed to mathematics teaching. There I hold the view that our subject in the large majority of cases has not given proper value for the very large amount of time spent on the teaching of mathematics.

Now, obviously, it is impossible to cover the large field of necessary mathematical knowledge in such a way that subsequent learning can take place on reasonable common ground, if we do not in many ways continue the usual method of building mathematics in the schools. We do not have at disposal any well described alternative. Hence we must in years to come in most countries make extended use of instruction for a whole class, and this instruction will rest on textbooks where subject-matter is developed.

Thus it becomes essential to improve the means of communication between the students and the teacher as well as the ability of the students to gain knowledge from written expositions. Here again we may turn to the idea of letting the epistemological aspects of mathematics be clearly recognized. Such a recognition is possible only if the individual learner makes extensive use of the inductive approach.

While experimenting use of languages of various types and at various levels of precision takes place. When making basic abstractions you end up by having at your disposal new concepts. Provided you have the relevant support from a teacher or a book you will also have enriched your mathematical vocabulary by some new names and some new "open" names connected to the concept. In other situations, where abstractions have taken place, you feel that you have now at your disposal new mathematical predicates.

When some part of some language in this way has become active for the learner it may be used for the further development of language. That is, secondary concepts might be formed without leaning too much on the time-consuming inductive approach.

This clearly indicates that one should try to concentrate the use of the inductive method around all such situations where new primary concepts are formed.

XIX. THE PRESENT SITUATION

I shall now in this later part of my address give some comments on such measures that may be taken in schools in the present situation in accordance with my views. I have already expressed the opinion that it is necessary to some extent to go on using the traditional planning of the teaching of mathematics. I certainly agree that the teaching should be changed, such that the needs of the individual student is taken much more into consideration than has been possible under the old-fashioned instruction of the whole class. Already to-day it is indicated by results of research in the educational field, and by results from experimental mathematics programmes, that rather radical changes should be made. However, such changes cannot possibly be made quickly. For some years to come, say around 10 years, we will have to depend mostly on teachers for whom even rather small reforms may be felt like revolutions. I should here stress that I am thinking of the changes in the educational approaches, not in the large and indispensable changes in the syllabi, which are a much smaller problem. Further, we still have to furnish lower and higher technical schools and economic schools as well as other institutions of learning with students having such knowledge of mathematics that the (often rather traditional) teaching at these institutions can be carried on without too many problems.

Even if the reform in most countries was commenced "from the top" the most relevant starting level for a programme using the inductive approach extensively is the kindergarten or the first years in primary schools. The reports from the Nuffield Project, and from several other experimental projects expanded at this level, indicate the tremendous impact on views and attitudes following arrangements of learning situations, where experimentation and mathematical description are combined from the start.

Seen as a preparation for secondary school teaching it might be felt like a serious problem at the present stage if students did not enter secondary school with a uniform foundation in the subject-matter. I believe that this danger is much overestimated. However, I shall not enter into a discussion of this theme but make my further remarks on the planning of the mathematics teaching at the early secondary level, and I shall in that connection mainly think of such cases where the students have met a rather traditional teaching in the primary school. Such cases will for many years, in many countries, be dominant.

As the students did not use the inductive approach in the previous years it is necessary to give them occasions for the formation of concepts and for the acquisition of terminology, which they are really supposed to utilize from the start. Now the stage of intellectual development for the age group 11–13 makes a revision of formerly acquired experiences optimal at the start of secondary school. Using a higher level of precision than in the earlier years the fundamental mathematical concepts and structures are brought to new and deeper recognition. In all presentations of the mathematical topics care is taken to motivate the students for personal activities with introductory material. Through examples, exercises, and rather easy problems the core of the matter at hand is brought to the attention of the individual learner. This material of examples, exercises, and problems is chosen such that experimentation *must* be commenced by each student on his own, and then carried on through observations to the possible formation of a hypothesis according to the abilities and the attitudes of the learner. Especially, all definitions are prepared inductively in this way. In most cases a definition states the use of special names for concepts. Hence, it is crucial to have – inside the learner – the awareness of the "object" to be named *previous* to this naming.

XX. THE SPIRAL APPROACH IS ESSENTIAL

In many cases new bases of reference are created – at this age level – in the learner regarding domains where he was not earlier allowed to dwell long enough before being induced to learn by heart names, terminology, and schemes for type-solutions. Therefore, the spiral approach – well-known from traditional mathematics – is very well suited for the presentation of the subject matter. Also, this approach goes very well in hand with the use of the inductive approach on the one hand, and a systematic development of the curriculum on the other hand. What concerns the situations used as ground for the inductive work, I should not in any way feel it necessary that great weight is placed upon the *practical* situations. It is much more important that the base of reference created belongs to some domain where the learner has already wide experiences. Often it is important that this base includes some field of objects that can be "handled" in some way. Again this need not mean (with larger children) that the objects are of physical nature. For instance, many types of graphical representations serve as very good grounds for abstraction purposes. This counts for an ordinary sketch of some object, and for symbolic diagrams as the Venn diagram, the arrow diagrams, or a tree-diagram. But also the handling of some mathematical symbols can be the medium, through which understanding is obtained. For instance, the learner may be so well acquainted with the use of the set builder that looking upon this symbol (with the various expressions belonging to it) may serve as a rather "concrete" base of reference for students at the secondary level.

XXI. EXPERIENCES FROM DENMARK

An approach as described above may be used in courses at the early secondary level in connection with a rather traditional planning of the mathematical instruction. This we have seen in Denmark, where in the years 1962–67 experimental teaching was carried out in the grades 6 and 7. The largest group subjected to this experimental teaching was formed by 65 classes, each averaging 25 students, who were taught through the 6th and 7th grade in the years 1965–67. The teaching was organised clearly with the mathematical instructor as being of main importance. Extensive textbooks were written, following the principles just described. In the books a rather broad text was presented in order to motivate the students for the work with each topic in the curriculum. In this text were inserted examples (where problems presented were solved in detail), exercises (easily comprehensible) giving rise to inductive work, and problems of very varying degree of difficulty. A special feature should here be mentioned. After each preparation of some definition, made by careful use of the inductive approach, the definition itself was stated in a rather precise mathematical language. Generally, after passages where the student was motivated for personal work with ideas, the text contained other passages on a level of precision much higher than usual for the age group. Meetings were often arranged for the teachers, and also contact was established with and between the participants through mimeographed news sheets. Strong recommendations were given from the organizers (The Nordic Committee on the Modernization of Mathematics in co-operation with the Department of Mathematics at the Royal Danish School of Educational Studies) to ensure that the instructor should not lecture the text for the class. His rôle should be to inspire the students to work with the textbook on their own. The teacher was supposed to solve this task by explaining for the pupils at suitable occasions about the topics – using his own words and giving his own examples. Such "lecture-periods" should be of short duration, and the teacher should wellcome interruption from students. Moreover he should, as often as possible, induce the students to engage in discussions about the subject-matter, or about the way of solving a posed problem. At such occasions he should take care that questions of the rôle and nature of mathematics were brought to the attention of the students. For instance the teacher should use as topics for discussion the formulations of passages in the book, and especially the choice of formulations of definitions or theorems. The experimental teaching here mentioned was only carried through with the object of getting informal reports from the teachers on the experiences collected in connection with the rather extensive change of curriculum and of educational approach. The reports were generally optimistic, and especially so with regard to the ability of the young students to work with the textbook on their own.

What is now the rôle of deduction in such a text [8]? Naturally, treating the solution of open statements gives an opportunity to make a good deal of work around the use of the implication and the biimplication. This calls for some formal treatment of elements of logic already in grade 6–8. Developing an informal geometry gives other fine occasions for deductions of a rather clear type, where only a few steps are necessary in each proof, and where the premisses can be stated clearly, and the means used in the proof pointed out. Such deductive passages in the text will be covered under guidance of the instructor, and here I have to admit that we are very near to the traditional approach. However, you engage before the use of the deductive approach in the usual inductive preparations, such that students might be motivated much better for the use of deduction than earlier. Also I would like to remind you of the former mentioned manifold occasions, where a student is using the analytic method in reasoning connected to the inductive work in which he has been engaged.

Later in secondary school (grade 8–9) the preparations made around primary concepts, and around the more elementary structures of mathematics, make use of the axiomatic approach possible. Also here we have in Denmark some experiences from later years. Thus in 1967–68 the broadcasting and the television joined in presenting a series for grade 8 covering some part of geometry by means of an axiomatic approach using Choquet's axioms. The experiences from this experimental work were in a way discouraging. Even if the axiomatic treatment was carefully prepared, and from a mathematical view contained indeed very beautiful passages, the students hardly did estimate the work with the text.

However, it seems likely that the problems were caused by the fact that the domain for the axiomatic description in this case was not sufficiently "known" by the students. In Denmark informal geometry at present is not dealt with before grade 7, and there it is treated in a very brief form. Hence, students in the 8th grade have had hardly any time to familiarize themselves with the distance-preserving mapping of the practical plane onto itself, and hence, they could not at all enjoy the classification of the isometries, which was carried through on algebraic foundation to the delight of the teacher. In our coming books we shall diminish the part of geometry, which we are going to treat axiomatically, and use much more time on the "intuitive" phase, where for instance extensive experiments will be made with practical congruence-mappings of the plane onto itself. Furthermore we shall take care to discuss from time to time with the students if the mathematical model created is a "reasonable" good image of the conditions in the practical plane, and how this model has given us knowledge of practical value not known beforehand by the students. It goes without saying that the geometry shall not be the only topic to be treated axiomatically in our books.

In my address I have chosen to give rather general remarks on themes which I believe to be of high importance for the learning of mathematics. I have felt it impossible at this occasion to show examples of the use of the inductive approach. It seems to me that, even if I had used all my time on showing such examples, I would not have been able to demonstrate the value of this approach as a means to the attainment of several important goals for the teaching of mathematics in our time.

I have during my address refrained from giving references. However, I should like now to refer to my bibliographic notes where I have pointed to views expressed by several outstanding mathematicians and mathematics teachers who have made contributions on the questions I have been touching to-day. Their expositions have enriched me, as they will – I am sure – enrich any other in this audience.

NOTES AND REFERENCES

[1] The use of an inductive approach, by which the student may be motivated to experiment with mathematical situations on his own, has been recommended in later years at several meetings or conferences, e.g.:
The international working session on New Teaching Methods for School Mathematics, Athens 1963. *Mathematics to-day*, OECD, Paris, 1964, pp. 290–308 (summary and resolutions), esp. pp. 294–96, 298, 300, 306–7.
The Stanford Conference (December 1964) on The Learning of Mathematics by Young Children. *Mathematics in primary education* (Unesco Institute for Education, Hamburg, 1966, Report compiled by Z. P. Dienes), pp. 71–72.
The Cambridge Conference on School Mathematics (1963). *Goals for school mathematics*, Houghton Mifflin Co., New York, 1964, pp. 13–23 ('Pedagogical principles and techniques'), esp. pp. 13–16, 17–18.
The Nordic Committee for the Modernization of School Mathematics (1960–67). *New school mathematics in the Nordic countries* (Translation in parts of the report and

the recommendations of the committee, Nordisk udredningsserie 1967:11, Stockholm 1967), pp. 34–37, 48–51.

[2] The importance of giving better conditions for developing mathematical learning ability is recognized in nearly all experimental projects and by most international conferences. For the concretization of the vague ideas within this field the contributions in the *Bulletin of the International Study Group for Mathematics Learning* has been most valuable. From January 1968 the title of this periodical was changed to *Journal of Structural Learning*, Gordon and Breach, New York and London. In the issue **1** (1969) 2/3 the editorial indicates some of the activities with regard to the further study and research in the field of the learning of mathematics.
In the new periodical *Educational Studies in Mathematics* the problems of the learning of mathematics has been an underlying theme in many articles. Attention is especially drawn to the following contribution in **1**, No. 3, Jan. 1969:
Burt A. Kaufman and Hans-G. Steiner, 'The CSMP Approach to a Content-Oriented, Highly Individualized Mathematics Education'.

[3] Below are mentioned contributions concerning the inductive approach in general. In many cases the titles, however, refer to "discovery". Hence, I should like to emphasize that I have in my address advocated the use of the inductive approach to be of high importance in connection with mathematical instruction, while I have given no recommendation with regard to the use of the "discovery method" as a means in its own right.
Van Caille, D. J., 'Learning mathematics through discovery in the primary school', *Mathematics Teaching*, 1969, no. 46.
Courant, R., 'Mathematics in the modern world', *Scientific American*, Sept. 1964.
Dewey, John, *How we think*, Heath and Co., Boston, 1919.
Dienes, Z. P., 'A new approach to the teaching of mathematical structures', *Bulletin of the International Study Group for Mathematics Learning*, Summer-Fall, 1966.
Dienes, Z. P., *Building up mathematics* (pp. 31–48). Hutchinson, London, 3rd impression, 2 ed., 1963.
Dienes, Z. P. and Jeeves, M. A., *Thinking in structures*, Hutchinson, London, 1965.
Hendrix, Gertrude, 'Learning by discovery', *The Mathematics Teacher* **54** (1961), 290–299.
Hull, William P., 'Learning strategy and the skills of thought', *Mathematics Teaching*, 1967, no. 39.
Nuffield Mathematics Project: *I do, and I understand*, Chambers and Murray, 1967.
Polya, G., *How to solve it. A new aspect of mathematical methods*, Doubleday, New York, 2nd ed., 1957.
Polya, G., *Mathematical discovery. On understanding, learning and teaching problem solving*, I–II, Wiley, New York, 1962–65.
Polya, G., *Mathematics and plausible reasoning*, I–II, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954.
Scandura, Joseph M., 'Research in psychomathematics', *The Mathematics Teacher* **61** (1968), 581–591.
Steiner, Hans-G., 'Einfache Verknüpfungsgebilde als Vorfeld der Gruppentheorie', *Der Mathematikunterricht* **12** (1966), Heft 2.
Steiner, Hans-G., 'Examples of exercises in mathematization on the secondary school level', *Educational Studies in Mathematics* **1** (1968), 181–201.
Walter, Marion, 'Mirror cards. An example of informal geometry', *The Arithmetic Teacher* **13** (1966), 448–452.
Zassenhaus, Hans, 'Experimentelle Mathematik in Forschung und Unterricht'. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte* **13**, Heft 2.

[4] In the discussions of the rôle of the first elements of logic in the teaching of elementary mathematics Patrick Suppes has made contributions of special interest. While the dealing with logic as such in the elementary curriculum in most cases is limited to work with truth-tables (and maybe a few rules of deduction) together with a rather

careful treatment of solution of open statements, Patrick Suppes advocates that the able elementary school child should receive deep experiences with regard to elementary mathematical logic, in particular that portion of it which is concerned with the theory of logical inference. His views are expressed in the following two publications:
Suppes, Patrick and Binford, Frederick, Experimental Teaching of Mathematical Logic in the Elementary School. (Cooperative Research Project No. D-005, Stanford University, Calif., 1964).
Suppes, Patrick, *Introduction to logic*. Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960.

[5] By *subsequent education* under item (b) is meant education in mathematics as well as in other subjects, during schooldays as well as later in life. I have elaborated my views on the objectives of mathematics teaching in an article included in the report from the Nordic Committee (see [1]).

[6] The epistemological aspects in the teaching of mathematics are considered explicitly only in few cases in the standing discussion of the didactics of mathematics. Implicitly these aspects are of significance in many contributions concerning on the one hand the general education through mathematics, and on the other hand the rôle of the axiomatic method in secondary school curriculum. The following items should be noted in this setting.
Freudenthal, Hans, 'Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?', *Der Mathematikunterricht* **9** (1963), Heft 4.
Hasse, Helmut, 'Mathematik als Geistenwissenschaft und als Denkmittel der exakten Naturwissenschaften', *Der Mathematikunterricht* **9** (1963), Heft 2.
Krygowska, Anna Zofie, 'Teaching geometry in to-day's "unified mathematics"'. *Mathematics Teaching*, 1965, no. 30, 53–57; no. 31, 15–22.
Steiner, Hans-G., 'Wie steht es mit der Modernisierung unseres Mathematikunterrichts?', *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte* **11**, Heft 2.
Wittenberg, Alexander Israel, *Bildung und Mathematik*. Klett, Stutgart 1963. (See also the extensive review of this book by H. Coers in *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte* **11**, Heft 2.)

[7] *Mathematics in primary education* (Unesco Institute for Education, Hamburg, 1966, Report compiled by Z. P. Dienes): In chapter 2 of this report a review is given of important theoretical considerations by a number of psychologists with regard to concept formation and learning of mathematics.
Dienes, Z. P., *The power of mathematics*, Hutchinson, London, 1964, pp. 17–42 and pp. 104–132.
Skemp, Richard R., 'A three-part theory for learning mathematics', in *New approaches to mathematics teaching*, Macmillan, London, 1966, pp. 40–47.

[8] The results from the experimental teaching are now used as background for a series of textbooks starting from the middle of the 6th grade. These books are only available in the Danish language:
Christiansen, Bent, Christiansen, Allan, and Lichtenberg, Jonas, *Matematik 7, 1–2*, Munksgaard, Copenhagen, 1967–68 (pp. 288–231; *Teachers guide*, p. 196).
Christiansen, Bent and Pedersen, Johs., *Matematik 8 G1*, Munksgaard, Copenhagen, 1969 (p. 123; *Teachers guide*, p. 78).

W. SERVAIS

LOGIQUE ET ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

I. NÉCESSITÉ D'UNE FORMATION LOGIQUE

La logique et la mathématique sont étroitement liées. La compréhension d'une théorie mathématique comme un système hypothético-déductif, procédant par démonstration et par définition à partir d'axiomes, demande une connaissance active des principales notions logiques. La logique formelle d'aujourd'hui est un chapitre de la mathématique.

Il est de tradition d'admettre que l'étude de la mathématique est une école pratique de logique. Mais, dans l'enseignement traditionnel, cette dernière n'est pas, à de très rares exceptions près, l'objet d'une prise de conscience pour elle-même.

Pour apprécier ce que peut donner cette formation implicite, il suffit, par exemple, de poser à de jeunes universitaires, au début d'un cours de logique, la question suivante: Etant admis pour vrai que

Si Jean aime Marie alors il lui fera un cadeau

et sachant que

Jean a fait un cadeau à Marie

que pouvez-vous en déduire quant aux sentiments de Jean? Une expérience déjà longue nous a appris que les jeunes filles répondent, avec une constance émouvante:

Jean aime Marie

ce qui fait ricaner la plupart des jeunes gens.

Les premières veulent-elles croire à l'amour malgré la logique? Quant aux seconds, il apparaît que leur doute n'est pas lié à la solidité de leur structure rationnelle mais plutôt à l'expérience concrète de la situation évoquée. Passe-t-on d'une affaire de cœur à une énigme policière, les résultats sont aussi édifiants. Admettons, avec l'Inspecteur Maigret que:

Si Joe a commis le vol alors ses empreintes digitales sont sur le coffre-fort.

Que peut-on en déduire sachant que Joe n'a pas commis le vol? Et si les empreintes de Joe sont sur le coffre-fort? Et si elles n'y sont pas? La récolte des réponses est si variée qu'elle ne manque jamais de mettre l'auditoire en joie. Demandez: quelle est la négation de

Toutes les Anglaises sont rousses?

et vous obtiendrez avec toute l'écrasante majorité sur laquelle se fondent nos démocraties:

Aucune Anglaise n'est rousse.

Nous pouvons nous récrier, dire que cela est impossible. Il vous suffit de poser ces questions anodines dans une réunion pour constater les résultats du test.

Vous voyez où se produit le déraillement: notions confuses au sujet de l'implication et de la négation, maladresse dans l'usage de la quantification. Notre enseignement traditionnel est responsable de pareilles carences pernicieuses.* Au moment où tant de disciplines deviennent plus rationnelles et s'organisent de façon déductive, il est indispensable que la logique, avec ses exigences et ses limites, soit rendue plus accessible et mieux assimilée. L'avenir ne fera qu'imposer cette nécessité parce que l'usage efficace des machines mathématiques requerra une formation logique réelle.

Le problème de l'enseignement de la logique étant posé, comment le résoudre de façon adéquate?

D'ordinaire, l'initiation pratique à la science de la déduction se fait au hasard des études et de la vie. Si une formation théorique est donnée, elle ne l'est, sauf exception, qu'au terme de l'enseignement secondaire. Pour enseigner la logique, on attend que l'étudiant ait une connaissance assez sûre de la langue véhiculaire abstraite, de ses ressources et de ses nuances. Il est alors possible de faire fond sur cette base pour introduire les notions, le langage et les symboles de la logique dont l'étude devient alors celle d'une langue bien faite, forte de la puissance que lui donne le calcul.

De ce côté, la voie est sans issue pour un enseignement élémentaire.

Pour enraciner en profondeur dans l'esprit une notion capitale, il faut la semer très tôt et la cultiver longtemps de façon progressive. Cette vérité psychologique, liée à tout apprentissage, s'applique d'autant plus et d'autant mieux à la logique que celle-ci est primordiale parmi nos activités.

II. LOGIQUE DES ENSEMBLES

Nous disposerons d'une voie d'accès élémentaire à la logique si nous retournons à une de ses sources naturelles.

* Mme Krygovska dans son article 'Eléments de logique dans l'enseignement secondaire', paru dans le no. 251 du *Bulletin de l'A.P.M.* a montré, preuves à d'appui, les lacunes de cet enseignement en matière de logique.

La logique, comme l'arithmétique et la géométrie, est issue d'activités concrètes. Selon l'expression de Ferdinand Gonseth, elle est d'abord "une physique de l'objet quelconque".

De fait, nos constatations et nos démarches relatives aux objets matériels et aux ensembles de ces objets, nous fournissent, depuis toujours, un cheminement naïf vers les notions logiques.

Dès le jardin d'enfants, les jeux offrent une initiation à la logique concrète.

De nombreuses manipulations amènent la constitution de la notion d'objet, élément de nature quelconque capable d'être individualisé et de constituer, avec d'autres objets, des ensembles qui sont maniés à leur tour comme des objets.

Les objets dont les particularités ne sont pas prises en considération peuvent être représentés par des points. Le passage des objets à leur figuration schématique est souvent proposé par l'enseignant. Il est utile que cette étape soit bien comprise et il faut veiller à l'amener avec naturel.

Pour représenter un ensemble d'objets, on entoure d'une boucle l'ensemble des points figurant ces derniers. Cette représentation est obtenue d'ordinaire en dessinant au tableau l'image d'un contour, corde ou cerceau, qui emprisonne les objets concrets placés sur une table ou sur le sol. Ce procédé, si évident en apparence, peut amener à croire que les éléments d'un ensemble sont nécessairement rassemblés dans l'espace. Le maître devra, dans la suite de l'apprentissage, débarrasser l'enfant de cette idée fausse en lui faisant inventer des ensembles d'objets dispersés. Il faut aussi dépasser la limitation des ensembles d'objets de même nature. Notre pédagogie, si elle prend appui sur le concret matériel, doit être attentive à émanciper l'esprit de ce support.

Une évolution importante consiste à nommer les objets, c'est-à-dire à faire usage de symboles: les termes verbaux ou écrits qui les désignent. Comme plusieurs termes peuvent servir à nommer le même objet, on est conduit à définir l'égalité logique et à en reconnaître les propriétés fondamentales: réflexivité, symétrie et transitivité. Ici, il convient d'éviter une confusion assez fâcheuse qui consiste à ne pas distinguer l'usage d'un terme et la mention qui en est faite. Quand, parlant d'Astérix, le héros gaulois bien connu, nous faisons usage de son nom, celui-ci n'est pas considéré pour lui-même: il sert à évoquer le personnage.

Il en est autrement si nous disons:

Astérix commence par un A majuscule.

Cette fois, nous parlons du nom et nous devons disposer d'un terme pour le vocable Astérix et d'un terme pour la lettre A.

Le procédé des logiciens est celui employé dans la citation d'un texte:

on le met entre guillemets. Nous écrirons

Astérix se joue des Romains

et

'Astérix' commence par un 'A' majuscule.

On a évidemment

Astérix $\neq$ 'Astérix'.

Cette mise au point ne serait qu'un étalage inutile de jargon pédant si on ne trouvait, avec une fréquence non négligeable, des exemples tels que: Considérons l'ensemble

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ des dix chiffres arabes.

On a malheureusement désigné l'ensemble des dix nombres et l'on voudrait que les élèves distinguent des chiffres 0, 1, 2,... qui les désignent.

On dit encore: l'ensemble des lettres de Paris est

{P, a, r, i, s}.

Il est clair que la ville de Paris n'est pas constituée de lettres et que l'ensemble des lettres de 'Paris' est

{'P', 'a', 'r', 'i', 's'}.

Si on veut faire l'économie de ces remarques syntaxiques importantes, il suffit de renoncer simplement à de tels exemples.

Les mathématiciens emploient d'ailleurs les lettres de façon plus utile pour désigner, à loisir, des objets et des ensembles. La présence de l'objet dans l'ensemble E est affirmée par la proposition $a \in E$, son absence, par $a \notin E$. La question de savoir si un objet donné est présent dans un ensemble déterminé n'a qu'une, et une seule, des deux réponses possibles: oui ou non. Il s'ensuit que la présence et l'absence d'un objet a dans un ensemble E quelconque satisfont aux deux lois:

On n'a pas à la fois $a \in E$ et $a \notin E$.
On a soit $a \in E$, soit $a \notin E$.

Ces assertions énoncent, au niveau le plus élémentaire et le plus concret deux principes de la logique à deux valeurs: le principe de non-contradiction et celui du tiers exclus qui régissent la vérité et la fausseté des propositions. Mais tandis que la vérité et la fausseté sont ici des notions sémantiques liées à la signification des propositions, la présence et l'absence sont d'abord des constatations physiques faites sur la situation réelle à laquelle se réfèrent, en fin de compte, la vérité et la fausseté.

Comme la présence d'un objet dans un ensemble doit être tranchée par oui ou par non, dans la représentation schématique d'un ensemble, on convient, pour éviter toute ambiguité, de ne faire passer le contour par aucun des points figurant les objets.

Une amélioration importante de ce schéma consiste à convenir que les points représentant les objets ne seront marqués qu'au cas où l'on voudra manifester leur présence de façon expresse.

Lorsque l'on voudra, au contraire, indiquer que tous les éléments de E sont représentés, il suffira d'inscrire "complet". D'après cette convention, les diagrammes de la Figure 1 sont respectivement ceux d'un singleton (ensemble à élément unique) d'une paire ou d'un ensemble vide. Dans ce dernier cas, pour figurer sans équivoque l'absence de tout élément, il est très évocateur de couvrir de hachures la région limitée par le contour représentant l'ensemble.

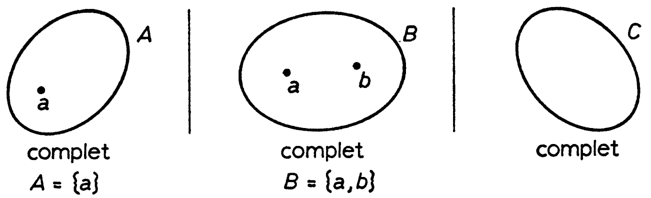


Fig. 1.

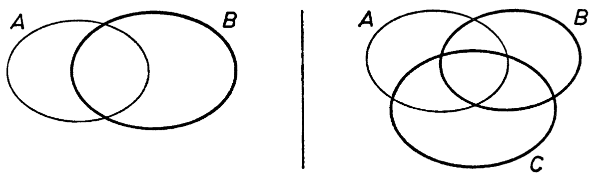


Fig. 2.

Certains auteurs représentent tout ensemble par le domaine plan intérieur à une ligne fermée. Cette figuration a beaucoup moins de ressources que les diagrammes de Venn. Grâce à ces derniers, on peut représenter deux, trois, ... ensembles par des schémas généraux (voir la Figure 2) qui permettent:

(1) de figurer tous les cas possibles d'appartenance d'un objet à ces ensembles,

(2) de tenir compte, si on hachure les régions vides, de toutes les situations relatives des ensembles.

Par suite, l'utilisation des diagrammes de Venn pour illustrer les définitions de l'intersection, de la réunion, de la différence d'ensembles et pour donner les preuves graphiques des propriétés de ces opérations a toute la généralité requise [8, 19, 20].

L'ensemble vide est un concept primordial de la logique moderne. A défaut de le considérer, Aristote a proposé certains syllogismes dont la validité n'est assurée que pour des classes non vides. D'après le diagramme de la Figure 3, il est clair qu'un ensemble vide A est inclus à tout ensemble B.

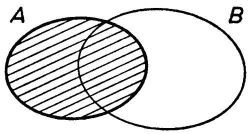


Fig. 3.

A partir de là, des élèves de 12 ans ont établi, d'eux-mêmes, l'unicité de l'ensemble vide. Car si A est vide ainsi que B, on a

$$A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset A.$$

D'où

$$A = B.$$

Ce qui précède souligne l'intérêt des diagrammes de Venn pour prouver des lois de l'algèbre des ensembles et faire comprendre des questions délicates de la logique en extension.

III. LOGIQUE DES PROPRIÉTÉS

Nous allons à présent nous placer au point de vue de la logique en compréhension ou logique des propriétés.

A ce propos, il est utile d'introduire la notion de variable en faisant bien comprendre le rôle qu'elle joue [17].

Les trois propositions

Alain est un frère de Denise
Daniel est un frère de Denise
Pascal est un frère de Denise,

sont obtenues en remplaçant dans l'expression

__________ est un frère de Denise,

le blanc, indiqué par un trait, respectivement par les noms Alain, Daniel, Pascal.

En mathématique, au lieu d'un blanc, on fait usage d'une lettre, x par exemple:

x est un frère de Denise.

Les noms d'objets déterminés, tels 'Alain', '72', sont appelés termes constants ou constantes.

Une lettre à laquelle on substitue, comme ci-dessus, des constantes est une variable (libre).

Les objets désignés par les constantes par lesquelles on remplace une variable, sont les valeurs de celle-ci. Il importe de préciser le domaine dans lequel elles sont prises.

Des expressions telles

x est un frère de Denise

ou l'équation

$$x+5=8$$

qui donnent des propositions (vraies ou fausses) quand on remplace la variable x par des constantes, sont ce que les logiciens appellent des formes propositionnelles en x. Nous les nommerons plutôt conditions en x comme il est d'usage en mathématique. Une condition peut renfermer plusieurs variables.

La condition d'appartenance à l'ensemble E s'écrit $x \in E$.

Les variables interviennent aussi dans les termes. Par exemple, l'expression nominale

le père de Louis Pasteur

est obtenue en remplaçant dans le terme

le père de x

la variable x par la constante Louis Pasteur.

Une équation est une condition qui s'exprime par une égalité dont les membres sont des termes dont l'un au moins renferme une variable. Des équations telles que

$$\{x, 3\} = \{2+1, 2\},$$
$$\{x\} = \{a, b\}$$

peuvent être introduites dès le début. La première a pour solution 2; si $a \neq b$, la seconde équation n'a pas de solution.

Un ensemble est défini en compréhension par une condition caractéristique satisfaite par tout élément de l'ensemble et par aucun objet qui ne lui appartient pas. Par exemple, résoudre l'équation

$$(x^2-9)(x-1)=0$$

dans l'ensemble **N** des nombres naturels, c'est trouver en extension l'ensemble-solution

$$\{x \in \mathbf{N} \mid (x^2 - 9)(x - 1) = 0\}.$$

Cet ensemble est la paire

$$\{1, 3\}.$$

Les définitions

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{et} \quad x \in B\},$$
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\}$$

donnent l'occasion de présenter la conjonction $p \wedge q$ (p et q) et la disjonction $p \vee q$ (p ou q) de deux propositions p, q (ou de deux conditions) à l'aide de tables de valeurs logiques.

p	$\wedge$	q	p	$\vee$	q
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0

où 1 indique le vrai, 0 indique le faux, dans chacun des quatre cas possibles de vérité et de fausseté.

A ces tables correspondent pour l'intersection $A \cap B$ et la réunion $A \cup B$ d'ensembles des tables d'appartenance

A	$\cap$	B	A	$\cup$	B
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0

où 1 indique la présence et 0 l'absence, dans chacun des quatre cas possibles.

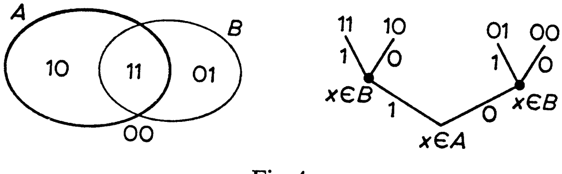


Fig. 4.

Ces quatre cas déterminent quatre régions du diagramme de Venn (voir la Figure 4) que nous avons désignées en code à l'aide des notations

$$1\ 1,\quad 1\ 0,\quad 0\ 1,\quad 0\ 0$$

où le premier chiffre indique la présence ou l'absence dans l'ensemble A, et le second, la présence et l'absence dans B, comme l'indique l'arbre dessiné en regard.

Les tables d'appartenance permettent un examen exhaustif des cas possibles. Grâce à elles, on peut donner des démonstrations élémentaires des propriétés de l'algèbre des ensembles. Les tableaux obtenus sont semblables à ceux dont on se sert en logique des propositions à laquelle on peut aussi initier les élèves.

A partir d'une condition $p(x)$ en la seule variable x, on peut former une proposition en remplaçant x par la constante a. On obtient ainsi la proposition singulière $p(a)$.

Un autre moyen consiste à lier la variable x soit par le quantificateur universel

$$\forall x$$

ce qui donne la proposition universelle

$\forall x{:}p(x)$ "pour tout $x{:}p(x)$"

qui exprime que $p(x)$ devient une proposition vraie pour toute valeur de x prise dans l'univers, soit par le quantificateur particulier

$\exists x$ "il existe un x"

ce qui donne la proposition particulière

$\exists x{:}p(x)$ "il y a au moins un x tel que $p(x)$"

qui exprime l'existence dans l'univers d'au moins une valeur de x pour laquelle $p(x)$ est vraie.

Il est devenu habituel de désigner le quantificateur $\exists x$ sous le nom de "quantificateur existentiel".

Or, il est clair que si l'univers des objets dont on parle n'est pas vide, le quantificateur $\forall x$ est aussi existentiel.

En plus des quantificateurs $\forall x$ et $\exists x$ dont les logiciens font surtout usage, on emploie en mathématique des quantificateurs restreint pour lesquels l'ensemble A des valeurs de la variable x est donné, on a ainsi les quantificateurs

$\forall x \in A$ "pour tout x élément de A",
$\exists x \in A$ "il existe au moins un x élément de A".

Cette fois, le quantificateur universel restreint

$$\forall x \in A$$

n'est pas existentiel dans le cas où l'ensemble A est vide.

Il y a des professeurs qui dénoncent combien l'usage des quantificateurs peut amener de confusion dans l'esprit de certains grands étudiants. Là encore, y a-t-il des séquelles d'une familiarisation tardive avec ces notions? Il suffit de voir comment des enfants de 12 ans jonglent avec les quantificateurs pour en être convaincu. D'ailleurs, on peut utiliser la quantification en faisant usage d'expressions de la langue véhiculaire, au niveau du métalangage:

quel que soit a ...
il y a au moins un a tel que ...

mais les enfants préfèrent les symboles $\forall x$ et $\exists x$ qui eux appartiennent à la syntaxe logique.

IV. LOGIQUE DES RELATIONS

La logique d'Aristote se bornait à des propositions élémentaires de la forme

Socrate est mortel,
Tout homme est mortel,
Quelque homme est mortel.

La mathématique demande des propositions d'une structure bien plus complexe. Par exemple:

Deux points distincts quelconques appartiennent à une droite et à une seule.

Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles.

C'est sans doute la contribution capitale à l'enseignement de la logique que d'avoir introduit, dans les cours élémentaires modernes, l'étude des relations.

La manière la plus simple est de définir une relation binaire comme ensemble de couples d'objets. Une relation de l'ensemble A vers l'ensemble B est une partie du produit cartésien $A \times B$. Cette partie peut être déterminée par une condition caractéristique à deux variables. Comme les relations sont des ensembles, on peut leur appliquer l'algèbre de ces derniers.

Grâce à l'emploi des diagrammes sagittaux (graphes) où chaque couple est figuré par une flèche allant de son origine à son extrémité, nous disposons de moyens intuitifs de rendre élémentaires des notions réservées, auparavant, au cours de logique avancé. Telles sont:

(1) les propriétés structurelles des relations sur un ensemble
réflexivité, antiréflexivité,
symétrie, antisymétrie,

transitivité,
ce qui permet de définir les relations d'équivalence et d'ordre;

(2) la composition des relations, en particulier des applications et des bijections qui sont des relations particulières. L'associativité de la composition des relations peut être établie une fois pour toutes.

Nous nous contenterons de mentionner ces questions dont la pédagogie est développée dans des ouvrages avec tout le pouvoir suggestif des couleurs. [13, 17]. Voir aussi [15].

V. LOGIQUE DE LA DÉDUCTION

Jusqu'ici, nous avons introduit des notions logiques. Ce qui importe, maintenant qu'elles sont à pied d'œuvre, est de les utiliser dans la déduction.

Auparavant, nous voudrions faire un sort particulier à l'équivalence et à l'implication.

Deux propositions telles

le 21 janvier 1632 est un mardı

et

le 22 janvier 1632 est un mercredi

sont équivalentes parce qu'elles sont, soit vraies à la fois, soit fausses à la fois.

L'équivalence de deux propositions p et q est définie par la table de valeurs

p	$\Leftrightarrow$	q	"p équivalent q"
1	1	1	
1	0	0	
0	0	1	
0	1	0	

Lorsque on a un des cas de vérité

p	$\Leftrightarrow$	q
1	1	1
0	1	0

on dit que "p équivaut à q" ou "p est équivalent à q". Il y a lieu de distinguer ainsi la lecture typographique de la formule de la lecture d'assertion de ce qu'elle exprime.

Des conditions $p(x)$ et $q(x)$ sont équivalentes si on a

$$\forall x : p(x) \Leftrightarrow q(x).$$

L'égalité d'ensembles

$$A = B$$

équivaut à l'équivalence

$$\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Celle-ci est vraie lorsque A est vide ainsi que B. Ainsi est démontrée l'unicité de l'ensemble vide.

Les définitions de termes font usage soit

(1) de l'égalité, quand le terme a définir est le premier membre et l'expression définissante le second;

(2) de l'équivalence, quand le terme à définir intervient dans une proposition qui est posée équivalente à une proposition définissant la première.

L'équivalence $p \Leftrightarrow q$ est aisée à comprendre. Il n'en est pas de même de l'implication

$$p \Rightarrow q$$

dont certains auteurs se bornent à dire que p entraîne q!

L'implication doit être définie suivant l'usage qu'on en fait en mathématique et qui ne correspond pas au sens courant puisque l'on ne considère pas d'ordinaire que

$$p \Rightarrow q$$

est vrai si p est faux.

Pour introduire la définition de

$$p \Rightarrow q$$

demandons quand la proposition

si Pierre gagne alors Quinet est content

est-elle fausse? La réponse est, en général:

Quand Pierre gagne est vrai et
Quinet est content est faux.

Dans les autres cas, la proposition est-elle vraie? Après réflexion et discussion, l'accord se fait sur la table

p	$\Rightarrow$	q	"si p alors q"
1	1	1	
1	0	0	
0	1	1	
0	1	0	

qui revient à poser

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\text{non}p \vee q).$$

Lorsque on a un des cas de vérité de $p \Rightarrow q$

p	$\Rightarrow$	q
1	1	1
0	1	1
0	1	0

on lit $p \Rightarrow q$ "p implique q".

La définition par la table permet de résoudre, sans hésitation, des énigmes, policières ou autres, qui font prendre conscience des deux règles de déduction

$$\left.\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & \text{vrai} \\ p & \text{vrai} \\ \hline \quad q & \text{vrai} \end{array}\right\} \text{modus ponendo ponens}$$

$$\left.\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & \text{vrai} \\ \quad q & \text{faux} \\ \hline p & \text{faux} \end{array}\right\} \text{modus tollendo tollens}$$

Ces questions qui ont dérouté les étudiants de vingt ans amusent des élèves qui en ont douze!

Une condition $p(x)$ implique une condition $q(x)$ si et seulement si on a

$$\forall x : p(x) \Rightarrow q(x).$$

Les propositions

$$\forall x \in A : x \in B \quad \text{ou} \quad A \subset B$$

sont donc équivalentes à

$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Lorsque A est vide, $x \in A$ est faux pour toute valeur de x de sorte que cette implication est vraie: l'ensemble vide est inclus à tout ensemble.

Nous pouvons souligner les liens entre l'implication vraie, les déductions qu'elle permet et l'inclusion de la manière présentée sur la Figure 5.

p	$\Rightarrow$	q
1	1	1
~~1~~	~~0~~	~~0~~
0	1	1
0	1	0

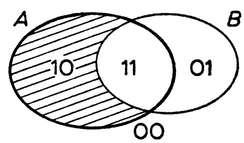


Fig. 5.

Déductions		Equivalences
$p \Rightarrow q$ vrai	$p \Rightarrow q$ vrai	$A \subset B$
p vrai	q faux	$\Updownarrow$
vrai	p faux	$\forall x \in A : x \in B$
		$\Updownarrow$
		$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B.$

Comme nous l'avons fait, il est commode de noter verticalement des équivalences (et des implications) entre des propositions écrites sur des lignes successives. On a ainsi une vue synoptique claire des liaisons déductives.

Implications réciproques	Inclusions réciproques
$p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$	$A \subset B$ et $B \subset A$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$p \Leftrightarrow q$	$A = B$

Transitivité

Implication	Inclusion
$p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$	$A \subset B$ et $B \subset C$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$p \Rightarrow r$	$A \subset C$

Il est important de faire remarquer qu'une implication étant vraie si son antécédent est faux, il suffit, pour établir une implication, d'examiner les cas (s'il y en a) où l'antécédent est vrai et de prouver que le conséquent est vrai. C'est ce que l'on fait couramment dans les démonstrations.

Dans celles-ci d'ailleurs pour établir une implication

$$P \Rightarrow Q$$

(où P et Q peuvent renfermer des variables) à partir de prémisses ou propositions admises

$$P_1, P_2, \ldots, P_n$$

on joint P à ces prémisses et on démontre que la conjonction

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n \wedge P$$

implique Q.

Cette règle de déduction familière est le théorème de déduction quand on donne des règles d'inférence qui permettent de l'établir [9, 18].

Une propriété fondamentale de l'implication est le principe de contraposition

$$(p \Rightarrow q) \text{ équivaut à } (\text{non } q \Rightarrow \text{non } p)$$

qui se justifie à l'aide de la table de valeurs.

Le principe de contraposition ramène la démonstration de

l'implication $p \Rightarrow q$ à celle de
l'implication non $q \Rightarrow$ non p

ce qui permet d'éviter souvent des raisonnements par l'absurde.

A ce propos, il est utile d'apprendre d'abord la réduction à l'absurde qui sert à démontrer q'une proposition est fausse en prouvant qu'elle implique une proposition fausse.

La démonstration par l'absurde d'une proposition consiste à établir que sa négation implique une proposition fausse. Par exemple, quels que soient l'ensemble A et l'ensemble B on a

soit $A = B$ soit $A \neq B$.

Si A est vide ainsi que B, l'inégalité $A \neq B$ est fausse puisque ni A ni B ne comprennent d'élément qui pourrait les rendre différents. Donc

$A = B$ est vrai (unicité du vide).

A ses débuts, la logique formalisée ne déduisait pas selon les méthodes employées en mathématique. C'est ce que constate Gerhard Gentzen dans ses *Recherches sur la déducation logique** [11, 12].

La formalisation du raisonnement logique, telle qu'elle est développée en particulier par Frege, Russell et Hilbert, est relativement fort éloignée du mode de raisonnement qui est utilisé en réalité dans les démonstrations mathématiques. On vise de la sorte à obtenir certains avantages formels appréciables. J'ai voulu d'abord construire un formalisme qui soit le plus près possible du raisonnement réel. C'est ainsi que j'ai obtenu un "Calcul de la déduction naturelle".

Parmi les trois exemples présentés par Gentzen, reprenons le second relatif à la permutation des quantificateurs $\exists x$ et $\forall x$

$$(\exists x \forall y\, Fxy) \Rightarrow (\forall y \exists x\, Fxy)$$

On argumentera de la façon suivante: supposons qu'il y ait un x tel que, pour tout y, Fxy soit valide. Soit a un tel x. On a donc, pour tout y: Fay. Soit maintenant b un individu quelconque. On a: Fab. Il y a donc un x, à savoir a, tel que Fxb soit vrai. b étant quelconque, notre conclusion est donc valable pour que tous les individus, c'est-à-dire: pour tout y il y a un x tel que Fxy soit vrai. Nous obtenons ainsi notre formule.

Cette démonstration est conforme à nos modes de raisonnement coutumiers en mathématique. Nous y voyons intervenir des variables x, y des lettres a, b désignant des individus qu'on ne nomme pas expressément.

Ces lettres sont appelées par Suppes [18] des noms ambigus qui sont des constantes "temporaires". Ces constantes sont des paramètres individuels

* Traduit de l'allemand par R. Feys et J. Ladrière. Presses universitaires de France, 1955.

qui se distinguent des variables parce qu'ils ne donnent pas lieu à l'usage des quantificateurs $\forall$, $\exists$ [1].

Toutefois, il est équivalent de dire: quels que soient les nombres réels a et b on a

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

et

$$\forall x, y \in \mathbf{R}: (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 .$$

Avec les paramètres, la quantification est exprimée dans la langue courante (métalangage) au lieu de l'être dans la langue symbolique (langage-objet) comme pour les variables.

Faute de distinguer la variable x et le paramètre a le sens des diverses égalités

$$a = a, \quad x = x, \quad x = a$$

n'est pas clair.

Or, la première est une proposition vraie, la seconde est une condition qui donne lieu par quantification universelle à la proposition vraie

$$\forall x : x = x .$$

Enfin $x = a$ est équation dont la solution est unique

$$\{x \mid x = a\} = \{a\} .$$

Nous avons constaté que de jeunes élèves sont à l'aise avec ces précisions.

Nous pensons que l'enseignement mathématique doit être un champ de mise en action des notions logiques qui acquièrent ainsi une portée opératoire en plus de leur signification conceptuelle.

La déduction naturelle proposée par Gentzen souligne ce point de vue en présentant une formulation de la logique dans laquelle il n'y a pas d'axiomes mais des règles de déduction pour l'introduction et l'élimination des opérateurs logiques.

VI. AXIOMATISATION

D'ordinaire, quand on ose parler d'axiomes dans un enseignement à des enfants d'une douzaine d'années, on soulève la réprobation générale si pas l'indignation.

Et pourtant, de quoi s'agit-il au fond sinon d'énoncer clairement les prémisses que l'on admet pour démontrer une proposition.

Comment pourrait-on déduire sans savoir à partir de quoi ou sans le dire, honnêtement? Par exemple, une organisation déductive locale est déjà une axiomatisation.

Des expériences de Z. P. Dienes avec des enfants d'école primaire montrent que ceux-ci sont aptes à déduire correctement à partir d'axiomes et qu'ils y prennent plaisir.

Tout système d'axiomes étant une définition explicite d'une structure, ce serait perpétuer une croyance vieille et coriace que de faire accroire que les axiomes ne se rencontrent qu'en géométrie.

Bien sûr, il ne s'agit pas dans les débuts de réduire le système d'axiomes pour éviter toute redondance. Il importe surtout de prendre des axiomes assez forts qui donnent d'emblée des résultats substantiels sans longueurs et sans finasseries.

Une question intéressante est l'interprétation des axiomes. En géométrie affine, si on admet simplement que sur toute droite il y a au moins deux points, on peut donner des interprétations dans lesquelles le plan ne comprend qu'un nombre fini de points. S'il n'a que trois points, les droites sont des paires de points et, par un point extérieur à une droite, il n'y a pas de parallèle. Il y en a une dans un modèle à quatre points où les droites sont des paires de points. Le nombre de parallèles à une droite par un point extérieur augmente avec le nombre de points, les droites étant des paires de ceux-ci.

L'utilisation des modèles finis permet de montrer, de façon immédiate, que l'axiome de la parallèle ne peut être déduit des axiomes d'incidence habituels.

Les enfants du début de l'école secondaire ne sont pas déconcertés par ces considérations. Ils s'y intéressent parce qu'ils saisissent, à leur niveau, qu'un système d'axiomes peut avoir plusieurs interprétations. Notamment les axiomes de groupe en ont de très nombreuses ce qui explique l'importance de ce concept.

Si les précisions quant à la logique et aux axiomes sont de nature à faire mieux comprendre ce qu'est une théorie déductive, elles ne donnent pas la stratégie des démonstrations.

Ce savoir-faire s'apprend par l'exemple et la pratique. On peut développer la recherche de stratégies par des puzzles logiques comme le fait T. Fletcher, par des jeux comme *Well-formed formula and proof* ou par le *Mathematical Golf* de P. Rosenbloom.

La logique met en lumière, par ce qui est permis dans une démonstration, quelles sont les règles d'inférence, quelles sont les propriétés mathématiques sur lesquelles on peut s'appuyer.

Une démonstration logiquement correcte d'une proposition mathématique n'est pas toujours une bonne démonstration mathématique car elle peut être encombrée maladroitement d'éléments parasites qui cachent la nature des choses.

Nous devons rendre nos élèves sensibles à l'économie et à l'adéquation des moyens de démonstration. C'est une façon de développer leur bon goût mathématique et d'aiguiser leur esprit inventif.

VII. LOGIQUE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES

La logique est définie, suivant la tradition, comme la science qui recherche la structure de la pensée.

Il est bien entendu qu'il s'agit non de la pensée réelle étudiée en psychologie de l'intelligence, mais de la pensée normative. La logique étudie des structures de pensée valides suivant certaines normes plus ou moins respectées par l'activité mentale.

Une réalité dont la logique s'inspire est le raisonnement mathématique. C'est pourquoi, en tant que celui-ci est concerné, nous avons souligné l'intérêt de la déduction naturelle.

La logique formalisée n'est qu'un aspect de la logique comme la mathématique formelle n'est pas toute la mathématique.

Il est étonnant de constater qu'il a fallu, après des millénaires de recherches logique, attendre la découverte de Claude E. Shannon* pour reconnaître que les circuits électriques, dont les montages avaient été longtemps empiriques, donnaient une interprétation du calcul des propositions.

Ainsi, la logique trouvait un champ d'application concret qui s'étend sans cesse: la théorie de machines calculatrices.

D'un point de vue didactique, nous avons utilisé, il y a plus de vingt ans, les montages de circuits électriques pour faire saisir, sur le plan sensori-moteur, les opérations logiques fondamentales [16]. Il s'agissait de construire et de manœuvrer des circuits munis d'une source *S*, d'une lampe *L* et d'interrupteurs *A* et *B* (voir Figure 6). Par exemple, les montages en série ou en parallèles des interrupteurs fonctionnent en respectant la définition de la conjonction $\wedge$ (et) et de la disjonction $\vee$ (ou) [10].

Les circuits électriques ont été utilisés de façon plus poussée par P. Puig-Adam et T. Fletcher [14, 6].

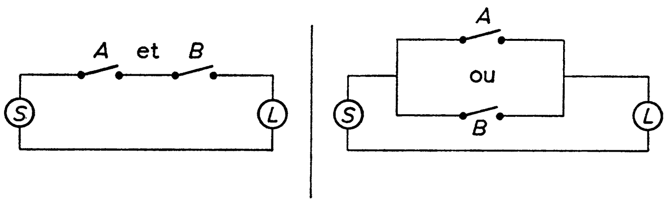


Fig. 6.

* Publiée dans *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*. Trans. Am. Inst. Elec. Engineers, 2939.

A l'heure actuelle, nous sommes loin de ces dispositifs où les interrupteurs étaient enclenchés à la main!

Grâce aux transistors, les circuits logiques ont pu être automatisés et miniaturisés. La pédagogie a suivi ce progrès en établissant une fructueuse coordination entre la logique mathématique et la physique. Nous ne pouvons que mentionner un essai fait dans ce sens en annexe au cours de physique donné dans notre école.*

Depuis deux ans sont organisées, chaque semaine, des séances d'une heure auxquelles peuvent participer des élèves des classes de quatrième et de troisième (14 et 15 ans).

Au cours de ces travaux pratiques, les élèves étudient le fonctionnement physique du transistor et les circuits logiques. A cet effet, ils disposent de fers à souder, d'appareils de mesure, d'un oscilloscope, d'un simulateur et de panneaux didactiques [2].

Au cours de la première année, un élève de troisième latin-mathématique a construit les circuits logiques fondamentaux. Il s'est enthousiasmé pour son travail et a fabriqué un simulateur, un compteur de 0 à 10.000, un entraîneur de bande perforée. Au cours de la deuxième année, dix élèves de quatrième ont participé aux séances: ils ont réalisé les fonctions logiques de base et, grâce au simulateur, ont pu se familiariser avec celle-ci.

L'interaction entre l'apprentissage de la logique et l'utilisation des machines peut se présenter sous d'autres aspects. Les organigrammes (flow-charts) sont un moyen très suggestif de figurer, d'une façon synoptique, un canevas d'opérations [6]. L'emploi des machines logiques, dès le niveau secondaire, se développe tant en URSS qu'aux USA. D'ailleurs des langages-machines simples, tels le Basic et le Logo, se prêtent bien à l'initiation des élèves.

L'aperçu qui précède, montre comment, en peu d'années, l'éducation logique a fait de sensibles progrès susceptibles de fortifier la pensée rationnelle de la jeunesse. Cependant, l'enseignement de la logique, d'une manière autonome, comme branche mathématique fondamentale, n'est que rarement entrepris. C'est pourquoi l'expérience délibérée conduite en ce domaine, avec de jeunes élèves bien doués, dans le cadre du *Comprehensive School Mathematics Program* à Carbondale, Illinois, est digne de retenir l'attention de tous ceux qui s'intéressent à la promotion de la formation logique moderne.

* Athénée provincial du Centre – La Louvière.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Beth, W. *The Foundations of mathematics*. New York, Harper et Row, 1966.

[2] Delhaye, C. *La conception logique des automatismes industriels*. Bruxelles, Manufacture belge de lampes et matériel électronique.

[3] Dienes, Z. P. Les premiers pas en mathématique I. Logique O.C.D.L. La logique à l'élémentaire (fiches de travail), Université de Sherbrooke, Sherbrooke. L'axiomatique à l'élémentaire (fiches de travail), idem.

[4] Exner, M. et Rosskopf, M. *Logic in elementary mathematics*. New York, McGraw-Hill Book Company, 1959.

[5] Fletcher, T. *Some lessons in mathematics*. Association of Teachers of Mathematics, Cambridge, The University Press, 1964.

[6] Fletcher, T. *L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui*. Paris. O.C.D.L., 1966.

[7] Freudenthal, H. *Logik als Gegenstand und als Methode*. ICMI-Seminar University of Aarhus. May 30 – June 2, 1960.

[8] Freudenthal, H. 'Braces and Venn diagrams', *Educational Studies in Mathematics* **1**, 408–414, 1969.

[9] Freudenthal, H. *Exacte logica*. Haarlem, F. Bohn, 1961.

[10] Freudenthal, H. *Logique mathématique appliquée*. Paris, Gauthier-Villars, Louvain, Nauwelaerts, collection de logique mathématique, 1958.

[11] Gentzen, G. *Recherches sur la Déduction logique*. Paris, Presses Univ. de France, 1955.

[12] Goodstein, R. *Mathematical logic*. Leicester University Press, 1961.

[13] Papy. *Mathématique moderne I*. Bruxelles, Ed. Didier, 1963.

[14] Puig-Adam, P. *El material didáctico matemático actual*. Publ. de la Revista *Ensenanza media*, Madrid, 1958.

[15] Sedivy Jaroslav. 'Teaching of elements of logic by means of finite graphs', *Educational Studies in Mathematics* **1**, 422–43, 1969.

[16] Servais, W. 'Modèles. Objets concrets et symboles', *Mathematica Paedagogia*, No. 8, 1955–1956.

[17] Servais, W., Clersy, C. et Biefnot, M. *Mathématique 1*. Bruxelles, Labor; Paris, Nathan.

[18] Suppes, P. *Introduction to logic*. Princeton, New York, Van Nostrand Company, 5th ed., 1962.

[19] Van Dormolen, J. 'The uselessness of Venn Diagrams', *Educational Studies in Mathematics* **1**, 402–407, 1969.

[20] Vredenduin, P. 'The conclusive force of Venn diagrams and the implication', *Educational Studies in Mathematics* **1**, 394–401, 1969.

J. V. ARMITAGE

THE RELATION BETWEEN ABSTRACT AND 'CONCRETE' MATHEMATICS AT SCHOOL

Mr. Chairman, Ladies and Gentlemen, it is a great privilege to be invited to address this Congress and I am deeply sensible of the honour which the Committee has done me in including me in its list of speakers.

Whilst I was very pleased to be invited, my rapture was, to misquote W. S. Gilbert, very sharply modified when I reflected on the magnitude of the task and my lack of qualifications for it. For as you will quickly discover, I am no expert. I was a schoolmaster for three years, but that was ten years ago and served only to confirm my lack of expertise. Moreover, I never taught a 'modern mathematics' syllabus, although, like many other teachers, I did introduce topics now included in such syllabuses under the guise of end-of-term recreations or constructive time wasting. (There is something to be said for teaching by means of asides.) My subsequent experience has been confined to occasional visits to schools and one cannot properly judge pupils' reactions unless one has a continuing, regular commitment to a particular class. I must also emphasize that such visits are made entirely for fun; I am not engaged on educational research and I am as pleased to teach the rule of three as I am to teach Venn diagrams.

The characteristic feature of contemporary mathematics is the axiomatic method and it is entirely appropriate that I should set the scene for my lecture by quoting from the hand of the great expositor of the method. The first two quotations are taken from the opening sentences of Bourbaki's *Éléments*, the last one is extracted from the 'mode d'emploi'.

"Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration ... ce qui était une démonstration pour Euclide en est toujours une à nos yeux."

"La méthode axiomatique ... son emploi systématique comme instrument de découverte est l'un des traits originaux de la mathématique contemporaine."

"Le mode d'exposition suivi est axiomatique et abstrait; il procède le plus souvent du général au particulier. Le choix de cette méthode est imposé par l'objet principal du traité, qui est de donner des fondations solides à tout l'ensemble des mathématiques modernes .... L'utilité de certaines considérations n'apparaîtra donc au lecteur que s'il possède déjà des connaissances assez étendues, ou bien s'il a la patience de suspendre son judgement jusqu'à ce qu'il ait eu l'occasion de s'en convaincre."

Now it seems to me that only the first of these quotations has any relevance for school mathematics. For in school one proceeds from the particular to the general and one cannot expect the pupils to suspend their judgement on the relevance of a new topic. Either its usefulness (in the widest sense) must be immediately apparent, or its immediate interest (from the pupils' point of view) must be such as to overcome prejudice. I imagine that most of you will agree with me, and yet there appears to be a movement towards a pseudo 'Bourbakisation' of school mathematics, even for young children. The concepts of mapping, equivalence relation, group, and so on, are introduced pictorially at an early stage and subsequently used to introduce integers and rational numbers. It is also claimed that young children can work easily with ordered pairs, although it is not clear that they are working with ordered pairs in the sense of Bourbaki.

If I am misinformed and tilting, like Don Quixote, at windmills, then I shall be relieved to know it. But if there is such a movement, then I believe it to be a mistaken one. In its stead, I should like to remind you of an alternative approach which leads naturally to abstraction (if the pupils are ready for it), but which starts from a more concrete basis. I hope that my opening remarks will have convinced you that I am not laying down a rigid point of view (though I believe that I am right!), but rather that I am offering suggestions for discussion. If I succeed in that, I shall be well satisfied.

First, I must describe the kind of children I have in mind (too many of our discussions seem to be independent of real pupils). Up to the age[1] of 13, I am thinking of the greater part (at least the first three quartiles) of the school population. From 13 to 15, I am thinking of the first two quartiles and thereafter (15 to 18) of those pupils who are specializing in mathematics, science or engineering with a view to further studies, or who may choose to read mathematics in some depth as part of a general education. (There is a move in Britain to encourage all pupils in the 15 to 18 range to continue their studies in mathematics. Their needs are likely to vary considerably and other syllabuses, and maybe other teaching methods, will have to be devised for them.)

Second, in order to establish a common ground for discussion, we ought to agree on why we teach mathematics at all. At first sight, the answer, like Mr. Punch's advice to those about to be married, would appear to be "don't". For those characteristics of the subject which delight us are very often stumbling blocks in the way of its use in a general education. But we have not met together in Lyon to abandon our subject; so I shall attempt a more positive answer. (Though in answering the question, it is salutary to recall the story of Wittgenstein's experience as a teacher in Trattenbach; the villagers refused to supply him with milk because he taught their children sums which were not about money.)

No one would deny the need for technical competence in a wide range of applications of the subject. But there is the no less important contribution of mathematics to education for the good life; a rôle in which Plato accorded mathematics a pre-eminence. To that end, it should encourage the independence of thought which builds up the full man; it is opposed to the production of robots for technocrats (to borrow a phrase from Godement).

The main objects, then, are to develop technical competence (and the techniques may well be those of the electronic computer) and to train pupils to handle abstract ideas. Moreover, since technical expertise is basically a question of numeracy and spatial intuition and since number and space represent the first large group of abstract ideas which arise naturally in a precise form, the old-fashioned definition of mathematics as the science of number and space ought to inform our teaching. Thus the idea of an equivalence relation should grow out of many arithmetical and geometrical examples, rather than vice versa.

At the end of the 15 to 18 age range, one would hope that the pupils would possess the following.

(a) A good understanding of the nature of proof and the ability to express their arguments clearly.

(b) Familiarity with the notions of function and group of transformations and with the structure of Euclidean space, up to the point where they can see the need to define it in terms of real vector spaces.

(c) A knowledge of a geometrical approach to the infinitesimal calculus, up to the point of appreciating the need for a deeper study of the topological properties of the real line.

(d) Competence in solving equations, algebraic, trigonometric and differential.

(e) A knowledge of the applications of pure mathematics to statistics, numerical analysis, computing, mechanics and electricity.

All the foregoing are at present to be found in school projects in Britain (and to some extent in older syllabuses), though not perhaps with the emphases which I make in this lecture. I shall now try to make those emphases a little clearer by means of a few examples.

It is a commonplace that pictures leave a deeper impression on most human minds than abstractions and therefore the approach to school mathematics should be geometrical. Thus, for example, fractions should be presented in terms of cutting up rectangles, functions by means of graphs and physical laws and there is a strong case for including projective geometry, if only because it provides a natural illustration of the concept of the invariants of a group of transformations.

Now, all that I have said is very traditional and Klein or Whitehead would probably have said (indeed they did say) essentially the same things, albeit more elegantly and with greater authority. But such views are not necessarily wrong because they are old any more than the current fashion is right because it is new. Furthermore, we must beware of reading in to children's reactions more than is actually there. The fact that gifted teachers can persuade pupils to work with equivalence classes of ordered pairs does not necessarily mean that therein lies the correct approach to integers or fractions and it certainly does not guarantee that the children have the same understanding of their activities as does a mature mathematician. I dare say that one could teach a class to perform calculations with spectral sequences (I have recently taught myself to do so), though presumably no one would advocate their inclusion in the syllabus. And as for the pupils' understanding of their activities – a parrot which sings 'God save the Queen' is not necessarily a monarchist.

At the same time, there are occasions when pupils actually ask WHY? – 'why do you take brackets away like that?' and 'please sir, is the answer ab the same as ba?'. Those are the occasions on which to attempt formal answers in terms of ordered pairs and so on. But the creation of such openings for discussion depends upon the teacher and his understanding of his pupils as individuals. Formal definitions need not, and should not, be laid down in the syllabus, but the syllabus ought to be constructed and construed in such a way as to allow an easy transition to a formal approach.

For example, suppose that the solution of the equation $bx=a$ is introduced in the time-honoured fashion as the bth part of a line of length a. Then the familiar rule for multiplying a/b and c/d can be expressed in terms of covering a rectangle of area ac by means of bd rectangles each of size $(a/b)\cdot(c/d)$. (I am presupposing a discussion of multiplication of whole numbers in terms of areas.)

One takes a step toward algebra by using the familiar pictorial representation of fractions in terms of points with integral coordinates (the fraction a/b is represented by the point (a, b)). In this representation equivalent fractions appear on the same ray through the origin and one sees that the whole numbers have representatives of the form $(x, 1)$. Each line of equivalent fractions meets the line $(x, 1)$ in a point and those points yield the familiar properties of the (positive) rational number line. Finally, the pictorial representation provides a starting point for a discussion involving ordered pairs and a graphic illustration of the notion of a symmetry element with respect to a law of composition.

At a later stage, one can introduce the properties of the ring of integers, **Z**, in a similar spirit; for example, by games which involve the notion of translations to right and left. Such an introduction provides all the background for proving results by using ordered pairs, but it leaves open the possibility of more naïve descriptions if they should be appropriate.

To sum up, one's approach should not be determined by the mathematicians' constructions, but by the arguments which are most easily accessible to the children in the class. I am sure that it is always possible so to present the material that what is pedagogically expedient will lead in to what is mathematically correct, but one's priorities must be in that order.

Before discussing other examples of the way in which abstractions arise naturally, I should like to turn to my first quotation and talk about the place of proof.

Some of the current fashions in mathematics teaching are based on the assumption that it is both easier and more desirable to teach structure and pattern than it is to try to make pupils write out proofs. That may be so, but it is only a part of mathematics and it is unfortunate that many reforms have been accompanied by a weakening of the emphasis on proof.

The difficulty has been intensified by changes in the teaching of language (at least in England), where the emphasis is more on free expression than on logic and grammar. (This may well be a justifiable change, but it does present problems in other disciplines.) I believe that many young children have a feeling for logic which manifests itself in play with puzzles and in a sense of humour based on logical absurdity. This feeling is not seriously developed at present (indeed it seems almost to be repressed) and disappears before it is needed in mathematics. It could easily be developed by informal Boolean algebra and here I would suggest Lewis Carroll's *Symbolic Logic* and *The Game of Logic* (reprinted by Dover, New York) as possible visual aids. Games, like chess, which involve deduction could also serve, as they already do to some extent (notably in the Soviet Union). At the appropriate time (13 plus) this logical ability can be transferred, without comment, to mathematics.

Geometry has traditionally been the field of thought for training in proof and I think it is still the best. It is not just a question of logic, indeed it is not primarily a question of logic, but of getting hold of the subject at the right end, of seizing on a few general ideas which illuminate the whole. It is easier to do this, to begin with, in terms of spatial concepts than in more abstract theories.

I do not think it appropriate to follow a rigorous axiomatic treatment, nor to have an entirely descriptive treatment based on ill-defined operations. Instead one should adopt an approach half-way between the two. Namely, up to the age of 13, one should develop sound intuitive ideas by means of experiments and model making and on the basis of these one should lay down certain rules about space (for example, the existence of the Euclidean group of motions), which allow one quickly to reach interesting theorems that are significant but not obvious. To quote Pascal: one should not attempt to prove statements that are so obvious that nothing more obvious exists; one should prove all theorems that are not entirely clear and in the proofs one should use only very obvious axioms or theorems that are accepted or proved.

I agree that this is physics rather than mathematics, but at this level geometry should be presented as an abstraction from material relations. The approach has a respectable antiquity; see for, example, the opening sentences of Archimedes' treatise on moments of forces, *De Planorum Aequilibriis* (ed. Heiberg, ii). Moreover it should be accompanied by a parallel development of informal matrix algebra, which lays the foundations for a more formal approach at the 15 plus stage.

At the end of such a course, a pupil might have a good understanding of the nature of the physical assumptions underlying our description of 'real' space and ought to be able to see the point of defining the Euclidean plane as a two-dimensional real vector space on which is defined a non-degenerate, positive definite, symmetric, bilinear form.

Perhaps I can make my point of view a little clearer by expanding on that last remark. In the 13 to 15 range one can begin a deductive approach to geometry as follows. Imagine that, like Robinson Crusoe, one has been cast on a desert island away from our previous spatial experience with only the following remnants.

(1) The language of point, line and plane; the order relations and the properties of parallels.

(2) The notion of distance, including the triangle inequality.

(3) The existence of the isometries of folding, translation, reflection and rotation.

(4) The existence of similarities.

Now one plays a game, the object of which is to rebuild the world of one's spatial experience using only the rules of logic and the foregoing 'axioms'. (Of course one doesn't introduce all the axioms at once; Crusoe returned to the wreck.)

By using the concepts of similarity and scale factor, one proves the cosine formula

$$\cos\theta = \langle a \cdot b\rangle / \|a\| \cdot \|b\|$$

for the angle θ between the vectors a and b. In the next (15 plus) stage, one invites the pupils to think about the assumptions underlying such a proof, perhaps using non-Euclidean geometry for purposes of comparison. In that way, the notion of a model for the Euclidean plane arises naturally.

The vector form of the cosine formula suggests the idea of abstracting the concept of a two- (or three-)dimensional vector space and other clues to significant abstractions can be found in the earlier treatment of angles by rotation, and so on. This leads to the group of rotations as a subgroup of index 2 in the group of orthogonal transformations and the whole approach nicely rounds off the work in school, as well as looking forward to the treatment in the University. If one has also done some projective geometry by projections, then a definition of the projective plane in terms of linear algebra can be given and the first steps taken towards duality and the related treatment of linear equations. (The foregoing is much influenced by the books *L'Enseignement de la Géométrie* (Hermann, Paris, 1964) and *Algèbre Linéaire et Géométrie Élémentaire* (Hermann, Paris, 1964) of G. Choquet and J. Dieudonné, respectively. Certainly the approaches of these books would require considerable modification before they conformed with my bowdlerization, but the seminal influence is there nevertheless.)

Thus the approach to proof is presented as a game: the rules are the rules of logic and the basic assumptions, the object of the game is to prove theorems. One of the fascinations of Robinson Crusoe, whose adventures Rousseau described as the "best imagined treatise on natural education", is that the hero succeeds in doing as much as possible with as little as possible. That is one of the fascinations of mathematics. Of course the brightest pupils will play the game instinctively, but in my experience the less able liked to have some explanation of the point of it all. Explanations like the foregoing rarely converted the pupils, but they often helped to explain my curious enthusiasms to them.

I should like to take my last example from analysis. I assume that the pupils will already have been introduced to the calculus from a geometrical point of view. Thus they will have learnt about integrals in terms of area and about derivatives in terms of linear approximations and they will know the connection between the two. I assume too that they will have begun to learn some structural concepts and will know that homomorphisms are important.

Consider then the problem of finding a zero of a real-valued polynomial $f(x)$ in the interval $[a, b]$. If $f(a)<0<f(b)$, then $f(\xi)=0$ for some $\xi \in [a, b]$. Let c be the mid-point of $[a, b]$ and consider the value $f(c)$. If $f(c)\neq 0$, we obtain a second interval $I_1=[a_1, b_1]$ in which $f(a_1)<0<f(b_1)$ and length(I_1) $=(b-a)/2$. In this way we obtain an iterative process which, for each integer $n\geqslant 0$, yields a sequence

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n$$

where length$(I_n)=\frac{1}{2}$ length(I_{n-1}) and either f is zero at the mid-point of I_n (in which case the process stops) or f takes opposite signs at the ends of one of the two halves of I_n. If the process does not terminate, we obtain an infinite sequence of the intervals I_n and it is natural to assume that these intervals squeeze down to the required zero, ξ. It is right to begin to question such assumptions in school, though in my opinion it is unwise to attempt a formal construction of $\mathbf{R}$ unless one has particularly exceptional pupils.

The foregoing example arises naturally in numerical analysis and in the preparation of flow diagrams and introduces the idea of the limit of a sequence. Other sequences (for example, the iterative process for $\sqrt{2}$) will have been encountered earlier and the way will have been prepared for a general discussion on limits of sequences and the least upper bound property of the real line.

The familiar results about limits of sequences (for example, the theorem that the limit of the product of two sequences is the product of the limits) have a nice algebraic formulation, which encourages the pupils to see the advantages of abstract concepts. Consider the set S of all sequences $p:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$. S is a vector space over $\mathbf{R}$ and, indeed, componentwise multiplication of sequences yields an algebra over $\mathbf{R}$. From S, we extract the subset C of convergent sequences and we get a function $\lim:C\to\mathbf{R}$ by associating with each $p \in C$ its limit (in $\mathbf{R}$). Then all the algebraic properties of limits are summarized in the theorem: the map $\lim:C\to\mathbf{R}$ is a homomorphism of algebras.

Of course, in one sense this does not say any more than one can say by writing a long list of theorems like $\lim(a_n+b_n)=\lim a_n+\lim b_n$. But it does illustrate the economy of thought offered by the abstract language and the sooner one learns it the better.

To sum up:

Topics should be chosen either because technical competence in them is necessary or because they are concrete introductions to big mathematical ideas, or both.

The material should be presented in such a way as to leave open the possibility of a more abstract development if the pupils are ready for it.

All this puts a heavy responsibility on the teacher both to know his subject and to know his pupils.

I realize that the foregoing seems obvious and even reactionary, but I hope that it will provoke discussion and I shall be happy to enlarge on anything I have said. I am quite prepared to be told that I have underestimated the average pupil's ability to handle abstract ideas. Indeed I would prefer to be told that what I have said is wrong, rather than be left with the impression that it is irrelevant.

Department of Mathematics,
King's College, London

REFERENCE

[1] The following is based on an age classification, but I prefer to think in terms of stages of development. Thus the first stage is experimental, the second is the beginning of the use of deduction and the third sees the beginning of systematisation.

R. GAUTHIER

ESSAI D'INDIVIDUALISATION DE L'ENSEIGNEMENT

(Enfants de dix à quatorze ans)

Enseigner, c'est en permanence se poser des questions. Elles portent d'ailleurs bien plus sur la manière que sur le contenu. Le maître qui a la charge de jeunes enfants se doit, bien sûr, de dominer la notion mathématique traitée: sa formation initiale, si elle est bien faite, permet d'atteindre ce but. Mais il est au moins aussi important pour lui de rechercher les moyens d'approche, les procédés de communication les mieux appropriés à l'apprentissage et à l'initiation. La pédagogie, qui ne s'apprend pas sur les bancs de l'université, est une création de tous les jours et une réflexion permanente. En mathématique, où la préparation à l'abstraction est fondamentale, il faut se garder d'attribuer trop hâtivement un échec à une inaptitude. Tout enfant doit pouvoir être amené à comprendre les concepts fondamentaux, en définitive très simples: le nier voudrait dire que la mathématique est réservée à une élite intellectuelle privilégiée, ce que nous nous refusons à penser. Mais l'enfant peut être rebuté par la méthode, si elle est trop dogmatique et trop formelle; il répugne à un mécanisme stérile, sans intérêt culturel.

Il est dramatique de constater combien d'enfants se détournent d'une science pourtant bien vivante, à cause d'une présentation qui ne laisse aucune place à l'initiative et à l'imagination.

Depuis deux ans, avec d'autres équipes en France, nous avons été conduits à enseigner à des enfants de onze et douze ans, un programme nouveau dans le cadre d'une expérimentation organisée et contrôlée par l'Institut Pédagogique National. A Lyon, trente professeurs environ ont participé à ce travail. A cette occasion, il nous a paru indispensable de repenser les moyens pédagogiques propres à l'enseignement des mathématiques à ce niveau. Un nombre non négligeable d'échecs, une diminution sensible des vocations scientifiques nous impose de nous pencher sur ce problème.

Il est trop facile de parler d'inaptitude pour expliquer tous les échecs. Le professeur a le devoir de s'interroger sur ses propres méthodes, de les remettre en cause, d'en chercher les défauts.

Nous connaissons tous un enseignement que nous appellerons "collectif"; c'est en analysant ses défauts que nous avons tenté de lui substituer une formule plus souple.

Dans cet enseignement collectif, le maître propose à la classe tout entière des démonstrations, des exercices, des thèmes de réflexion avec la participation des enfants, c'est-à-dire en posant des questions, en suggèrant les réponses et les prolongements. Tous les enfants peuvent, en principe, être interrogés, mais le maître garde une situation privilégiée, hors du groupe. L'enfant qui pouvait répondre et qui n'est pas interrogé se sent, en raison du nombre, frustré d'une possibilité d'expression. Le maître doit choisir et en choisissant, il prive le plus grand nombre de l'occasion d'une activité personnelle.

Pourtant, l'enfant se sentira vraiment concerné à condition qu'on lui donne le pouvoir de chercher lui-même le plus souvent possible et surtout d'exprimer individuellement le résultat de sa recherche, de comparer le fruit de son travail avec celui de ses camarades. Une passivité au sein du groupe conduit inévitablement au manque d'intérêt. Apprendre, ce n'est pas seulement écouter et répondre quelques fois, mais c'est agir de façon permanente.

Par ailleurs, tous les enfants, au même instant, doivent réagir à la même question du maître. Il est bien connu que des enfants sont souvent distraits; n'ayant pas entendu la question posée, ils perdront le bénéfice de la réponse et il leur manquera un maillon de la chaîne. Pour certains, la compréhension s'arrêtera là.

Peut-on vraiment blâmer quelques instants de rêverie chez un enfant de onze ans durant les nombreuses heures de cours de la journée? Sévérité, punitions répétées ne corrigeront pas totalement ces inattentions chroniques; elles risquent même d'accentuer le découragement de l'enfant pour qui une attention soutenue est au dessus de ses moyens. L'élève deviendra ce cancre docile et inoffensif qui copie le cours, essaie d'apprendre sans bien comprendre, mais ne se sent plus concerné par le travail de la collectivité.

Ce système prétend transmettre une information au même rythme à tous les enfants d'une même classe. L'expérience quotidienne prouve que, à cet âge surtout, les différences de rapidité dans la compréhension et l'assimilation sont considérables. Les esprits vifs répondent très rapidement, suggèrent des prolongements. Ils imposent un certain rythme au déroulement du cours. Ils ont déjà prévu la question qui va suivre alors que le camarade plus lent n'a pas encore saisi le sens de ce qui précède. Tous, nous avons fait l'expérience de ces enfants qui, au milieu de la leçon, demandent à revenir sur une proposition initiale non comprise. D'ailleurs, une telle demande n'est jamais formulée par les timides; ils essaieront de comprendre plus tard et s'enfermeront dans leurs difficultés.

Le professeur connaît bien ce problème après quelques années de métier, mais il est malgré lui entraîné en avant par les plus rapides, avec la satisfaction d'être suivi par le plus grand nombre.

Beaucoup d'échecs scolaires trouvent leur origine dans cette lenteur qui est loin d'être synonyme d'incompréhension et d'inaptitude; le malheur est que le système tend à confondre les deux choses.

Ce phénomène du déphasage dans le temps a d'autres conséquences. Le maître averti et prudent, qui a le souci d'être suivi par les plus lents, adoptera un rythme approprié. Mais les élèves rapides se sentiront frustrés d'un savoir plus consistant; il risque d'en résulter un manque d'intérêt chez ces enfants capables d'une assimilation plus rapide. Il est ainsi bien malaisé d'enseigner à la même vitesse dans une classe de trente élèves et plus, sans défavoriser les uns ou les autres.

Voici un autre danger de cette méthode collective utilisée systématiquement: c'est le risque d'un bavardage excessif du maître. Quel professeur ne s'est jamais laissé porter par cette magie des mots et du discours, devant une assemblée d'enfants qui ont tout à apprendre? Dans une certaine mesure, elle pourra être enrichissante et bénéfique avec des adolescents, des étudiants ou des adultes, mais elle risque d'être une catastrophe avec de jeunes élèves dont la capacité d'attention auditive est bien réduite, alors même que pour eux les mots les plus simples constituent encore une difficulté de compréhension. Ecouter trop longtemps est vite une fatigue pour l'enfant. Très rapidement, il entend les mots, mais ne retient plus; il écrit mais ne comprend pas. Il hésite à intervenir, de peur de paraître stupide s'il semble ne pas comprendre un si beau discours. Le mot se vide de sa signification.

Autre lacune, enfin, de cette méthode collective: l'enfant n'apprend pas à étudier lui-même à partir d'un document écrit. Bien sûr, il a l'habitude de lire des textes d'exercices, d'apprendre une leçon; mais tout cela reste très limité; ces lectures ne contribuent pas à la recherche et à la découverte, ce sont en quelque sorte des lectures passives. Le manuel n'est à peu près pas un outil de travail; il reste une pièce de musée que l'on évite de détériorer de peur qu'il ne se déprécie et dans les meilleurs des cas, il apporte tout juste une répétition du discours déjà entendu.

Cette absence d'activité individuelle à partir d'un texte écrit explique à n'en pas douter certaines paniques de l'enfant devant le sujet d'examen et de concours. Il manque totalement de confiance dès qu'il est privé du discours magistral; la leçon manquée, par exemple, sera irrémédiablement perdue. Demain, l'étudiant sera incapable de travailler seul sur une question nouvelle. Adulte, il n'aura pas été formé à cet esprit critique à l'égard des textes, avec tous les dangers que comporte cette lacune.

Si nous n'y prenons garde, nos enfants "n'apprennent pas à apprendre"; ils se bornent à enregistrer. Et pourtant la formation du jugement est bien l'un de nos buts essentiels, plus que l'acquisition de techniques et de recettes.

A cette forme collective et orale de communication, est-il possible de substituer un enseignement qui s'adresse davantage à l'individu et à son goût de la recherche? Comment respecter dans une large mesure le rythme de chacun en donnant à tous la possibilité d'agir en permanence? Est-il possible de remplacer, en grande partie, le discours magistral par une technique d'apprentissage personnel?

Depuis quelques années, nous nous posons ces questions; d'autres équipes ont travaillé dans le même sens, au cours de la même expérience. Je parlerai ici essentiellement de notre expérience lyonnaise qui concerne environ 1200 enfants et plus de trente professeurs, répartis dans sept établissements de Lyon et Bron, depuis deux années. En octobre 1968, cette recherche s'est étendue et concerne près de 3000 enfants à Lyon, Bron, Saint-Etienne, Oullins.

Au dialogue "maître-classe", nous avons cherché à adjoindre d'une part le dialogue entre les enfants eux-mêmes au sein de groupes de travail réduits et entre les groupes, et d'autre part une véritable activité individuelle de l'élève.

Une équipe de professeurs élabore des "fiches de travail"; après diverses mises au point, ces fiches sont imprimées par notre Centre Régional de Documentation Pédagogique et distribuées dans les établissements scolaires. Chaque enfant recevra une fiche, collée sur une page de cahier de grand format ou insérée dans un classeur.

Nous allons examiner diverses questions relatives à ce travail:

le contenu des fiches
le travail de l'enfant
le rôle du maître
les défauts du système

Le contenu d'une fiche est bien sûr très variable. Certaines se bornent à proposer des activités simples voisines du jeu. D'autres, plus formelles, conduisent à des résultats précis à partir d'exercices gradués et de contre-exemples divers, assortis parfois de démonstrations. D'autres enfin contiennent des exercices d'application et de contrôle des acquisitions. Dans tous les cas, à partir d'une activité à sa portée et des connaissances acquises, l'enfant est progressivement conduit vers un concept nouveau. Avant toute formalisation, il est essentiel de présenter divers modèles, des situations variées, comportant la même structure sous-jacente. Certes, ce n'est pas toujours très facile à réaliser et nous n'y sommes pas toujours parvenus.

La rédaction doit être très simple, avec des phrases courtes. Il ne faut jamais perdre de vue que l'enfant de onze ans possède un vocabulaire relativement restreint en dehors de celui du langage courant, mais qu'il est par contre très receptif aux mots nouveaux présentés de façon claire.

La fiche sera un véritable instrument de travail pour l'élève. Lorsque le sujet s'y prête, il peut répondre directement sur le document, compléter un schéma, dresser un tableau, colorier, découper. La fiche est *sa* chose.

Voici, pour ces deux premières années, la répartition des documents et les sujets abordés.

Classe de sixième (onze ans)

Vocabulaire des ensembles	4 fiches
Relations, applications	13 fiches
Sous-ensembles	6 fiches
Numération, addition dans **N**	9 fiches
Multiplication sur **N**	5 fiches
Mesures, approximations	12 fiches
Ensemble **Z** des entiers, addition	6 fiches
Repérage	3 fiches
Fiches d'exercices et de prolongements	29 fiches

Classe de cinquième (douze ans)

Compléments sur les ensembles et les relations	18 fiches
Arithmétique dans **N**	13 fiches
Équivalence et ordre	7 fiches
Naturels premiers, treillis des diviseurs	6 fiches
Ensemble **Z**: $+, \times, -$	14 fiches
Géométrie sur quadrillage, translation	5 fiches
Étude concrète de l'espace, convexité	6 fiches
Fiches d'exercices et prolongements	33 fiches

Pour ces deux années: fiches de calcul numérique: 60 fiches environ.

Il n'est peut-être pas sans intérêt de commenter très rapidement certaines de ces fiches, qui seront projetées.

DOCUMENT 1: Parties d'un ensemble. En utilisant un arbre dichotomique, l'enfant devra écrire toutes les parties d'un ensemble fini et découvrira à cette occasion l'ensemble vide, dont on n'a pas encore parlé.

DOCUMENT 2: Bijections. A partir d'exemples d'applications, l'élève découvrira ces applications particulières que sont les bijections. C'est une fiche dans laquelle on rencontre une notion nouvelle sur des schémas, sans formalisation précise.

DOCUMENT 3: Il s'agit ici d'une fiche d'exercices sur les applications dans laquelle il est fait un très grand usage des dessins, avec un discours très réduit.

DOCUMENT 4: Réunion et addition. L'enfant devra compléter un tableau sur la fiche elle-même et sera conduit à une conclusion à partir des résultats.

DOCUMENT 5: Ce jeu (jeu de l'oie) a pour but de conduire au concept d'entier et permettra d'inventer l'addition sur l'ensemble **Z**. Cette présentation, très simple, fut incontestablement un succès, puisqu'elle conduisit nos élèves à la découverte des règles opératoires sans aucun formalisme.

DOCUMENT 6: Jeu avec des triangles, conduisant à une structure de groupe et à la résolution d'équations.

DOCUMENT 7: "Jeu de domino" qui utilise les "Blocs Logiques", propres à familiariser l'enfant avec la notion d'attribut.

DOCUMENT 8: Cette fiche est à la limite de ce que l'on peut attendre des enfants de cet âge; mais elle servira à alimenter les enfants rapides. Elle fait partie de nos "fiches-tampon". Elle peut aussi dans certaines classes être utilisée comme fiche de contrôle.

DOCUMENT 9: Les fiches présentées ici sont des fiches de calcul numérique. Ces exercices ont été traités à l'aide de machines à calculer de bureau, à raison de une machine pour deux enfants. Chaque calcul est motivé; débarassé, en partie, de calculs fastidieux à faire "à la main", l'enfant est disponible pour réfléchir sur son calcul, sa stratégie, interpréter ses résultats. Loin d'encourager sa paresse et de favoriser l'oubli des fameuses "tables", cette technique de traitement du calcul permet de mieux faire comprendre à l'enfant les mécanismes opératoires et par là à mieux dominer les résultats à connaître.

Nous avons passé en revue divers types de fiches. Il convient d'ajouter que très souvent tel d'entre nous a rédigé lui-même certaines fiches, soit pour des contrôles de connaissances, soit pour apporter un complément à sa propre classe sur une question mal comprise, soit même pour remplacer telle fiche. Cette utilisation doit toujours rester très souple; le professeur n'est pas esclave des documents établis par l'équipe. Et chacun d'entre nous trouve toujours meilleure la fiche qu'il a lui-même rédigée.

Chaque enfant recevra donc une fiche qu'il collera dans un cahier. Nos élèves travaillent par groupe de deux, trois ou quatre. Il sera nécessaire de déplacer les tables, car nos classes ne sont jamais conçues pour une autre forme d'enseignement que le cours magistral. Les groupes, en début d'année, se constituent spontanément, sans l'intervention du maître. Ces équipes vont assez vite changer de visage, et il n'est pas rare de voir un élève changer d'équipe. Au bout de quelques semaines, certains éléments ont du mal à s'intégrer aux groupes, d'autres préfèrent travailler seuls; il nous faut alors être très prudents. Dans certains cas l'intervention du professeur est nécessaire pour éventuellement modifier l'organisation du travail, pour encourager tel enfant à se joindre à d'autres camarades; mais de temps en temps, il ne faut pas insister et laisser chacun travailler à sa guise. Faire preuve ici d'autorité serait souvent nuisible et irait à l'encontre du but poursuivi.

Dans chaque groupe, on échange des idées sur les questions posées dans la fiche, sur la manière de résoudre telle ou telle difficulté. D'un groupe à l'autre, on compare des résultats; les enfants se déplacent, se posent des questions entre eux; réclament l'aide du professeur, toujours bien présent, mais mêlé aux enfants, allant d'une équipe à l'autre. Il a abandonné son estrade et son piédestal. Sur la feuille de cahier, sont consignées les réponses, les croquis d'abord maladroits, puis mieux structurés à la lumière de la recherche. La fiche terminée, le maître contrôle rapidement, pour cette équipe, les résultats les plus significatifs. Dans certains cas est établie une "fiche-réponse", qui sera distribuée à la demande.

La fiche suivante est alors proposée à l'équipe, sans attendre, bien sûr, que toute la classe ait terminé: c'est un point très important, si l'on veut réellement respecter le rythme propre à chacun.

Il arrivera cependant que l'on demande aux élèves particulièrement rapides de conseiller et de guider les plus lents. Ces enfants deviendront les assistants du maître, et tous dans nos classes, nous avons ainsi un ou deux auxiliaires qui se font parfois mieux comprendre de leurs camarades que le professeur lui-même, dans ce langage propre aux enfants. C'est pour nous un moyen de permettre aux plus rapides de se mettre au niveau des autres, avec la satisfaction de leur apporter quelque chose.

Pour diminuer ces décalages dans le temps, nous proposons aussi aux enfants rapides des fiches supplémentaires, comportant des prolongements, des exercices qu'il n'est pas nécessaire d'avoir étudié pour aborder la suite de la progression. Ils sont ainsi "alimentés" et n'ont pas l'impression de perdre leur temps.

Toutes les séances de travail ne sont pas occupées par la recherche sur fiche. Nous parlerons tout à l'heure des cours de synthèse. Il convient d'y ajouter le travail effectué alors que la classe est dédoublée. A cette occasion, nous abordons des exercices plus ouverts, des manipulations diverses avec matériel (blocs logiques, cartes perforées) et surtout nos élèves font du calcul numérique avec ces machines de bureau dont il a déjà été question.

Il n'est pas impossible aussi que, pour une partie, l'étude de la fiche soit menée collectivement; c'est parfois nécessaire en raison de difficultés particulières. Mais la majeure partie du temps consacrée aux mathématiques est occupée par ce travail individuel sur fiches.

On pourrait penser que le professeur n'a qu'une utilité bien limitée dans ce système. En fait, il n'en est rien. Son rôle est totalement transformé. Ce n'est d'ailleurs pas sans quelque appréhension que, les uns et les autres, nous avons abordé ce style de travail. Il y faut un réel effort de reconversion, une véritable volonté pour renoncer à certaines habitudes. Pour que l'expérience tentée ne soit pas dénaturée et d'avance condamnée, il est indispensable de faire cet effort de remise en question. C'est après plusieurs mois seulement, d'efforts, d'observations, de critiques, que l'on découvrira le style le meilleur et que l'on obtiendra des résultats intéressants. Sans un véritable acte de foi préalable, on risque de revenir trop tôt à la facilité des habitudes.

Le maître ne se borne pas à la distribution des fiches et la correction des cahiers. Il reste en permanence le conseiller et le guide pour chaque enfant, pour chaque équipe. C'est dire qu'il doit se déplacer constamment, redresser une erreur, donner un conseil, poser lui-même des questions en guise de réponse, se pencher plus particulièrement sur l'élève lent; ce n'est pas là un travail de tout repos.

A l'occasion de ces échanges, il doit exiger de l'enfant, une formulation orale claire et précise, souvent une relecture du texte, écouter des explications confuses et les faire préciser.

Dans certains cas, au début de l'étude d'une question nouvelle, il est bon que le professeur expose rapidement à l'ensemble de la classe quelques idées permettant de mieux comprendre le contenu des fiches qui seront abordées. On amorce la recherche par une introduction courte et précise.

Par ailleurs, au cours de la recherche individuelle décrite plus haut, il arrive que plusieurs enfants soient arrêtés par un point précis, soit en raison d'une difficulté d'ordre mathématique, soit pour une mauvaise rédaction de la fiche. Il est alors possible de rassembler ces quelques enfants devant le tableau noir pour leur donner ce complément d'information qui permet d'aller de l'avant. Cette confrontation permet toujours de lever certaines difficultés et d'éviter de trop longs piétinements.

Enfin, de façon régulière, il convient de procéder à une étude de synthèse sur un ensemble de fiches, de faire le point sur une notion dont l'étude est achevée par tous. Souvent préparée par les enfants à la maison, cette mise au point prend l'aspect d'un travail collectif, sous la conduite du maître. Il lui faut faire le tri des remarques, insister sur l'essentiel, expliquer pourquoi telle idée retenue n'est que secondaire. Ces choix, l'enfant n'est pas toujours capable de les faire seul. A la suite de cette discussion, un texte court sera noté sur un feuillet spécial. L'enfant a besoin, à certains moments, de points de repère précis; il faut l'aider à dégager les choses importantes à la suite d'une étude de deux ou trois semaines. Il faut lui montrer ces jalons simples et précis qui se dégagent dans la mathématique. Il n'en sera que plus à l'aise pour avancer dans son étude; mieux, plus tard, si on a su le guider, il saura lui-même dégager une structure, reconnaître une propriété essentielle.

Il reste à évoquer la question du contrôle des connaissances. On peut dire d'abord qu'il est permanent, en ce sens que l'enfant, au cours de sa recherche personnelle aura constamment à utiliser les notions rencontrées dans les fiches précédentes. S'il a oublié le sens d'un mot, il lui appartient de revenir en arrière et il n'est pas rare de voir nos élèves feuilleter leur cahier, leurs fiches de synthèses pour se rafraichir la mémoire en cours d'étude.

Un contrôle systématique est organisé sous forme d'interrogations régulières, soit sous forme orale, mais la plupart du temps sous la forme d'un test écrit. L'enfant répondra individuellement, en faisant usage, ou non, de ses documents. Les résultats de ces interrogations nous obligent parfois à revenir sur telle ou telle question mal assimilée par l'ensemble, à reprendre une explication de détail à un groupe d'enfants.

Il faut ajouter que vérification du travail et contrôle des connaissances se font en permanence tout au long des séances: une certaine disponibilité du maître lui permet précisément de noter bon nombre de remarques sur le comportement, la rapidité, les acquisitions de chacun.

Le travail du professeur n'est donc pas de tout repos. Si on ajoute les longues discussions qui accompagnent l'élaboration des fiches, on imagine sans peine que sa tâche, si elle est modifiée, n'est pas diminuée. Mais nous éprouvons la grande satisfaction de voir nos élèves aimer ce qu'ils découvrent eux-mêmes, réclamer du travail sous forme de fiches supplémentaires. Les rapports entre le maître et ses élèves sont totalement modifiés: l'enfant est concerné par ce travail qui réclame de lui une activité. Il n'est plus seulement destiné à enregistrer.

Tout cela ne va pas sans difficultés, sans imperfections. C'est une entreprise humaine, dépourvue de miracles.

Disons d'abord que ce travail est relativement lent dans l'ensemble. Mais on s'aperçoit très vite que ce qui est "perdu" en temps est retrouvé très largement en profondeur d'assimilation. Nos élèves retiennent. Nous l'avons constaté à maintes reprises en début de la seconde année. Les notions étudiées dans le courant de l'année passée étaient toujours présentes à leur esprit: nous avions le sentiment de n'avoir pas inculqué un savoir sous une forme artificielle, mais d'avoir impregné leur mémoire d'une connaissance définitivement acquise.

Il y a, bien sûr, une difficulté due au rythme propre à chaque enfant. Si on veut utiliser ces fiches, il est important de respecter dans une large mesure ces différences de rapidité, et c'est souvent une gêne pour le professeur, non seulement dans la conduite journalière de sa classe, mais principalement lorsqu'il désire, avec toute la classe, procéder à une étude de synthèse.

Dans certains cas, nous avons rencontré des écarts de six fiches et plus dans une même classe. En dépit des moyens utilisés pour limiter ces écarts, sans remettre en question le principe des rythmes différenciés, les décalages subsistent; c'est dans la nature des choses. Ce sont d'ailleurs toujours les mêmes enfants qui prennent du retard. Mais on remarque souvent des variations. Pour ma part, j'avais très vite remarqué un jeune enfant particulièrement lent en début d'année de sixième. Il a fallu plus d'une année pour qu'il parvienne au rythme de travail voisin de celui des plus rapides, avec une bonne compréhension. Tel autre, rêveur et dissipé, a fourni un travail meilleur et plus rapide à la suite de résultats inquiétants en fin de trimestre. Il faut bien se dire qu'aucune méthode, aussi bonne soit-elle, ne supprimera totalement le paresseux et le rêveur. Mais cette individualisation présente au moins l'avantage de permettre à chacun de rattraper un retard, quelle qu'en soit la cause, et d'éviter les découragements.

Ce travail s'accompagne inévitablement de bruit dans la classe. Bavardages, déplacements, échanges, tout cela n'est pas toujours silencieux. Les professeurs n'aiment pas, en général, que l'on dise de leurs classes qu'elles sont bruyantes. C'est souvent considéré comme un manque d'autorité et quelques-uns de nos collègues vont jusqu'à nous accuser d'encourager l'indiscipline. Il ne faut tout de même pas prendre le silence comme un critère d'intérêt pour la chose écoutée.

En fait, nos élèves parlent, mais ne bavardent pas! Ils travaillent, tout simplement. Il est très exceptionnel que dans un groupe, on parle d'autre chose que de la question étudiée à cet instant. Il n'est pas sans intérêt de constater que des enfants de onze ans sont capables de parler mathématique. N'est-ce pas un premier critère de succès?

Malgré toutes les consolations que nous pouvons nous trouver, et elles sont nombreuses, les classes sont bruyantes. Ce bruit doit sans doute contribuer à une diminution du "rendement"; mais le problème est sans solution. Si nous voulons encourager une activité individuelle, une recherche en commun qui ne soit pas artificielle, susciter des échanges, il faut bien tolérer la parole.

Ce que nous pourrions souhaiter en tout cas, ce sont des locaux assez vastes, mieux adaptés à ce travail.

Pendant une partie au moins de la séance de travail, il est possible d'imposer une recherche individuelle silencieuse, par exemple en début d'heure, au moment où l'attention peut se fixer sur des points précis.

Voici, pour finir sur ce point, une critique souvent formulée par des collègues. Si l'on souhaite que l'enfant, livré à lui-même, soit capable d'arriver à la compréhension d'une notion mathématique nouvelle, il importe que les questions soient simples, que le travail soit préparé dans le détail, vers un but précis. La recherche de l'enfant est donc très dirigée; chaque étape est parfaitement précisée.

En définitive, l'initiative laissée à l'enfant est réduite. Conduit pas à pas vers une réponse, il n'a plus à faire preuve d'imagination. Si l'on n'y prend garde, il sera plus tard dérouté devant un exercice où les étapes n'auront pas été préparées.

C'est une question importante et nous devons être très prudents dans la rédaction. Il est incontestable que le risque existe. Mais il ne faut pas oublier que, pour des enfants de cet âge, nous sommes au stade de l'initiation mathématique. On ne peut pas attendre d'un enfant de onze ans qu'il construise seul, à partir d'un matériel très réduit. Il lui faut déjà avoir rencontré des modèles. L'imagination en mathématique s'exercera dans certaines voies, à partir de données préalablement acquises. Tout n'est d'ailleurs pas mathématisable, bien heureusement, et tous nos enfants n'ont pas la puissance de création d'un Pascal, d'un Gauss, d'un Galois.

Le travail d'apprentissage est donc fatalement directif, dans une certaine mesure. Après deux années, nos élèves auront assimilé un certain nombre de concepts. Ils auront entrevu des structures. Ils sont aptes à une véritable découverte mathématique. Alors, imagination créatrice, sens de la synthèse, initiative, pourront s'exercer valablement parce que préparées par un travail d'approche précis. Il semble dangereux de vouloir brûler les étapes.

Cela signifie que, après cette expérience de deux ans, nous sommes convaincus de la nécessité d'une modification assez sensible du style, du contenu, de la présentation et de la rédaction des fiches de travail, et même de leur utilisation.

Nous rencontrerons, à n'en pas douter, de nouvelles difficultés. Mais seuls, le travail d'une équipe de professeurs, l'expérimentation, une mise au point permanente avec le souci constant de l'intérêt de l'enfant, pourront nous aider dans cette tâche qui ne fait que commencer.

Il n'est donc pas question de conclure.

Le biologiste, penché sur sa préparation, dispose de critères objectifs et communicables pour rendre compte de ses travaux.

Le chercheur qui construit son module lunaire, verra bien, et le monde avec lui, si son engin est capable de poser ses pattes sur notre satellite.

Le professeur, lui, ne peut donner des indications que tendencieuses, partielles, subjectives sur sa méthode de travail: l'objectivité véritable n'existe pas encore en pédagogie expérimentale.

Le maître qui est sûr d'avoir intéressé ses enfants, qui les voit travailler dans la joie, qui suscite des vocations scientifiques, qui accepte sans crainte le dialogue avec les parents de ses élèves, ce maître-là croit qu'il a réussi dans sa tâche.

C'est le sentiment que tous nous éprouvons après ces deux années. Est-ce suffisant?

Les entreprises humaines sont exemples de miracles et nous ne pensons pas avoir réalisé des prodiges. Tout au plus modestement participé à cette incessante recherche de l'homme vers une meilleure communication de son savoir.

Mais l'autosatisfaction est trop facile; elle conduit au renoncement et vers de nouvelles habitudes. Je ne peux oublier ce vieil ami, aujourd'hui en retraite, que je voyais, chaque année scolaire, transformer son cours et remettre en cause ce qu'il avait fait l'année précédente.

Jamais, pour lui, l'enseignement n'avait été "Ce toit tranquille où marchent les colombes". C'est ce que je voudrais, pour finir, souhaiter à mes camarades.

Lyon

G. G. MASLOVA

LE DÉVELOPPEMENT DES IDÉES ET DES CONCEPTS MATHÉMATIQUES FONDAMENTAUX DANS L'ENSEIGNEMENT DES ENFANTS DE 7 À 15 ANS

La présente communication traite du nouveau programme de mathématique à l'école en URSS. Ce programme sera mis en vigueur à partir de l'année scolaire 1969–70; à partir de l'année scolaire 1974–75, tous les élèves doivent quitter l'école avec les connaissances et les aptitudes prévues par le nouveau programme.

Le programme propose la structure suivante pour les cours de mathématiques:

Classe	Age des élèves	Disciplines étudiées
I–III	7–10	Mathématique (cours d'introduction)
IV–V	10–12	Arithmétique et éléments d'algèbre et de géométrie
VI–VIII	12–15	Algèbre et géométrie
IX–X	15–17	Algèbre et éléments d'analyse, géométrie

Classes	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	Total
Heures de cours obligatoires par semaine	24	24	24	24	30	30	30	30	30	30	276
Heures de cours facultatifs par semaine	–	–	–	–	–	–	–	4	6	6	16

Cette structure explique le choix de l'intervalle d'âge (7 à 15 ans) auquel se limite notre communication: c'est l'âge des élèves de l'école de huit ans, obligatoire pour tous. Il faut remarquer que l'enseignement à l'école soviétique s'effectue selon un programme unitaire.

Passons au système d'enseignement des idées et des concepts fondamentaux dans le cours de mathématique pour les élèves de 7 à 15 ans.

Pour le système d'enseignement mathématique de l'école secondaire, le contenu et le caractère de l'enseignement au niveau primaire est d'une grande importance. Les données scientifiques contemporaines sur la possibilité d'assimilation des élèves des petites classes et l'expérience acquise dans de nombreuses écoles en URSS et à l'étranger permettent de limiter la durée de l'école primaire à trois ans (au lieu des quatre ans traditionnelles dans notre pays).

Comme on voit, l'horaire permet l'étude quotidienne des mathématiques. Ceci nous donne la possibilité d'effectuer un travail systématique ayant pour but le développement mathématique de l'élève, qui rencontre tous les jours des situations mathématiques, travaille avec des concepts mathématiques.

Le volume de connaissances que l'élève doit acquérir en trois ans correspond grosso modo au programme en vigueur pour l'école primaire actuelle de quatre ans.

L'enseignement des mathématiques dès la 4ième sera effectué par un professeur spécialiste en mathématiques, ayant un diplôme d'études supérieures pédagogiques. Ceci permettra d'élever considérablement le niveau des connaissances mathématiques des élèves.

Le cours de mathématique dans les classes 1ière–3ième est une partie organique du cours de mathématiques de l'école secondaire. L'arithmétique des entiers naturels et les grandeurs fondamentales forment l'ossature principale de ce cours. Des éléments de géométrie et une propédeutique de l'algèbre s'unissent autour de ces matières. La propédeutique algébrique entre organiquement dans le système des connaissances arithmétiques, permettant une meilleure assimilation de la notion de nombre, des opérations arithmétiques et des relations mathématiques.

La liaison étroite avec le monde extérieur est un des principes fondamentaux de l'éducation.

Tout en admettant l'importance du développement de la pensée abstraite des enfants, nous sommes toutefois très prudents vis-à-vis de la modernisation du cours de mathématiques à l'école primaire. Nous sommes convaincus que l'élève ne doit pas considérer les mathématiques comme un système de conventions arbitraires, que l'élève ne doit pas opposer les mathématiques aux sciences naturelles.

Le programme prévoit la formation des concepts mathématiques sur la base de situations concrètes de la vie quotidienne, ce qui permet de montrer aux enfants à quelles sortes de problèmes s'appliquent les connaissances et les mécanismes qu'il acquiert durant les leçons de mathématiques. De cette manière, on développe dès le début une compréhension correcte des relations entre la science et la pratique. Les élèves doivent toujours comprendre l'origine réelle des systèmes étudiés. Cette ligne est systématiquement développée par la suite.

La formation du concept d'entier naturel et d'opération arithmétique commence par une activité pratique avec des ensembles concrets. En classe de 1ière on étudie les opérations dans les limites de la centaine, en 2ième, dans les limites de mille; en classe de 3ième les élèves apprennent à écrire des entiers positifs quelconques et à opérer avec eux dans les limites d'un milliard. Mais une attention particulière est prêtée aux opérations avec les nombres à 3 et 4 chiffres.

Dès la classe de 1ière, les élèves se familiarisent avec la comparaison des expressions numériques. Ceci permet une compréhension plus profonde de la signification des opérations arithmétiques (par exemple, la comparaison des expressions $10 \times 5 + 7 \times 5$ et 17×5, $4+4+4$ et 3×4, $5+5+5$ et $3+3+3+3+3$) et une organisation plus rationnelle des calculs.

Le programme prévoit un niveau de généralisation plus élevé (la compréhension du rôle des principes généraux et des lois), les lois des opérations étant considérées comme axiomes à la base des faits mathématiques étudiés. Quelques-unes des généralisations sont explicitement formulées dès la classe de 1ière: telles que le principe de l'existence du "successeur" d'un entier naturel, les propriétés principales de la somme et de la différence, la commutativité de l'addition. En classe de 2ième on étudie la commutativité de la multiplication et l'on considère sous ses deux aspects les divisions. En étudiant la multiplication et la division on accorde une attention particulière aux propriétés du produit et du quotient et à certains cas particuliers de la multiplication et de la division (classe de 3ième).

Ce travail est facilité par l'introduction d'élèments de symbolisme littéral. En classe de 1ière on désigne l'inconnue par une lettre. En classe de 2ième on se sert de lettres pour écrire les propriétés des opérations (par exemple $a+b=b+a$). En même temps les lettres peuvent désigner des inconnues. Les élèves se voient proposer un grand nombre d'exercices où ils doivent trouver la valeur numérique d'une expression contenant une variable, pour une valeur donnée de cette variable (par exemple: calculer la valeur de l'expression $a+2$ pour $a=1, 2, 5, 10$), ou résoudre des inégalités ($a+3<7$, $b-2>7$) et des équations simples.

L'étude de la géometrie s'effectue en liaison étroite avec l'arithmetique. Ici les élèves assimilent les mécanismes de constructions importants en pratique, font la connaissance d'un grand nombre de figures et de leurs éléments, commencent à raisonner, observer, tirer des conclusions au fur et à mesure du développement de leur imagination spatiale.

Le programme de l'école primaire comprend les notions géométriques suivantes:

le point, la ligne, la droite et la courbe, la ligne fermée et ouverte, les angles droits, aigus, obtus, le quadrilatère, le rectangle (classe de 1ière);

la périmètre d'un rectangle, d'un polygone; le cercle et le disque, la division du cercle en parties égales (par pliage), la division d'un segment en parties égales, les differents types de triangles. Ceci dans la classe de 2ième.

L'aire d'une figure quelconque par la mesure directe et indirecte, l'aire du rectangle. Ceci dans la classe de 3ième.

À l'école primaire on commence également la propédeutique de certains concepts qui n'apparaissent que plus tard. On donne les premières notions sur la dépendance de variables, la représentation des variations sous la forme de tables; on prépare l'étude de systèmes de coordonnées (par exemple en recherchant le carré du quadrillage du cahier qui est situé à un nombre donné de carrés à partir du coin inférieur gauche de la page, ou en cherchant la personne assise au quatrième pupitre du troisième rang, etc.).

On emploie systématiquement les représentations visuelles, les illustrations. Ainsi, pour illustrer la commutativité de la multiplication, on compte de deux manières le nombre de carrés qui forment un rectangle; le calcul de l'aire du rectangle s'effectue en liaison avec l'étude de la distributivité de la multiplication.

A l'école primaire les élèves doivent acquérir une solide connaissance des quatres opérations arithmétiques avec les entiers naturels et posséder quelques notions sur les fractions ordinaires, savoir résoudre des problèmes simples, reconnaître les figures géometriques ordinaires.

Ci-dessous nous donnons une liste d'exercices pour les élèves de troisième.

Écrire les expressions et calculer leurs valeurs:

(a) 406 multiplié par la somme des nombres 568 et 375.

(b) 2278 augmenté du produit des nombres 418 et 310.

(c) 51.712 divisé par la somme des nombres 302 et 201.

Comparer les expressions sans calculer leurs valeurs:

(a) 485×230 et 324×230.

(b) $125:68$ et $125:86$.

Le cours de mathématique des classes de 4ième et de 5ième joue un rôle important dans le développement mathématique des élèves. C'est dans ce cours que commence le travail systématique nécessaire pratiquement à la formation de toutes les idées et de tous les concepts fondamentaux des mathématiques étudiés à l'école. C'est aussi dans ce cours que les élèves reçoivent la préparation nécessaire pour l'étude des disciplines proches des mathématiques, en premier lieu pour l'étude de la physique et du dessin technique, qui commence en 6ième. La formation des notions fondamentales d'algèbre et de géométrie s'effectue progressivement sur une longue période, ce qui permet aux enfants d'apprendre à fond les matières étudiées; par la suite, comme le montrent les expériences effectuées, ceci donne la possibilité d'aller plus vite dans les grandes classes.

Le cours d'arithmétique et d'éléments d'algèbre comprend l'étude des entiers naturels, des fractions décimales (en classe de 4ième), des entiers relatifs et des opérations avec les fractions ordinaires (en classe de 5ième). Pendant toute la durée du cours on étudie les équations et les inégalités, on prête une attention particulière à la propédeutique de la notion de fonction (que l'on définit au début de la 6ième), ainsi qu'à la méthode des coordonnées; on introduit en 6ième la demi-droite numérique orientée; en 5ième, où l'on considère pour la première fois les nombres négatifs, la droite numérique est souvent utilisée; un peu plus tard on considère les coordonnées dans le plan.

Le cours de mathématiques de 4ième commence par une révision systématique portant sur les entiers naturels. C'est ici que les élèves rencontrent pour la première fois la notion d'ensemble, d'éléments d'un ensemble, d'appartenance à un ensemble, de non-appartenance à un ensemble, de l'ensemble vide. On introduit les notations correspondantes:

$$\{\quad\},\ A = \{\ldots|\ldots\},\ \in,\ \notin,\ \emptyset,\ \mathbf{N}.$$

Ces concepts sont mis en pratique par des exercices qui portent sur les ensembles finis numériques et certains ensembles de points, ainsi que sur des ensembles d'éléments de nature très variée. En 4ième on introduit l'ensemble des solutions d'une équation ou d'une inégalité en étudiant leur résolution.

Les notions de la théorie des ensembles sont utilisées systématiquement par la suite.

Ainsi, en étudiant les fractions ordinaires en 5ième, on propose, par exemple, aux élèves de trouver l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles la fraction $a/4$ est inférieure à l'unité ou de trouver l'ensemble des valeurs de b pour lesquelles la fraction $12/b$ représente un nombre entier etc.

Avant d'étudier la divisibilité des entiers en 5ième, on introduit les opérations sur les ensembles (intersection et réunion) avec les symboles correspondants. Ces concepts sont ensuite utilisés pour la recherche du P.P.C.M. et du P.G.C.D.

Les figures géométriques en 5ième sont également considérées comme étant des ensembles de points.

C'est ainsi que dans les classes de 4ième et de 5ième on introduit pratiquement tous les concepts de la théorie des ensembles sur lesquels se base tout le cours de mathématique de l'école secondaire.

Nous avons déjà remarqués qu'une grande attention est accordée à la résolution des équations et des inégalités. Leur introduction est préparée par un travail soigné sur la notion d'ensemble, de demi-droite numérique, d'expression contenant des variables, de propositions. Ainsi, en enseignant les équations, on utilise d'une manière essentielle certains concepts de la logique mathématique (propositions vraies ou fausses). Il est bien entendu qu'on ne donne ici aucune définition – il s'agit d'utiliser d'une manière naturelle des mots familiers aux élèves, mais en leur donnant un sens mathématique précis.

En 4ième on pose aussi les bases de la notion de fonction. Pour cela, l'introduction assez précoce de la notion de variable, de l'ensemble des valeurs d'une variable, d'expression contenant une variable est essentielle.

Tous ces concepts sont introduits à l'ordre d'exemples aisément compréhensibles aux élèves. Très souvent le but des exercices proposés est de préparer l'élève à mettre en équation les données d'un problème. Par exemple:

PROBLÈME. La distance entre deux villes est de 560 km. Deux camions partent simultanément des deux villes à la rencontre l'un de l'autre. L'un d'eux a une vitesse de 80 km/heure, l'autre de 60 km/heure. Quelle sera la distance entre eux dans 1 heure, dans 2 heures, dans 3 heures, dans t heures? A quel moment se rencontreront-ils?

Dans le cours d'arithmétique et d'éléments d'algèbre on prête une attention particulière au développement des aptitudes au calcul chez les élèves. Déjà, en classe de 4ième, les élèves effectuent des devoirs de calcul variés, en particulier des devoirs orientés vers la connaissance consciente des règles arithmétiques. Dans ce contexte il est important de noter l'ordre dans lequel on étudie les fractions selon le nouveau programme: les fractions décimales avant les fractions ordinaires. Sur la base des notions sur les fractions ordinaires acquises déjà à l'école primaire, on introduit en 4ième les fractions décimales comme une nouvelle représentation des fractions de dénominateur égal à 10^n où n est un entier positif.

Les opérations avec les fractions ordinaires se rapportent au cours de la classe de 5ième.

Le travail systématique sur l'étude des calculs approchés commence également en 4ième; c'est ici que l'on apprend à arrondir les nombres. En 5ième on donne quelques notions sur la précision des valeurs approchées et les fractions décimales infinies.

Les pourcentages sont également introduits en 4ième. Ils sont considérés comme une nouvelle forme de notation d'un nombre $20\% = 0{,}20 = \frac{1}{5}$.

Le niveau d'aptitudes au calcul exigé des élèves de 4ième et de 5ième peut être jugé d'après les exercices suivants, que doivent savoir faire tous les élèves.

Simplifier:

(a) $28, 6-0, 127 \cdot 9+10, 4-17, 6:2{,}5$ (classe de 4ième)

(b) $45{,}09:1{,}5-(2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{2}-2{,}5 \cdot 2\frac{1}{2}):5\frac{2}{3}$ (classe de 5ième).

Résoudre les équations

(c) $0{,}5x-7=0{,}3x-15$ (classe de 4ième)

(d) $3(2{,}5x+2{,}8)-4(1{,}2x+1{,}5)=2{,}7x+2{,}4$ (classe de 5ième).

En 4ième et en 5ième on propose un cours de géometrie, où les élèves continuent à se familiariser avec les concepts géométriques fondamentaux. On y étudie les concepts suivants:

la droite, la demi-droite, le segment, la ligne brisée, les relations entre les côtés d'un triangle; l'angle, l'angle droit, la mesure des angles; les angles adjacents et les angles opposés, la perpendiculaire à une droite, la distance d'un point à une droite (en 4ième), la symétrie axiale, le parallélisme, la direction; la position d'une droite par rapport à un cercle, la position relative de deux cercles; la somme des angles d'un triangle, la construction de triangles, les conditions d'égalité de triangles (sans démonstration) (en 5ième).

Une des caractéristiques essentielles de ce cours de géométrie est son orientation constructive – ici les élèves se familiarisent en pratique avec toutes les constructions principales, nécessaires, en particulier, au cours de dessin technique (rappelons que ce cours, obligatoire pour tous, commence en 6ième; on y introduit les projections centrales et les projections parallèles). Le nouveau programme propose l'étude de la géométrie sur la base des transformations géométriques. C'est pour cela que dès la classe de 5ième les élèves se familiarisent à un niveau essentiellement opérationnel, avec trois types de transformations de figures: la translation, la rotation et la symétrie axiale.

De même que dans le cours de géométrie de l'école de huit ans, on s'attache particulièrement à la brièveté de l'exposition. Ainsi, par exemple, l'introduction du concept de direction et d'angle entre deux directions permet un exposé assez bref des questions de parallélisme – on pose comme postulat que l'angle entre deux demi-droites de directions données est indépendant du choix du point d'origine des demi-droites. Les conditions d'égalité de triangles sont également admises sans démonstration.

Le système d'exposition du cours de mathématiques des classes de 4ième et de 5ième prévoit le développement systématique des capacités de pensée logique chez les élèves. En 4ième la considération intuitive des faits reste le facteur dominant. Souvent des conclusions, en géométrie par exemple, s'obtiennent en généralisant les résultats de mesures et de constructions. On utilise souvent les constructions en feuilles de papier, le modelage.

Les éléments géométriques sont également considérés en étudiant les questions d'arithmétique et d'algèbre; en étudiant la distributivité on utilise la notion de volume; en introduisant la multiplication de fractions décimales, on introduit la notion d'aire.

A la fin de la 4ième on donne une justification déductive des propriétés des angles opposés. En 5ième les raisonnements déductifs ont une place plus importante, on donne la démonstration de plusieurs théorèmes: comparaison de la longueur d'une perpenduculaire et d'une oblique à une droite, somme des angles d'un triangle; la justification déductive des conclusions se fait également en résolvant les problèmes.

En classe de 6ième–8ième on propose l'étude systématique des cours de géométrie et d'algèbre. En étudiant ces cours on emploie largement les notions de la théorie des ensembles et de la logique introduites en classe de 4ième et 5ième. On utilise les symboles élémentaires de la logique: l'implication, $\Rightarrow$, et l'équivalence logique, $\Leftrightarrow$.

Le cours d'algèbre comprend une grande partie traditionnelle, mais étudiée sur une base tout à fait nouvelle. Il s'agit des transformations identiques d'expressions entières et fractionnaires; des équations du premier et du second degré, des inégalités, des fonctions élémentaires: $y=ax+b$, $y=k/x$, $y=ax^2$; $y=ax^3$, $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$. La nouveauté est l'introduction des fonctions exponentielles et logarithmiques (étudiées traditionnellement par les élèves de 10ième à l'âge de 16–17 ans). Ceci est devenu possible grâce à un exposé assez bref et facilement assimilable par les élèves, dû à l'académicien A. N. Kolmogorov. Dans cet exposé, l'introduction des exposants fractionnaires est liée à la construction progressive de la fonction $y=a^x$. L'étude spéciale de la fonction $y=x^a$, contenue dans les programmes traditionnels, n'est plus envisagée. Comme exercices recommandés à ce sujet notons la construction des graphiques de la fonction x^a en coordonnées logarithmiques et de la fonction a^x en coordonnées semi-logarithmiques. Dans les deux cas, les courbes représentatives sont des droites.

Les nouveaux programmes prêtent une attention particulière au développement systématique des aptitudes au calcul chez les élèves et des notions sur les calculatrices électroniques modernes.

Dès la classe de 6ième les élèves prennent connaissance des exposants négatifs et apprennent à effectuer des calculs avec des nombres, grands ou petits, notés sous la forme $k \cdot 10^n$, où n est un entier relatif et $1 \leqslant k < 10$.

L'aptitude au calcul est exercée par des problèmes aux données numériques "peu pratiques"; en analysant les résultats expérimentaux, effectués tout aussi bien pendant les leçons de mathématiques que dans les disciplines qui s'y rapprochent: physique, chimie, formation professionnelle etc. Ce travail s'approfondit lorsque les élèves, en 7ième, étudient les propriétés des inégalités. Ces propriétés sont utilisées pour l'étude des erreurs en calcul approché. Parmi les exercices envisagés on retrouve l'évaluation des erreurs par la "méthode des bornes supérieures".

Un peu plus tard, en étudiant les racines, les élèves apprennent l'approximation à degré prescrit de prévision (envisagée pour la première fois en 5ième en rapport avec le développement d'une fraction ordinaire en fraction décimale). Ici l'on considère la "méthode des essais", la méthode des approximations successives, on donne l'algorithme itératif pour le calcul d'une racine carrée:

$$y_{n+1} = \tfrac{1}{2}\left(y_n + \frac{x}{y_n}\right).$$

En classe de 8ième on explique le fondement mathématique de la règle logarithmique (dont on recommande l'emploi pratique beaucoup plus tôt, dès les classes de 6ième et de 7ième), on se sert souvent de tables, par exemple pour calculer les valeur de la fonction $y=a^x$, ou de tables de logarithmes.

Le cours de 8ième se termine sur le thème "organisation des calculs et calculatrices" où l'on systématise les connaissances de calculs approchés, on introduit les règles des calculs d'erreur, on donne des notions sur l'interpolation linéaire, sur l'organisation des calculs manuels – mise en page des formules et, enfin, on donne certaines précisions sur les calculatrices electroniques.

L'acquisition des connaissances durant cette scolarisation de 8 ans se développe à l'aide d'un grand nombre d'exercices. En voici quelques-uns:

Simplifier:

(a) $$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \quad \text{(En 7ième)}$$

(b) $$\frac{a^2+ab+ac+bc}{a^2-b^2}.$$

Résoudre le système d'équations:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2-y^2=0. \end{cases} \quad \text{(En 7ième)}$$

Résoudre l'équation

$$\sqrt{x-17}=9-x$$
$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1{,}5. \quad \text{(En 8ième)}$$

Calculer

2^{100}. (En 8ième)

Dans le cours de géométrie de 6ième–8ième on utilise largement les transformations isométriques et les similitudes (avec les formules analytiques des isométries et des homothéties), on y introduit la notion de vecteur (avec la distributivité du produit scalaire par rapport à la somme), on y étudie les fonctions trigonométriques des angles de 0° à 180°.

Mais sa particularité la plus importante se situe dans le système d'exposition choisi, système grâce auquel les élèves doivent prendre connaissance de la structure déductive de la géométrie, comprendre le rôle des concepts fondamentaux et des axiomes. Le nombre de propositions du cours de géométrie admises sans démonstration est considérablement augmenté (en 6ième, ce sont les conditions de congruence de deux triangles, plus tard on admet que deux cercles de rayons r_1 et r_2 dont la distance des centres est l, telle que $l<r_1+r_2$ et $l>|r_1-r_2|$ se coupent précisément en deux points.

Les élèves se voient proposer un système d'axiomes redondant.

Ainsi se présente, dans ses traits généraux, le système de formation des concepts et idées mathématiques fondamentales dans le cadre du cours de mathématiques, proposé aux élèves de 7 à 15 ans.

Sur cette base il devient possible d'enseigner, en deux ans (en 9ième et 10ième), une quantité de notions considérables, dont la valeur formatrice est difficile à sur estimer – il s'agit de la dérivée et de l'intégrale, des équations différentielles les plus simples, de l'équation de croissance exponentielle $y'=ky$ et de l'équation d'oscillation harmoniques $y''=-k^2y$, des fonctions trigonométriques, d'un cours systématique de géométrie dans l'espace sur une base vectorielle avec les axiomes de l'expace vectoriel explicitement formulés, des notions sur la programmation linéaire et les calculatrices électroniques.

L'acquisition des nouveaux concepts, la compréhension correcte du rôle des mathématiques dans l'activité quotidienne de l'homme et la relation entre la théorie et la pratique, tout cela est assuré par l'élaboration du cours de mathématique, par les méthodes de son exposition, par le contenu des problèmes résolus. Les relations entre les diverses disciplines, la concordance des programmes de toutes les disciplines liées aux mathématiques jouent un grand rôle.

En règle générale, toutes les connaissances mathématiques nécessaires aux autres disciplines sont contenues dans ces leçons de mathématique. Ainsi, par exemple, l'introduction des pourcentages en 4ième est nécessaire au cours de biologie et de chimie; elle est utile également au cours de géographie; l'introduction de la méthode des coordonnées en 5ième permet, dans diverses disciplines, d'utiliser la représentation graphique des lois qu'on y rencontre; l'étude des échelles de mesure en 4ième prépare les élèves à la lecture des appareils de mesure en physique de 6ième; avant l'étude de la physique les élèves font connaissance, en 5ième, de certaines formules simples de physique. En 6ième, au début de l'étude de la mécanique, les élèves connaissent déjà l'équation du mouvement rectiligne uniforme, ils savent résoudre des problèmes qui se rapportent au mouvement. Des relations de ce genre entre diverses disciplines peuvent être citées en grand nombre.

Il est intéressant de noter d'autres relations.

Certaines questions sont considérées en physique avant d'être étudiées en mathématiques, parfois même certains concepts réapparaissent plusieurs fois dans diverses disciplines. Ceci permet, tout en évitant les répétitions, d'approfondir systématiquement les connaissances des élèves et de considerer le même concept de points de vues différents, d'employer plus largement les exemples à contenu physique, de souligner le rôle joué par les mathématiques en sciences naturelles.

Ainsi, la vitesse instantanée d'un mouvement rectiligne quelconque est d'abord définie en physique (en 8ième), et ensuite, sur cette base, on introduit la dérivée dans le cours "Algèbre et éléments d'analyse" (en 9ième).

La notion de vecteur apparait d'abord en physique en 6ième dans un contexte très restreint – somme de forces qui agissent le long d'une même droite. En 7ième les vecteurs sont considérés en géométrie, et les connaissances acquises sont utilisées en physique – résultante de forces qui forment un angle entre elles. En 9ième on considère les vecteurs dans l'espace. Les connaissances ainsi acquises permettent l'exposition de la géométrie sur une base vectorielle.

C'est un bref exposé des notions et idées mathématiques que nous enseignerons à nos élèves de 7 à 15 ans. Le succès de ces nouveaux programmes dépend de la façon dont nous saurons préparer les maîtres et les nouveaux manuels.

A. ROUMANET

UNE CLASSE DE MATHÉMATIQUE: MOTIVATIONS ET MÉTHODES

Dans cet exposé nous voudrions présenter quelques principes qui nous paraissent essentiels et qui nous ont guidés dans la pratique pédagogique de nos classes. Ils concernent l'attitude du maître, les rapports maître-élèves, le comportement des élèves en classe, et aussi l'organisation du travail en classe. Après cela, dans une deuxième partie, nous présenterons des exemples de ce que nous avons fait au cours de la dernière année scolaire, dans des classes de deux niveaux différents: en cinquième, avec des enfants de 12–13 ans; en terminale A4 (section littéraire ayant une option mathématique) avec des élèves de 17–19 ans.

I. LES MÉTHODES

Voici donc quelques principes sous-jacents aux méthodes pédagogiques adoptées.

1. *Le professeur*

Nous commencerons par parler de l'attitude du professeur. En effet, il est à la fois le chef d'orchestre, l'animateur, le coordinateur; c'est lui qui a le rôle principal dans la détermination des attitudes de chacun, et par suite, du déroulement de la classe et des rapports à l'intérieur du groupe.

A notre avis, le professeur doit éviter de brimer la spontanéité de l'élève. Lorsqu'un élève ou des élèves ont quelque chose à dire, ils doivent pouvoir le dire. Pour cela, il faut qu'à certains moments, le maître accepte qu'il n'y ait pas un ordre de parole très bien établi, et qu'il accepte que parfois des discussions s'installent entre élèves indépendamment de lui. Pour le maître, il faut une grande maîtrise de soi, il faut se résigner à n'être pas toujours le premier personnage de la classe, il doit accepter qu'une séance ne se déroule pas toujours dans un très grand calme. Une des difficultés est en effet de trouver un équilibre entre la discipline stricte qui contraint et brime la spontanéité, et le chahut qui ne permet pas de se faire entendre. Cette difficulté est d'autant plus grande que les effectifs des classes sont plus importants.

Les élèves ont la parole: le professeur doit favoriser la découverte, l'éclosion des idées, l'imagination, le sens de l'organisation et l'expression chez les élèves. Il devrait être non pas "l'accoucheur", des esprits, mais "le catalyseur". Il ne devrait pas tracer le chemin que les élèves n'auront plus qu'à parcourir, mais les amener à déterminer et constuire eux-mêmes ce chemin. La recherche doit aller dans le sens que les élèves lui donnent. Des élèves ou des groupes d'élèves peuvent s'engager dans des directions différentes et déterminer leur propre progression. Nous nous trouvons ici en désaccord avec le maître accoucheur des esprits à la manière de Socrate, et avec les principes de l'enseignement programmé, du linéaire surtout, qui veulent qu'on guide l'élève pas à pas.

Il faut laisser à la découverte le temps de se faire; il est important que les élèves aient le temps de conduire leur recherche jusqu'où ils veulent et peuvent le faire. Dans une classe, pour un travail de recherche effectué individuellement ou par petits groupes, on peut distinguer deux phases:

1ère phase: chaque élève ou chaque équipe effectue son travail de recherche, le maître laissant chacun conduire son travail jusqu'au bout, n'intervenant que très peu, à la demande des élèves, pour les obliger à réfléchir et éventuellement leur poser des questions, mais en évitant d'influencer leur travail.

2ème phase: discussion générale sur l'aboutissement des travaux de chacun; ici le maître doit éviter de donner une correction, un corrigé type, mais c'est à partir de la discussion entre tous les élèves que petit à petit doivent se dégager les résultats essentiels.

Enfin et nous y reviendrons dans le paragraphe sur les rapports psychologiques entre maître et élèves, le maître ne doit pas se comporter en censeur, il ne doit pas non plus écraser les élèves de sa science.

2. *Rapports maître-élèves*

Ici encore, c'est l'attitude du maître qui va être déterminante, et c'est donc sur cela que nous allons surtout insister.

Le maître n'est pas un censeur, un juge; il n'est pas là pour juger les élèves et les empêcher de s'exprimer, mais pour les aider et leur apprendre à s'exprimer.

Le maître ne doit pas écraser les élèves de son savoir, de ses connaissances; il ne doit pas apparaître comme celui qui sait tout en face de ceux qui ont tout à apprendre. Il est là pour aider les élèves à se poser des questions, il doit avoir l'air de réfléchir avec eux, de se poser des problèmes avec eux.

Il faut cependant que les élèves aient un sentiment de sécurité, qu'ils sachent et qu'ils sentent qu'ils peuvent avoir recours au professeur en cas de besoin. Si celui-ci ne doit pas écraser les élèves de sa science, les élèves doivent sentir qu'il domine la situation et qu'ils peuvent avoir recours à lui.

Pour que les élèves possèdent une notion et la maîtrisent, il est bien préférable de la faire découvrir par eux-mêmes plutôt que la leur imposer avec autorité.

Dans la classe tous les élèves devraient se sentir concernés. Le professeur ne s'adresse pas à un, deux ou un petit groupe d'élèves, mais à tous. Il faudrait arriver à faire en sorte que tous participent à la classe, à la recherche. Bien sûr, ceci est d'autant moins facile à réaliser que les élèves sont plus nombreux dans les classes. Comment s'occuper de 35 ou 40 élèves en même temps alors qu'il n'ont pas tous les mêmes centres d'intérêt et qu'ils n'ont pas tous le même rythme de progression?

Le professeur ne doit jamais porter de jugement catégorique sur les élèves, ne jamais dire à quelqu'un pris isolément ou en public: "tu es un idiot" ou "tu n'as rien compris"; cela risque d'enfermer l'élève dans une attitude de refus, attitude de celui qui ne comprend rien, n'est pas capable de réfléchir ou de résoudre un problème dès qu'il s'agit de mathématique. Il en est de même en ce qui concerne toute une classe, on ne doit pas condamner les élèves globalement et définitivement par exemple en comparant cette classe à d'autres ou en disant: "vous êtes tous des idiots", "vous ne comprendrez jamais rien"...

Enfin il faut refuser et combattre la mentalité, trop courante, de l'élève qui se dit "nul en math". En effet, il s'enferme derrière cette attitude qui lui sert de paravent et refuse de réfléchir et de comprendre dès qu'il s'agit de mathématique. Il est à noter que le nombre d'élèves qui s'abritent derrière une telle attitude est d'autant plus grand que l'on s'élève en âge. Devant de tels blocages, il faut arriver à faire prendre conscience à l'élève qu'il est capable, aussi bien qu'un autre, de résoudre des problèmes, de comprendre et même de découvrir certains procédés. Pour cela il faut arriver à lui donner d'abord des problèmes qui l'intéressent et qu'il soit capable de résoudre. Pour cela la présentation des sujets de travail aura une grande importance.

3. *Présentation du travail*

L'essentiel est de partir de situations "familières" aux élèves et à leur portée. Il faut éviter les problèmes dits "concrets" qui sont peut-être concrets pour le professeur, mais ne le sont pas du tout pour les élèves, et qui de plus sont totalement en dehors de leurs préoccupations. Je pense en particulier aux fameux "problèmes de robinets" qui ont nourri notre enfance.

Une situation "familière"[1] est une situation proche des préoccupations du public auquel on s'adresse, proche aussi des choses qui l'entourent, qu'il peut voir ou qu'il peut pratiquer. On pourra partir soit d'un jeu, soit de la manipulation d'un matériel, soit d'un problème ouvert.

(a) *Les jeux*

D'une part, les jeux sont très proches des préoccupations de nos élèves; chaque âge a ses jeux. D'autre part, ils sont une source inépuisable de situations qu'on peut étudier et mathématiser.

Bien sûr, il ne s'agit pas de prendre un jeu très complexe, tel que le jeu de bridge, et de l'étudier à fond, mais de prendre des jeux plus simples; on peut en inventer des quantités, qui soient adaptés à la notion mathématique que l'on veut mettre en évidence.

Il est important que l'élève arrive à étudier suffisamment le jeu pour le mathématiser, et, au besoin, poursuivre l'étude sous forme mathématique. Le jeu doit servir de tremplin pour arriver à la formulation mathématique.

Quand la situation mathématique est étudiée pour elle-même, on doit pouvoir en donner d'autres interprétations. C'est ainsi que petit à petit, les élèves prennent conscience de la portée et de l'intérêt des notions mathématiques.

Le jeu peut avoir un autre intérêt, celui de donner une image de ce qu'est une théorie mathématique. On a en effet un parallélisme intéressant entre les deux. D'une part, dans un jeu on peut considérer qu'il y a trois composantes: le matériel, les règles du jeu (ces deux premières composantes n'étant pas indépendantes) et enfin le joueur qui, par son choix, détermine la succession des opérations effectuées en appliquant les règles. D'autre part, dans l'élaboration d'une théorie mathématique, on peut, en première approximation, considérer qu'il y a aussi trois composantes: le matériel ou les objets mathématiques qu'on se donne au départ, le matériel de base; les axiomes ou règles d'utilisation de ce matériel; celui qui élabore la théorie, qui construit les raisonnements et qui se comporte en partie comme un joueur.

(b) *Le matériel*

Le matériel utilisé dans l'enseignement peut être regroupé en deux catégories:

(1) *Le matériel didactique.* Le tableau noir et la craie, instruments traditionnels et qui resteront sans doute encore très longtemps utilisés.

Le "Vue-graph" qui est le tableau noir moderne et qui permet plus de fantaisie; on peut préparer les figures à l'avance, on peut superposer des figures, etc.

Le livre ou manuel.

Les fiches de travail.

Les films longs, en particulier les films de télévision, qui sont en général assez proches du cours magistral mais l'image permet des illustrations qu'il serait difficile d'obtenir autrement.

Les films courts de 3 à 4 minutes qui illustrent une idée. Ils peuvent être utilisés de la manière suivante: le film est projeté une première fois devant la classe, puis une discussion s'engage entre les élèves qui essaient de dire ce qu'ils ont vu. Quand les élèves le demandent ou quand le besoin s'en fait sentir, on projette à nouveau le film, puis la discussion reprend. On continue ainsi jusqu'à ce que les élèves soient arrivés à dégager l'intérêt du film.

(2) *Le matériel destiné aux manipulations des élèves.* L'utilisation de ce matériel se rapproche de celle des jeux. En général, il est destiné à faciliter l'approche d'une notion mathématique ou à l'illustrer.

Au départ, on peut, soit donner à l'élève le matériel déjà construit, soit au contraire l'amener à le construire lui-même. Cette deuxième solution a plusieurs avantages: l'élève connaît mieux le matériel s'il l'a construit lui-même; la construction peut parfois poser des problèmes intéressants (ainsi la construction d'un matériel analogue aux blocs logiques de Dienes pose des problèmes de produits d'ensembles et de dénombrements dont la résolution est intéressante); il est plus facile de varier; enfin le matériel revient moins cher.

Lorsque l'élève dispose du matériel, on le laisse jouer et observer pour qu'il se familiarise avec, puis progressivement, on peut l'amener à se poser des questions et à les résoudre.

Enfin un autre type de matériel peut être intéressant, celui inventé par les élèves. Il faut favoriser et utiliser au maximum ces inventions. Ainsi, il y a deux ans, après l'étude des permutations circulaires, un élève de 12 ans m'a proposé une petite machine à calculer.

(c) *Problèmes ouverts*

Nous entendons par problèmes ouverts, des énoncés proposés à l'étude des élèves, énoncés ne contenant pas d'indications sur la solution. On peut les classer en trois catégories:

(a) Problèmes provenant de l'actualité, de l'environnement extra-scolaire: par exemple, les problèmes d'organisation et de dénombrements qu'on rencontre à propos d'élections ou du tiercé.

(b) Problèmes rencontrés dans d'autres disciplines: par exemple les problèmes de classifications qu'on trouve en français ou en sciences naturelles, les problèmes d'organisation qu'on rencontre dans toutes sortes d'activités. Les thèmes ou exercices qu'on retrouve dans d'autres disciplines provoquent une excitation qui en fait ne devrait pas être, mais qui se justifie pleinement étant donné la séparation, le cloisonnement qui existe actuellement dans notre enseignement entre les différentes disciplines. Les élèves imaginent mal qu'il puisse y avoir des rapports entre elles.

(c) Problèmes proposés, soit par le maître, soit par des élèves sur un sujet intéressant la classe.

4. *Organisation de la classe*

Nous voudrions, maintenant, citer plusieurs manières d'organiser le travail en classe que nous avons utilisées dans le courant de la dernière année scolaire. Bien sûr, il ne s'agit pas de dresser un inventaire complet des possibilités, mais de donner quelques schémas. La réalité est souvent un compromis entre certaines de ces situations. Nous distinguerons:

(a) Le cours magistral où le professeur expose la leçon en s'aidant du tableau noir ou d'autres moyens techniques; parfois un élève demande un éclaircissement ou une explication complémentaire. Pendant le cours, les élèves prennent des notes. Le cours est ensuite illustré par des exercices; un élève (ou parfois le professeur) est au tableau, les autres élèves prennent des notes et réfléchissent pour aider à trouver une solution ou comprendre celle proposée par leur camarade.

(b) Les séances de discussion et de recherche entre tous les élèves de la classe. Cette recherche peut porter soit sur une question qui s'est posée à la classe au cours d'un travail, soit sur un problème proposé par le maître ou un élève en début de séance. Ce sont les élèves qui par leurs réflexions, leurs remarques et leurs échanges de vues font progresser le groupe. Suivant les circonstances, le maître peut être, soit un simple observateur, soit le catalyseur des débats, soit l'animateur.

(c) Les séances de travail et de recherche par petits groupes. Pour de telles séances, les élèves se répartissent par groupes de deux, trois ou quatre. Cette répartition peut se faire soit par affinité, soit au hasard, soit après entente entre le maître et les élèves. En général, tous les groupes travaillent sur le même sujet, et chacun progresse dans la direction choisie par lui et à son propre rythme. Le maître passe d'un groupe à l'autre, répond aux demandes de chacun, tout en essayant de ne pas trop influencer les recherches et de ne pas trop donner d'indications.

(d) Le travail sur fiches. Les élèves sont seuls ou en petits groupes, et le travail à faire est présenté sur une fiche plus ou moins détaillée. Le professeur intervient en cas de difficulté, et quand les élèves le lui demandent. Chaque groupe ou chaque élève travaille au rythme qui lui convient. On peut prévoir des séances de synthèse plus ou moins fréquentes suivant les besoins.

(e) Les leçons programmées. Dans nos établissements scolaires, étant donné l'équipement actuel, nous ne pouvons les envisager que présentées sous forme de fascicules imprimés ou ronéotypés. Chaque élève travaille à son rythme; le maître passe auprès des élèves et intervient en cas de besoin.

Bien sûr, ce ne sont pas là les seules manières d'organiser une classe. On aurait pu envisager d'autres présentations ou d'autres classifications de ces différentes techniques: par exemple en séparant travail individuel, travail par groupes, travail collectif; ou encore participation active et passivité. Pour le maître l'essentiel est de pouvoir s'adapter aux besoins de sa classe, de pouvoir varier les méthodes afin de maintenir et renouveler l'intérêt. Il doit rester toujours très disponible et pouvoir faire face à toutes sortes de situations.

II. LES EXEMPLES

1. *Classes de terminale A4* (sections littéraires)

A. *Les classes*

Au cours de la dernière année scolaire, j'étais chargé de l'enseignement de mathématique dans deux classes de Terminale A4. Les élèves, agés de 17 à 19 ans, ont une épreuve orale de mathématique au baccalauréat, et un enseignement de deux heures par semaines pour la préparer. La plupart de ces élèves ne s'intéressent pas aux mathématiques et s'abritent derrière l'affirmation "je suis nul en math" pour ne rien faire. Beaucoup ne possèdent pas les connaissances correspondant au programme de première A nécessaires pour aborder celui de la classe.[2] Il y avait 37 élèves dans l'une des classes, 34 dans l'autre.

B. *Travail de l'année*

Au début de l'année, les séances étaient du type "cours magistral". Je pensais qu'avec une classe à examen, et un programme assez lourd, c'était la seule méthode qui permette de terminer le programme. On pouvait ainsi prévoir la répartition des chapitres dans le temps.

Assez vite, les controles ont montré que beaucoup d'élèves n'assimilaient pas le cours. En fait, le cours et les exercices étaient peut-être un peu trop rapides et les élèves, en général très passifs, n'avaient pas toujours le temps de voir pourquoi ils ne comprenaient pas, ce qu'ils ne comprenaient pas et donc de poser les questions convenables. Certains pensaient que le langage utilisé leur était incompréhensible.

Nous avons étudié ainsi: dérivée d'une fonction, utilisation des dérivées à l'étude des variations (parties du programme de première nécessaires à l'étude du notre), primitives d'une fonction, calculs d'aires, fonctions logarithmes.

Un peu avant les vacances de Noël, devant la difficulté éprouvée par les élèves à résoudre des exercices sur les logarithmes, j'ai essayé de changer de méthode. J'ai posé un exercice aux élèves en les laissant chercher à plusieurs, discuter entre eux des solutions. A la fin de la séance, nous avons discuté des solutions proposées par chacun. Ainsi, nous avons, sous forme d'exercices résolus par les élèves eux-mêmes, étudié la plupart des questions qui se posent à propos des logarithmes.

Pour les exponentielles, nous avons procédé de même: après un cours magistral de $\frac{1}{2}$ heure ou $\frac{3}{4}$ d'heure qui nous a permis de présenter la définition et quelques propriétés, l'étude des autres propriétés a été faite par les élèves eux-mêmes en travail de groupe.

Pendant le reste de l'année nous avons continué ainsi.

C. *Quelques questions sur logarithmes et exponentielles*

Ainsi, à titre d'exemples, les élèves ont été amenés, par des exercices appropriés, à découvrir:

(a) les formules de changement de base des logarithmes;

(b) la dérivée de $\log_a x$ connaissant celle de $\log x$;

(c) les symétries entre les courbes représentatives de $\log_2 x$, $\log_{1/2} x$, $\log_3 x$ et $\log_{1/3} x$, en les traçant par points;

(a) le tracé des mêmes courbes à partir de l'étude des variations des fonctions;

(e) les symétries entre les courbes représentatives de 2^x et $\log_2 x$, en les traçant par points;

(f) les comparaisons des croissances des exponentielles, des puissances et des logarithmes;

etc...

Un certain nombre de propriétés sont à établir, et toutes ne se retrouvent pas forcément très vite. Dans la mesure du possible, nous avons essayé de faire sentir et prévoir sur des exemples appropriés, quelles sont ces propriétés, et, après, nous les avons laissé démontrer par les élèves ou nous les leur avons démontrées.

D. *Parties d'ensemble, dénombrement des parties d'un ensemble, intersection, union, ...*

En principe, ces questions ont déjà été étudiées au cours des années précédentes. Un cours sur ces sujets risquait d'apparaître comme une répétition ennuyeuse de ce qui a déjà été étudié et pourtant souvent mal assimilé. J'ai choisi de laisser les élèves réfléchir sur les exercices suivants:

1er exercice: on se donne un quadrillage limité à gauche et en bas, illimité à droite et en haut. Les bords des carreaux représentent des chemins à sens unique; on ne peut se déplacer sur les chemins horizontaux que vers la droite, sur les chemins verticaux que vers le haut (sens indiqué par les flèches). Etant donné un sommet quelconque sur le quadrillage, le problème est de trouver un procédé qui permette de compter le nombre de chemins qui vont de l'origine O à ce sommet (Figure 1).

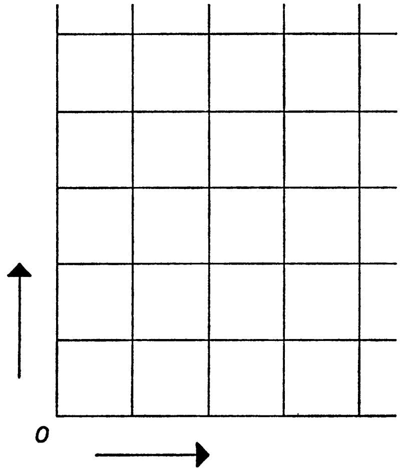


Fig. 1.

Laissant aux élèves le temps nécessaire pour qu'ils trouvent eux-mêmes des solutions, je circulais de groupe en groupe en essayant de les aider à réfléchir. Dans l'une des classes de terminale, les premiers sont arrivés à une solution au cours de la troisième séance (la durée des séances est de 50 à 55 minutes); dans l'autre, les premiers sont arrivés à une solution au cours de la deuxième séance. Il faut noter que ces élèves ont en général été aidés par des apports extérieurs: frères ou camarades scientifiques, livres, ... Cela nous montre qu'ils étaient suffisamment interéssés pour parler des problèmes de mathématique à l'extérieur. Enfin, et la comparaison est intéressante, des élèves de cinquième (12–13 ans) ont résolu le même problème en 1 heure et quart, sans apport extérieur.

Quand quelques élèves eurent résolu le premier exercice, je leur proposai un deuxième énoncé en demandant aux autres de continuer à réfléchir sur le premier.

2ème exercice: On se donne un alphabet de deux lettres: $\{a, b\}$. Un "mot" est un assemblage quelconque de ces deux lettres avec autant de répétitions qu'on le veut. Comment compter les mots de longueur 3? 4? ...? Parmi les mots de longueur 5, comment compter les mots qui contiennent exactement 1 fois a? 2 fois a? 3 fois a? ...? Même question avec les mots de longueur 6.

Au fur et à mesure que les groupes avaient trouvé une solution au premier exercice, ils abordaient le deuxième. Ensuite, je leur ai proposé un troisième énoncé:

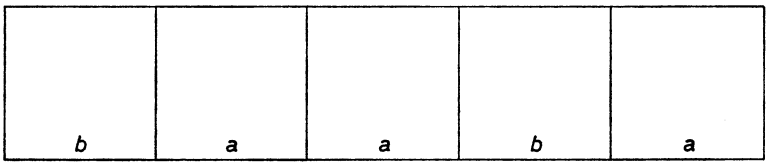
3ème exercice: Quelqu'un a cinq stylos différents. Il décide que tous les matins il en prendra trois. De combien de manières peut-il choisir ces trois stylos?

Quand certains élèves eurent résolus ces trois exercices, je leur ai posé la question suivante:

Y a-t-il un rapport entre ces trois exercices?

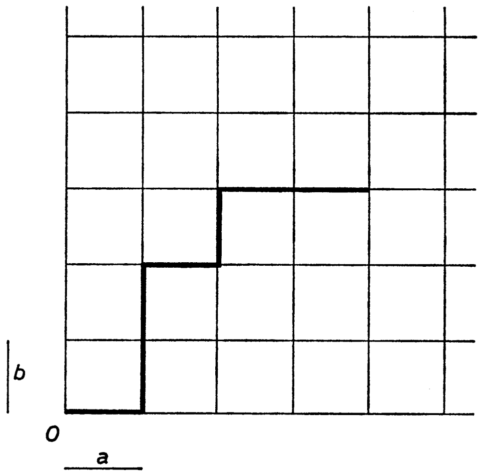
Après un temps de réflexion et de recherche, nous avons organisé une séance de synthèse des résultats. Les élèves ont exposé les différents procédés utilisés pour trouver une solution à chacun des exercices, et les résultats obtenus. Ensemble, nous avons ensuite essayé de répondre à la dernière question. Un élève a d'abord établi l'analogie entre le deuxième et le troisième exercice de la manière suivante: on représente l'ensemble des cinq stylos par cinq cases, chaque case représentant un stylo bien déterminé; choisir trois stylos revient alors à choisir trois cases qu'on peut repérer par exemple par la lettre *a*, les autres étant marquées par la lettre *b*; on établit ainsi que choisir trois stylos revient à construire un mot de longueur 5 contenant exactement trois fois *a* et deux fois *b* (Figure 2).

En codant par un *a* le parcours d'un côté horizontal d'un carreau, et par un *b* le parcours d'un côté vertical, on voit que chaque chemin partant de



baaba

Fig. 2.



abbabaa

Fig. 3.

l'origine peut être représenté par un assemblage de a et de b (Figure 3). On établit ainsi le parallélisme entre les exercices 1 et 2. Après avoir bien défini les rapports entre ces trois exercices, les élèves ont pu remarquer que les résultats trouvés dans un cas pouvaient très facilement se transposer dans les deux autres, et ainsi on élargit et généralise chacun.

En outre, la discussion nous a permis d'étendre tous les résultats aux dénombrements des parties d'un ensemble et de retrouver le triangle de Pascal avec sa signification habituelle. Ensuite, nous avons prolongé cette étude dans deux directions différentes:

(a) Unions, intersections d'ensembles, complémentaire, et les problèmes correspondant sur les cardinaux;

(b) Applications d'un ensemble dans un autre.

E. *Applications d'un ensemble dans un autre*

L'introduction des applications a été préparée par des exercices tels que:

(a) Cinq chevaux prennent le départ d'une course; combien y a-t-il de résultats possibles pour le tiercé dans l'ordre, dans le désordre?

(b) Un questionnaire comporte quatre questions; à chaque question on peut répondre de trois manière différentes. Combien y a-t-il de réponses possibles à l'ensemble du questionnaire.

(c) Des boules sont à ranger dans des cases. De combien de façons peut-on les ranger si on peut mettre une seule boule par case? Même question si on peut mettre autant de boules qu'on le veut dans chaque case?

Ces problèmes sont des problèmes de dénombrements d'applications. Ils nous ont permis d'introduire la définition des applications et des différents types d'applications: injection, surjection, bijection.

Après avoir étudié les définitions et les modes de représentations des applications, les élèves ont eu à reconnaître le type de certaines applications et à en construire d'autres.

F. *Opinion des élèves*

Après avoir étudié les autres questions du programme, à la finde l'année, j'ai demandé aux élèves de dire rapidement et par écrit, leur opinion sur la méthode utilisée. Voici quelques-unes de leurs réponses. Dans l'ensemble la méthode semble avoir plu:

"Méthode quelque peu déroutante au début, puisque entièrement nouvelle. Ses principaux avantages sont les suivants:

(a) elle oblige l'élève à travailler et à découvrir lui-même les résultats au lieu d'assister à un cours rébarbatif. L'intérêt porté aux mathématiques devient plus grand à chaque fois.

(b) d'autre part, l'élève ayant découvert lui-même les résultats, il les retient mieux."

"Je crois, sincèrement, que la méthode adoptée cette année, a été bonne et fructueuse:

Au départ (sans habitude) on est un peu "dérouté" et on aurait tendance à croire qu'aucun travail ne se fait.

Et puis finalement, tout paraît plus évident quand, au lieu de se cantonner dans la théorie, on passe tout de suite à l'application pratique.

En fait, en essayant d'élaborer (de découvrir) les règles, par des exercices, les exemples deviennent beaucoup plus frappants et les souvenirs plus précis."

"...La recherche de nombreux systèmes nous obligeait au travail, à la réflexion, à la recherche.

Cela m'a donné du goût pour essayer de trouver, même si au début je ne trouvais pas.

Je m'intéressais aux exercices du fait de la concurrence dans le groupe."

"...Chacun allait à peu près à son rythme de travail et vous aviez la possibilité de nous aider individuellement ...."

"...Tous les élèves sont obligés de chercher par eux-mêmes les solutions des exercices. C'est un encouragement mutuel par le fait que si un élève y arrive, il n'y a pas de raison qu'un autre n'y arrive pas...."

"...On éprouvait même un plaisir certain à chercher par nous-mêmes, mais surtout par le groupe.

Ce que l'on a trouvé personnellement, on le retient beaucoup plus facilement. ..."

Quelques critiques et suggestions:

"... D'autre part il faut s'employer à systématiquement corriger les exercices et cela dans un temps relativement bref après les énoncés, chose qui n'a peut-être pas tout à fait été réalisée.

Il faudrait peut-être aussi un tout petit peu plus de cours et également un rapprochement constant entre le cours et les exercices, c'est-à-dire reprendre au besoin après chaque exercice le cours, lorsque celui-ci n'a pas été compris.

On pourrait également essayer de faire polycopier une liste d'applications à faire chez soi avec les corrigés, ce qui permettrait de voir si on est capable de les faire seul, et consacrer 10 minutes au début du cours à ces exercices d'applications ...."

"... Mais je crois que trop de temps est laissé pour la résolution d'un problème. Je ne pense pas qu'il soit bon de s'embourber trop longtemps dans l'erreur. Il serait préférable pour ma part d'indiquer la ou les voies à suivre pour la résolution du problème. Pour ce faire, quelques élèves pourraient exposer leurs méthodes au tableau, ce qui, en outre, rendrait positif le travail de chaque groupe ...."

"... Par contre ce qui constituait une lacune, c'était le manque de directives, deux assistants de plus auraient été les bienvenus.

Une mise au clair des résultats obtenus des recherches effectuées, me paraît une chose indispensable que vous avez mal organisée. Le cours magistral est ici pratiquement indispensable."

"On ne s'ennuie pas pendant vos cours, mais un peu brouillon, je veux dire pas assez net, un jour on fait ceci, un jour on fait cela, les grandes lignes ne sont pas tracées clairement. ..."

"Cette méthode a été certainement profitable à l'ensemble de la classe. Néammoins, quelques contrôles des connaissances seraient nécessaires.

Ainsi, après chaque chapitre, une petite interrogation permettant à l'élève de savoir où il en est."

2. *Classe de cinquième*

A. *La classe*

Pendant l'année scolaire 1967–68, j'avais une classe de sixième expérimentale. J'ai retrouvé les mêmes élèves en cinquième l'année suivante (1968–69). Les élèves, alors âgés de 12 à 13 ans environ, étaient au nombre de 34.

Très souvent au cours de cette année de cinquième les élèves ont travaillé en groupe; nous avons aussi organisé de nombreuses séances de discussion.

B. *Exploitation d'un questionnaire*

Un jour, en classe, nous avons décidé de faire un questionnaire auquel chaque élève aurait à répondre. Les élèves ont rapidement proposé un certain nombre de questions. Nous avons choisi celles qui allaient constituer notre questionnaire. Après cela chaque élève a répondu au questionnaire.

Un problème s'est alors posé à nous: dépouiller et organiser les réponses a ce questionnaire. En particulier nous avions la question suivante: "quels sports aimez-vous?" Comment présenter les réponses à cette question?

Très vite, les élèves ont proposé les deux méthodes suivantes:

(a) faire la liste des élèves de la classe et, en face de chaque nom, indiquer la réponse de l'élève;

(b) faire la liste des sports et en face de chaque nom de sport inscrire les noms des élèves ayant cité ce sport dans leur réponse.

Nous avons observé que ces deux méthodes avaient le même inconvénient: l'une permet de donner très vite la réponse à la question "quels sports aime X?"; l'autre permet de répondre à la question "qui aime le sport Y?"; aucune ne permet de répondre facilement au deux questions. Comment faire pour éviter que les noms d'élèves ou les noms de sports soient privilégiés?

Après un temps de réflexion et de discussion, un élève a proposé de construire un tableau à double entrée. D'un côté, sur une entrée, on indique les noms des élèves; de l'autre côté, sur l'autre entrée, on indique les noms des sports. Pour chaque élève, il suffit alors de marquer d'une croix les cases qui correspondent à un sport qu'il a cité.

Ainsi, nous retrouvons la représentation cartésienne du produit de deux ensembles, et la représentation par un tableau à double entrée d'une relation. La relation apparaît comme un sous-ensemble du produit. A priori, cette présentation a l'inconvénient de ne pas distinguer nettement la relation de sa réciproque. Seule une distinction entre le rôle de chacune des entrées permet de le faire.

On peut signaler que les élèves n'avaient encore jamais utilisé cette représentation du produit cartésien de deux ensembles. Par contre ils ont été aidés par les représentations en listes de fonctions caractéristiques d'ensembles sur lesquelles nous avions déjà travaillé.

Après avoir introduit ainsi les relations, nous avons pu passer à d'autres représentations des relations, et à l'étude d'autres relations.

Par ailleurs le dépouillement de ce questionnaire nous a permis de parler à nouveau des opérations élémentaires entre parties d'un ensemble. Enfin ayant traduit les réponses de chaque élève sur des fiches perforées, nous avons obtenu une autre représentation de ces opérations.

C. *Écriture des entiers naturels*

Voulant faire étudier aux élèves les systèmes de numération, je leur ai proposé de se placer dans les conditions suivantes: "Imaginez que pour une raison quelconque, (vous êtes un homme préhistorique, vous vivez isolé sur une île déserte, ...) vous n'avez jamais appris à compter. Pourriez-vous inventer un système qui vous permette de compter et d'écrire tous les nombres?" J'ai ajouté à cela que je leur demanderai ensuite de faire des additions et des multiplications dans leur système d'écriture.

Les élèves, répartis en douze groupes de travail, ont réfléchi et ont proposé des réponses à cette question. On peut regrouper les systèmes proposés en plusieurs catégories:

(1) Les systèmes tels que dans l'écriture d'un nombre, la juxtaposition de signes représente toujours l'addition des nombres correspondants. Ainsi si le signe '|' signifie 1, si le signe '□' signifie 5 et si le signe '◇' signifie 20, alors le nombre 68 qui est égal à $20+20+20+5+1+1+1$ va s'écrire: ◇◇◇□|||.

Huit groupes ont construit des systèmes de ce genre. Parmi les avantages indiqués par les élèves on peut relever: "On peut écrire tous les nombres, les retenir facilement. Facile à déchiffrer." Parmi les inconvénients: "Beaucoup de signes pour écrire les nombres." "Notre système est assez compliqué pour faire les opérations."

(2) Les systèmes qui dans l'écriture des nombres utilisent à la fois l'addition et la multiplication. Cela permet d'écrire tous les nombres avec un nombre fini de signes. Ainsi un groupe se contente de quatre signes: 'I' qui représente l'unité, 'C' qui représente cinq, '–' qui représente le signe de multiplication et '/' qui représente le signe d'addition.

Deux groupes ont construit un système de ce type. Parmi les avantages signalés par les élèves, on peut relever: "Nous pouvons écrire n'importe quel nombre sans avoir de nouveaux signes à inventer."

(3) Un système utilisant les 26 lettres de l'alphabet français et où la liste des entiers naturels est la liste de tous les mots que l'on peut construire avec cet alphabet, ces mots étant rangés dans l'ordre du dictionnaire des mots croisés: a, b, c, d, e, f, ..., y, z, aa, ab, ac, ad, ae, af, ..., az, ba, bb, ..., zz, aaa, ...

(4) Enfin un groupe a étudié le système de numération à base quatre à partir de la liste des premiers nombres: 0, 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, ...

Dans une réunion de synthèse, nous avons essayé de dégager les avantages et inconvénients des systèmes proposés par les groupes d'élèves. Après avoir repris les critiques déjà cités ci-dessus, certains élèves se sont demandés quel est le rôle du zéro dans l'écriture décimale.

Dans la discussion les élèves sont arrivés à dégager les principes de l'écriture de position dans l'écriture décimale habituelle et le rôle du '0'. Après cela, nous avons pu résoudre facilement des exercices de changement de bases, et des exercices dans d'autres bases de numération.

D. *Introduction des entiers relatifs et opérations*

Pour l'introduction des entiers relatifs et la définition de l'addition, nous avons utilisé une méthode analogue à celle exposé par E. Dehame dans le *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* (no. 259). Après avoir discuté de l'ordre, et avoir choisi un rangement des relatifs, nous avons construit une table d'addition de ces nombres.

La comparaison des tables d'addition dans **Z** et dans **N** nous a montré que d'une part les "positifs" se comportaient entre eux comme les naturels, d'autre part les "négatifs" se comportaient entre eux comme les naturels. Après discussion nous avons décidé que nous allions définir une opération qui serait telle que soit les "positifs" soit les "négatifs" se comporteraient entre eux comme les entiers naturels; pour le reste on prolongerait l'operation ainsi partiellement définie de manière à conserver la distributivité (en fait ce travail a été effectué sur les tables d'opération, et conserver la distributivité revenait à conserver une certaine symétrie dans la table).

E. *Triangle de Pascal*

Le problème de dénombrement de chemins dans un quadrillage cité plus haut, a aussi été posé aux élèves de la classe de cinquième. Assez vite les élèves ont découvert la symétrie. Alors que certains élèves en étaient encore à compter de manière empirique, d'autres essayaient de s'organiser et de trouver des procédés plus rationnels.

Au bout d'une heure et quart de recherches, un groupe avait découvert la loi de récurrence qui en termes de combinaisons peut s'écrire: $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.

Ensuite nous avons pu prolonger cette étude en la rapprochant d'autres exercices comme nous l'avons fait dans les classes de terminales A.

F. *Écritures algébriques*

Voulant apprendre aux élèves l'usage des parenthèses dans les écritures algébriques usuelles, comme nous avions déjà eu l'occasion d'utiliser des organigrammes, je leur ai proposé quatre organigrammes du type de celui reproduit dans la Figure 4, en leur demandant d'essayer de réécrire les mêmes choses, mais sur une seule ligne.[3]

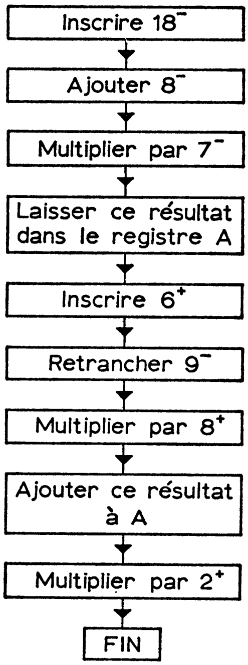


Fig. 4.

Voici quelques propositions des élèves:

(1)

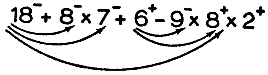


Fig. 5.

Ici les flèches définissent un ordre sur les opérations à effectuer.

(2) Ici (Figure 6) les "boîtes" ou rectangles remplacent les parenthèses habituelles, et les opérations sont numérotées dans l'ordre où elles doivent être effectuées.

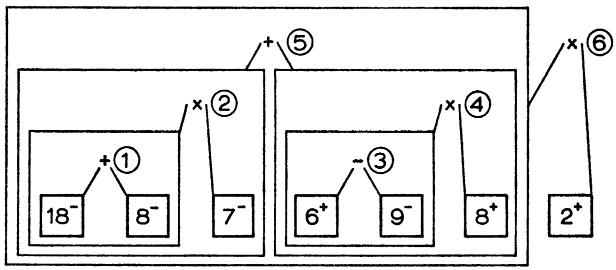


Fig. 6.

(3) Autre proposition où les opérations sont étagées:

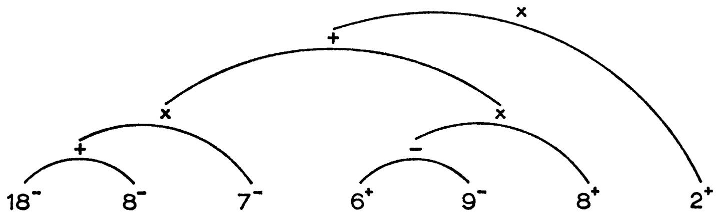


Fig. 7.

Ensuite, nous avons écrit la troisième de ces propositions sous la forme d'un arbre, comme dans la Figure 8.

Nous avons alors décidé de retenir quatre formes d'écriture: sous forme d'organigramme, avec des parenthèses, avec des encadrements d'expressions, sous forme d'arbre. Après avoir effectué de nombreux exercices de traductions d'une forme dans les autres, nous avons essayé d'établir les règles qui permettent de reconnaître si une expression avec des parenthèses est bien écrite. Cela nous a permis de faire des exercices purement formels de reconnaissance d'expressions bien écrites et des exercices formels d'écriture d'expressions. En particulier en remplaçant les signes d'opérations par les signes d'opérations logiques, et les nombres par des lettres, on retrouve certaines expressions de logique.

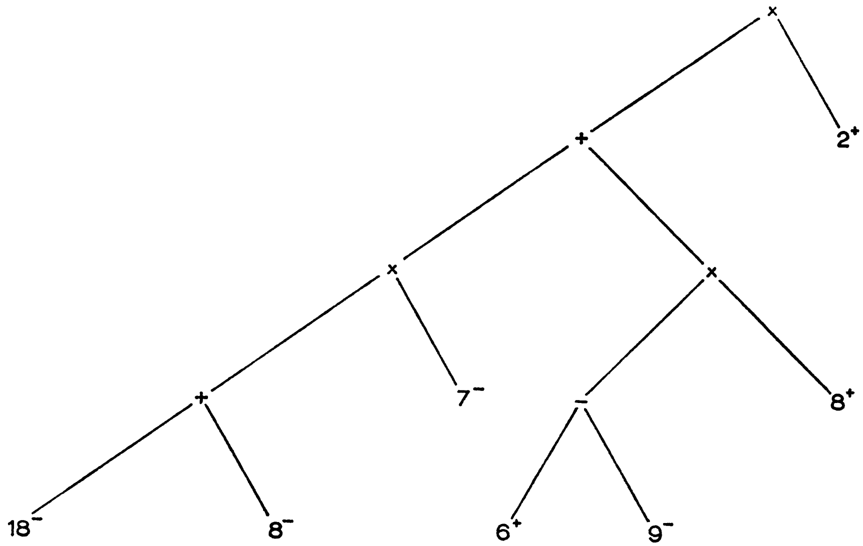


Fig. 8.

G. *Opinion des élèves*

A la fin de l'année, j'ai demandé aux élèves de dire par écrit et très rapidement ce qu'ils pensaient de la méthode utilisée en mathématique. Voici quelques-unes de leurs réponses. Dans l'ensemble la méthode semble avoir plu, quelques élèves suggérent des améliorations ou des modifications, d'autres sont inquiets à l'idée qu'ils vont changer de professeur et peut-être de méthode:

"Ce que j'ai trouvé de formidable dans ces cours c'est, tout d'abord, les liaisons professeur-élèves. Les discussions que nous avons faites sur le travail intéressant à faire en classe nous permettent de donner notre avis. On se sent vraiment concerné. Le professeur n'est pas le "dictateur absolu".

Contrairement à beaucoup d'élèves, je pense que les mathématiques modernes ne sont pas différentes des "classiques", mais que c'est seulement une manière plus intéressante de nous présenter ces mathématiques. En effet, dans cette classe tout le monde aime les cours.

Je préfère de beaucoup ces mathématiques à celles que l'on nous faisait faire à l'école primaire. Dans ces dernières la logique a bien sûr une grande part mais on résout surtout les problèmes avec ce qu'on a appris par cœur, par mécanisme. Dans les autres nous sommes obligés de chercher, non dans notre mémoire pour se rappeler la formule, mais c'est la logique qui fait découvrir la solution du problème. De plus nous avons la chance d'avoir à notre disposition des machines à calculer et un peu plus tard un petit ordinateur. C'était vraiment très intéressant de redécouvrir, pour la machine à calculer, le système qui permettait de faire marcher la machine. Je pense que nous sommes restés trop longtemps sur la même chose (pour l'ordinateur) tout en allant trop vite. Je crois qu'il aurait fallu rester moins de temps sur un même problème (temps de la recherche) et prendre plus de temps pour expliquer à certains élèves, qui, je suis sûre, n'ont pas encore très bien compris les boucles, les doubles entrées. Par contre, les "+" et "−", je crois que c'est très bien d'y être resté assez longtemps, car maintenant tout le monde a compris."

"J'ai trouvé que les maths de cette année étaient biens. On a fait des choses intéressantes et on est arrivé à définir certains points en discutant ensemble que l'on n'aurait pas pu définir seul ...."

"... Ce qui m'a intéressé le plus ce sont le travail sur machine, les discussions, les débats, le travail en groupe. Je préfère le travail de cette façon que celle des autres classes. Ce qui améliore beaucoup notre logique: faire un problème, sa solution de plusieurs manières ..."

"... Et aussi quand quelqu'un dans notre groupe n'avait pas compris quelque chose, on se mettait en groupe et on lui expliquait. Je crois que l'élève en question comprenait mieux car c'était entre élèves. ..."

"J'ai trouvé que le cours de math était intéressant. Je pense quand même que nous n'avons pas assez approfondi les idées: souvent nous avons arrêté de parler d'un problème sans vraiment l'avoir terminé. Je pense aussi que certains élèves qui n'avaient pas compris quelque chose (à l'intérieur d'un groupe) n'ont pas osé le dire et qu'on aurait dû faire pour *chaque* problème un petit exercice permettant de savoir si tout le monde avait compris ..."

"Toute la méthode en général est très bonne, mais je trouve qu'il devrait y avoir beaucoup plus de devoirs à la maison. Cela manque beaucoup à l'assimilation du travail ..."

Il paraît possible, aussi bien dans les classes à examen que dans les classes où le programme est moins strict, d'utiliser des méthodes ouvertes de discussions ou de travail en groupes. Pour cela, il faut auparavant repenser le programme et le reconstruire par grands thèmes. Cependant on peut être gêné par le trop grand nombre d'élèves par classes; on peut aussi rencontrer un handicap: l'absence de matériel, d'ouvrages adaptés à cette sorte d'enseignement. Les élèves peuvent regretter l'absence d'ouvrages de référence. Pour certains chapitres, des fiches de synthèse, ou bien même des leçons programmées introduisant certaines notions pourraient être utiles (je pense ici à certains passages sur les exponentielles et les logarithmes). D'autre part, des films ou du matériel audio-visuel pourrait dans de nombreux cas être d'une grande utilité. Il semble que dans l'ensemble les élèves soient davantage attirés par ces méthodes.

BIBLIOGRAPHIE

Dienes, Z. P.: 1965, *Comprendre la mathématique*, O.C.D.L., Paris.
Fletcher, T. J.: 1966, *L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui*, O.C.D.L., Paris.
Kordiemsky, B.: 1963, *Sur le sentier des mathématiques*, Tomes 1 et 2, Dunod, Paris.
Revuz, A.: 1963, *Mathématique moderne, mathématique vivante*, O.C.D.L., Paris.
Rosensthiel, P. et Mothes, J.: 1965, *Mathématiques de l'action*, Dunod, Paris.
Trahtenbrot, B. A.: 1963, *Algorithmes et machines à calculer*, Dunod, Paris.
Émissions des chantiers mathématiques, Radio-Télévision Scolaire; et les documents d'accompagnement publiés dans: *Dossiers pédagogiques de la Radio-Télévision Scolaire*, Institut Pédagogique National, Paris.
Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'Enseignement Public, Paris.
Recherches pédagogiques, no. 35 et 36, Institut Pédagogique National, Paris.

NOTES

[1] Le mot 'familier' est de M. Revuz dans *Mathématique moderne, mathématique vivante*, Edition O.C.D.L., Paris, 1963.

[2] Dans le système français, la classe de première précède celle de terminale.

Le programme de mathématique de terminale A4 comprend en gros trois parties:

(a) Une partie analyse: définition des primitives d'une fonction, utilisation des primitives pour les calculs d'aires; définition, propriétés et étude des fonctions logarithmes et exponentielles. (Au programme de première on trouve: dérivée, étude des variations d'une fonction.)

(b) Une partie sur les ensembles: application d'un ensemble dans un autre; loi de composition interne; définition de groupe, anneau, corps; exemple de construction axiomatique: les nombres complexes.

(c) Dénombrements. Probabilités totales et probabilités composées.

[3] Les signes des nombres sont placés en indices.

E. G. BEGLE

THE ROLE OF RESEARCH IN THE IMPROVEMENT OF MATHEMATICS EDUCATION

The enormous changes in mathematics education all over the world which we have seen in the last decade have been paralleled by, and in fact have been to a considerable extent shaped by, a long series of discussions about the problems of mathematics education. I do not wish to review the substance of these many discussions. Instead, I want to point out that these discussions were concerned with a small number of general categories of questions about mathematics education. One of these categories is made up of questions about the ultimate objectives of mathematics education. The questions, "What topics of arithmetic would we like all students to master?" or "Should all students be expected to grasp the nature of algorithmic processes sufficiently well so that they can understand what a high-speed electronic computer can do and what it cannot do?" are examples of questions in this category. Indeed, any question asking whether a particular topic is valuable in its own right is in this category.

A second category consists of questions about the order and sequence of the various topics to be included in the mathematics curriculum. Here we place questions which ask, for a specific mathematical topic, what other bits of mathematics a student must know or be able to do in order to master that topic. Also, if two routes to a particular mathematical topic are known, it can be asked whether one is better, or more efficient, or quicker than the other.

Still another category consists of questions about pedagogical procedures. Here I place questions about the effectiveness of discovery teaching, the value of using structured materials in the teaching of primary school arithmetic, the relative importance of inter-student versus teacher-student classroom discussions, etc. In this category I also place questions about the nature and extent of training programs for the preparation of mathematics teachers.

Finally, there is a large category of questions about the nature and capabilities of the mathematics learner. For example: Can all students learn the rudiments of algebra? Can all students be brought to understand the algorithm for long division? Do some students learn better when mathematics is presented in a geometric mode while other students find a symbolic presentation more effective?

During the discussions of the past decade, a large number of questions in each of these categories has been provided with answers, and in fact in many cases with more than one and sometimes with contradictory answers.

I do not intend to review these many questions and their many answers nor do I intend to provide my own answers to any of these questions. I do, however, wish to make two basic points about the questions and the answers. My first point is that the answers to almost all of the questions that have been raised have a factual aspect. It is true that there are a few questions that can be asked about the ultimate objectives of mathematics education for which the answers are pure value judgements, about which we can differ but not argue rationally. Most of the questions, however, demand answers which purport to be factual statements about real students, real teachers, and real classroom situations.

My second point is that the factual aspect has been badly neglected in all our discussions and that most of the answers we have been provided have generally had little empirical justification. I doubt if it is the case that many of the answers that we have been given to our questions about mathematics education are completely wrong. Rather I believe that these answers were usually far too simplistic and that the mathematical behaviors and accomplishments of real students are far more complex than the answers would have us believe.

In order to provide some empirical foundation for these remarks, let me turn now to a few specific questions. As an example to show that the real situation may be considerably more complex than one would have anticipated, let me describe an experiment carried out recently by one of my colleagues, Professor Jon Higgins, at Stanford University [4]. Many mathematicians, and an even greater proportion of scientists, believe that science is an excellent motivator and source of ideas for mathematics. With this in mind, the School Mathematics Study Group prepared a few years ago some short chapters designed for classroom use along this line. The eighth grade chapter which was used in this experiment requires the student to carry out a number of physical experiments, take measurements, and graph the results. This experimental phase was used to introduce and motivate the mathematics of linear equations and their graphs. The chapter takes approximately four weeks of class work.

Twenty-nine eighth grade teachers participated in this experiment and taught the chapter to one class each. The average age of the students was about 14 years and the average size of a class was about 33 students. Four preliminary meetings were held with the teachers in order to acquaint them with the physical equipment which the students were to use.

A battery of tests was administered before the teaching started. The battery contained one short reasoning test, three mathematics tests relevant to the mathematics to be considered in the chapter, and eighteen short scales measuring various facets of students attitudes towards mathematics and other school subjects. After the unit had been taught, the initial battery, except for the reasoning test, was readministered.

Differences between the *pre*test scores and the *post*test scores were computed. It was found that significant gains were made on the three mathematics tests and that there were significant changes on six of the attitude scales. In five of these six cases the changes were in the negative direction.

In order to analyze these attitude changes more closely, a statistical procedure called Hierarchical Grouping Analysis was used. This procedure starts with the *profile* of attitude change scores for each student and separates the students into groups in such a way that all the students in any one group have profiles of attitude changes that are as similar as possible while two students in two different groups have profiles of change scores that are as dissimilar as possible.

Eight separate groups were formed by this statistical procedure. (Of course if the attitudes of all the students had been affected the same way, there would have been only one group.) Analysis of the data showed that no single teacher was responsible for the placement of students in a particular group since, except for the very largest group, the number of teachers represented in any one group was approximately the same as the number of students in it. The various attitude changes apparently were not a function of the class a student was in.

This result illustrates very well my claim that the precepts we have been given for improving mathematics education have usually been too simplistic and that reality is usually complex.

In fact, these results are even more complex than I have so far indicated. Analysis of variance showed that there were essentially no significant differences between seven of the eight groups on any of the scores obtained from the pretest. (The eighth group consisted of those students who had very low initial scores on the one attitude scale for which there was an overall improvement. This group showed little significant change on any other scale.) Thus the many kinds of information obtained from the initial battery of tests gave no clues as to the underlying reasons for these different patterns of attitude changes and provided no suggestions as to how we might influence them.

Let me turn now to another matter on which I think that most of us hold opinions that, despite the strength with which we hold them, are lacking in, or even contrary to, empirical findings.

I imagine that most of us would feel quite confident about being able to judge the effectiveness of a particular teacher after sitting for, say, half an hour at the back of the classroom watching the teacher in action. However, I do not share this confidence. Numerous studies of teacher effectiveness have been carried out in the United States (the review [1] is quite illustrative of these studies). One finding is clear. Judgement of teacher efficiency made by one kind of person, for example school principals, is quite uncorrelated with judgements made by another kind of person, for example fellow teachers. Judgements about teacher effectiveness that are based on observation, or interviews, are therefore quite unreliable. In addition, judgements of teacher efficiency, no matter who makes them, are usually not correlated with measures of student learning.

Nevertheless, the question of teacher effectiveness, the problem of measuring it, and the problem of predicting it are extremely important. In any educational system a vast number of decisions are made which require some knowledge about teacher effectiveness. The decision to admit a candidate to a teacher training program involves, at least implicitly, a prediction of his potential effectiveness as a teacher. Decisions to employ, promote, or dismiss teachers take into account teacher effectiveness. Decisions about changes in the curriculum should be based, in part, on information about the effectiveness of the teachers who will be called on to implement the changes.

Because of the importance of this matter, the School Mathematics Study Group during the course of a rather large five year longitudinal study of mathematics achievement which started in the fall of 1962, gathered a considerable amount of information about a large number of teachers. We have just completed an analysis of some of these data in an attempt to find out more about teacher effectiveness.

Because judgements of teacher effectiveness had proved unreliable, we decided to measure teacher effectiveness solely in terms of pupil achievement. Of course it would not do to say that one teacher was more effective than another if his students scored higher on a test at the end of the year than did the second teacher's. It might be that the first teacher's students were of higher mental ability, or knew more about the topic at the beginning of the year, or both. Our procedure, therefore, took into account a number of measures taken at the beginning of the school year, both of general reasoning ability and of initial mathematics achievement. By means of regression analysis we computed that combination of these initial scores which best predicted average achievement on a particular test at the end of the year, and thus were able to assign to each student a predicted score on that test which took into account his initial status. The difference between his actual score on the test and his expected score showed how much better (or if negative, how much worse) he had achieved than would have been expected on the average. The average of all these differences over a class was taken to be a measure of the effectiveness of the teacher of that class.

Actually these computations were carried out for a number of different sets of teachers. We had one set of fourth grade teachers who were using what we considered to be modern textbooks and another set of fourth grade teachers using what we considered to be conventional textbooks. There were similar pairs of sets of teachers at the seventh and at the tenth grade level. We also separated teachers by sex and investigated each sex separately. In some cases we deemed it appropriate to investigate male and female students independently. Finally we used two different measures at the end of the year, the first a measure of computational skill and the other a measure of understanding of mathematical concepts. Thus two different efficiency indices were computed for each teacher.

The results that we obtained were, to me at least, discouraging. In each case there were significant, and in most cases, rather large variations in teacher effectiveness. But this variation in teacher effectiveness did not seem to be correlated with anything else we knew about the teachers. We had collected a considerable amount of information of two different kinds about the teachers. The first kind of information consisted of factual matters such as age, sex, amount of teaching experience, amount of training beyond that minimally required for the job, amount of recent inservice training, etc. We had been persuaded that teacher personalities and attitudes towards teaching, towards mathematics, and towards students could affect student achievement. The second kind of information therefore was extracted from a lengthy questionnaire that provided us with information about these teacher attitude and personality variables.

Regression analyses showed that in no case did this rather extensive amount of information about the teachers account for more than a small fraction of the variance in the teacher effectiveness scores, in most cases less than 10 percent.

This matter of teacher effectiveness is, I believe, one on which many people consider themselves quite knowledgeable. My inspection of the research literature and of our own analyses convinces me that this knowledge is very shaky indeed. That this situation, incidently, is not unique to the United States is clearly indicated in Chapter 6 of Volume 2 of a report on the International Study of Achievement in Mathematics [7].

As a final example, let me report some recent empirical findings that cast doubt on what has been an universally held belief. This is the belief that mathematical ability, like intelligence, is not shared equally among individuals, that some individuals have high mathematical ability, others have low mathematical ability, and the rest are somewhere in between. In fact, we believe that in any natural population of reasonable size the distribution of mathematical ability is closely approximated by the normal distribution. We also assume that students of low mathematical ability cannot learn as much mathematics or learn it to as great a depth as those of high mathematical ability.

Most of our school programs are based on this assumption. They are arranged to filter out, at some appropriate stage, those who have so far done poorly in mathematics and thus have demonstrated low mathematical ability. These students are placed in programs which are less demanding mathematically or which require no mathematics at all.

A few years ago John Carroll, a distinguished psychologist and educator, suggested another way of looking at scholastic ability in general, and therefore mathematical ability in particular [2]. He advanced the hypothesis that all, or almost all, students could be brought to the same level of achievement in any particular scholastic topic, but that the amount of instruction that would be needed to bring a student to a particular level of achievement would vary from student to student. At about the time that Carroll made this suggestion the School Mathematics Study Group was organizing an experiment which, as it turned out, provided evidence in favor of this hypothesis [5]. This experiment involved two groups of experimental students and two corresponding groups of control students. The first experimental group consisted of students entering seventh grade (and thus between 12 and 13 years of age) who were between the 25th and 50th percentile in ability, whether measured by a standard IQ test or by a standard mathematics achievement test. The other experimental group consisted of students in the same ability range who were entering the ninth grade. The control groups, which were selected a year later, consisted of students entering seventh or ninth grade who were between the 50th and 75th percentile in ability.

Both the experimental and the control seventh grade students followed the same mathematics curriculum and used the same textbook, a seventh grade text prepared by SMSG. Similarly, the experimental and the control ninth grade students followed the same mathematics program and used the same SMSG algebra text.

What was different was that the experimental groups were given two school years to study the material which the control groups studied for the usual one school year. A battery of tests was administered at the end of the experiment. Analysis of the test results showed that the seventh grade experimental students performed almost, but not quite, as well as the control students on this battery. Analysis of covariance using scores from a battery of pretests strongly indicated that the experimental students had learned considerably more, given two years, than they would have if they had only the usual one year. At the 9th grade level the results were in the other direction. The experimental students outscored the control students on the final battery of tests.

Here is a case then where students of below average ability were able to reach about the same level of achievement as students of above average ability as a result of an increase in the amount of instruction provided them.

Early this year I carried out a similar experiment, but one which was much smaller both in number of students involved and in duration. The students were in the middle of the fourth grade. A very small topic in mathematics, completely new to the students, was used and was taught for one, two, or three days. In the longer teaching sessions, no new ideas were introduced, but there was time for a wider variety of illustrations of the ideas introduced and for more student discussion and questioning than was possible in the shorter sessions.

On the basis of a test of arithmetic reasoning, the students were grouped into three ability levels – low, medium and high. The average scores on a posttest were not significantly different along any of the three diagonals leading from lower left to upper right.

	1 day	2 days	3 days
Low Ability			
Medium Ability			
High Ability			

This then is another example in which students of lower ability reached the same achievement level as students of higher ability when they were provided with more instruction on the material.

While these two studies are rather limited in scope, together they do cast doubt on a fundamental belief which lies at the foundation of our educational systems.

I could go on with further reports of empirical findings, but I believe that I have given you enough. I may not have convinced you, but I think you see why I am convinced that many of the guide-posts we have followed in our attempts to improve mathematics education are of dubious value and that the answers we have been given to our fundamental questions about mathematics education generally cannot be relied on.

Why are we in this unhappy state of affairs?

In the arguments that have led to recommendations for changes in subject matter or changes in pedagogical procedures, I have been able to detect few, if any, logical errors. I am forced to the conclusion that the assumptions from which these arguments started must have been erroneous. The strong opinions which each one of us holds about how children learn mathematics and how teachers should teach are often erroneous and almost certainly too narrow.

We have not recognized that no one of us has been in a position to gather, during the course of our ordinary activities, the kind of broad knowledge about mathematics education that we need. The classroom teacher after many years of experience knows quite a lot about how students learn mathematics and do mathematics in *his* classroom. But this seems to tell us very little about what happens in the next teacher's classroom. The research mathematician was probably atypical when he was a student and in any case has certainly forgotten most of what went on in his classrooms when he was young. Mathematics educators have, on the one hand, been too cut off until recently from the main stream of mathematics and, on the other hand, have been unable to organize the kind of empirical investigation needed to provide useful information. Even our colleagues in psychology whose main interest is in the ways in which people learn have been of little help because they have mainly concerned themselves with how people learn things that are irrelevant to mathematics.

Our major mistake in mathematics education has been our failure to recognize that we have not possessed the tools needed to do a good job in improving mathematics education, and that in the course of carrying out our normal activities as teachers and as mathematicians we are not likely to be provided with these tools.

Let me hasten to say that I do not believe that this mistake has had disastrous results. On the contrary, I am convinced that even though the guide-posts we followed and the tools we used in our attempts over the last decade to improve mathematics education were of dubious validity, we did move in the right direction and we have achieved positive results. All of us have received large amounts of anecdotal evidence both from student and teachers to the effect that what we have done has been good. I might say that we are very pleased at the results we are getting in our analyses of the data collected in our longitudinal study [9]. The mathematics provided in the School Mathematics Study Group textbooks seems to provide a better understanding of mathematics and a greater ability to analyze and solve problems than the mathematics provided in the more classical textbooks. The time and effort we have devoted to reform during the last decade has not been wasted.

Nevertheless, we cannot stop now. Further improvements are essential. Our children will live in an even more complicated and more quantified world than that of today. They need a better mathematics program than they now are getting. We still have many difficult problems to solve before we can make further improvements. In fact, I believe that so far we have attacked only the easier problems of mathematics education.

Let me review a few of these problems to illustrate the magnitude of the task that lies ahead. A major part of the mathematics teacher's job is to develop in his students' minds a large number of mathematical concepts. We know of many ways of going at this, ranging from straightforward exposition to open-ended discovery methods. Both the number and variety of exemplars (or nonexemplars) of a concept can be varied. The relationships of the concept to other more familiar concepts can be stressed or ignored.

There have been many experimental investigations of all this. ([8] provides an excellent recent review of discovery teaching. [3] is a useful bibliography on concept learning.) Unfortunately, the outcomes of these studies have been so varied that no pattern is clearly discernable. It will be a long time before we can say that for this particular student and this particular teacher and this particular mathematical concept, the best pedagogical procedure is thus and so. But this matter is so important that continued investigation on a wide scale is imperative.

A closely related problem concerns formal reasoning. Certainly most of the mathematics taught at the university level is treated in a formal, deductive or even axiomatic fashion. Equally clearly, formal reasoning plays no part in the primary school program. When should the transition be made?

As a case in point, let me mention the topic of multiplication of negative numbers. How should this be introduced? Should one draw on the structural properties of the non-negative numbers? Or is it best to start with a variety of concrete situations? There has been much discussion of this and a number of different approaches have been tried. Unfortunately, not enough empirical information has been extracted from these trials to provide us with any guidance.

Computational skill is a topic that is dear to the heart of many. It seems clear that each student should acquire a certain degree of computational skill, but how much? Preliminary results from some analyses we are now carrying out indicate that the amount is somewhat less than has been accepted so far.

But even when this is settled, the problem arises as to how best to reach the proper level. There are some who claim that a sufficient degree of computational skill can be developed incidentally through a sequence of carefully selected problems or through playing a variety of mathematical games. On the other hand, others are sure that a certain amount of carefully managed computational drill is necessary. There seems to be very little empirical information as yet about this problem, and until it is obtained we are hindered in preparing better curricula.

I have already mentioned the suggestion that all, or almost all, students can achieve equally well in mathematics but that the length of time and instruction needed for this achievement varies from student to student. I pointed out a small amount of empirical information that agrees with this suggestion. However, our entire educational system assumes that the contrary is true. Widespread empirical investigation of this problem seems called for.

I have already pointed out that we have very little sure knowledge about what makes the effective teacher. Until we know much more, when we attempt to improve our teacher training procedures, we will just be floundering about, trying innovations in a hit or miss fashion. Our chances of a lucky hit, a real improvement, are microscopically small.

Let me conclude this sample of problems about mathematics education with one to which mathematics educators have as yet paid little attention. This is the problem of cultural effects on mathematics learning and mathematics achievement. This is of great concern in my country at the moment. The U.S. is culturally heterogeneous in that we have there a number of substantial minority groups, each of which is relatively homogeneous culturally, but which are quite distinct. Examples are the American Indians, a substantial group that is of Mexican origin, the Negro population, a large group of immigrants from Puerto Rico, etc. Undoubtedly the majority group in the U.S. can be subdivided also into a number of relatively homogeneous but quite distinct cultural subgroups.

The question arises as to what are the effects of the culture in which a student is brought up on his ability to learn and do mathematics. A related question is whether pedagogical procedures that are effective in one culture will be equally effective in another culture. These are not silly questions. Let me cite an extreme case. To a resident of the country of Nepal, the phrase "law of nature" is meaningless [4]. For them, nature is ruled by gods, spirits and devils. Is it possible to teach concepts of science to Nepalese students? If it can be done, should it be done the way we teach science to students in Palo Alto, California? Most important, if the basic concepts of science can be taught to Nepalese children, what is the effect on them of adopting a point of view towards nature which is in basic conflict with their culture?

Practically nothing is known about this crucial problem. I might also point out that the problem is not one for the U.S. alone. Many countries are asking not only the U.S., but also others of the affluent countries, for assistance in improving their mathematics education programs. Having looked into a number of attempts to honor these requests, I am convinced that failure to study the cultural milieu of the proposed reforms has often resulted in a serious waste of time, effort and money.

There is no need to continue this list. I trust that by now I have convinced those who are concerned for the improvement of mathematics education that we are faced with many serious problems. I trust that you are also convinced that progress towards solution of these problems can only come from careful empirical research. Let me conclude, therefore, with some comments about the nature of empirical research in mathematics education.

I see little hope for any further substantial improvements in mathematics education until we turn mathematics education into an experimental science, until we abandon our reliance on philosophical discussion based on dubious assumptions and instead follow a carefully correlated pattern of observation and speculation, the pattern so successfully employed by the physical and natural scientists.

We need to follow the procedures used by our colleagues in physics, chemistry, biology, etc. in order to build up a theory of mathematics education. (Let me emphasize that I am talking about scientists, not science educators. Science education today is in no better condition than mathematics education.) We need to start with extensive, careful, empirical observations of mathematics teaching and mathematics learning. Any regularities noted in these observations will lead to the formulation of hypotheses. These hypotheses can then be checked against further observations, and refined and sharpened, and so on. To slight either the empirical observations or the theory building would be folly. They must be intertwined at all times.

Most of the empirical studies which I mentioned earlier involved rather large numbers of students and teachers. However, I don't want to give the impression that empirical investigations must always involve large numbers. By limiting the size of the population being studied, it is sometimes possible to carry out a much more penetrating and detailed study than can be attempted with the paper and pencil type of instrument that must be used when large numbers are involved. Of course the hypotheses developed from such intensive investigation must be considered quite tentative and need to be tested against wider selections of students and teachers.

This clinical kind of investigation has been extensively employed by our colleagues in the Soviet Union. Both their procedures and their observations have turned out to be extremely interesting, and we are now busily engaged in translating into English a large part of the recent Russian literature on mathematics education [10]. Those of you who are not acquainted with this literature are advised that it is well worth careful study.

On the other hand, we should observe that in one sense, the physicist's job is much easier than ours. (Again, I am talking about the physicist, not the physics educator.) He has only a small number of particles to study and one electron is just like another electron, one proton just like another proton, one neutron just like another neutron. The biologist's job is more complicated. No two blossoms on an apple tree in the spring are exactly alike. Nor do they all unfold at exactly the same time or at exactly the same rate. Nevertheless, these blossoms are sufficiently similar so that generalizations can be made and hypotheses entertained which can be tested against the same or other trees the next spring.

Our task is vastly more complicated, since the mind of a child is vastly more complex than an apple blossom and the variations to be found within a single classroom are vastly more complicated than to be found on a single apple tree.

This points out the need to make many, though not necessarily all, of our observations on groups of students and teachers that are large enough to include a wide range of values of the relevant variables. These numbers probably need not be as great as those we have dealt with in our SMSG studies, since even our preliminary analyses seem to be demonstrating that a considerable number of variables which seemed potentially relevant are in actuality not relevant. Nevertheless, to restrict ourselves to small scale observations would be to sacrifice the generality of our theories.

And now I have finished saying what I wanted to say. I have argued that first, the study of mathematics education should become more scientific and second, that the way forward has already been demonstrated by our colleagues in science. We are starting far behind them. We are now where they were many decades or even centuries ago. But their success augurs well for our future success. I hope that my argument has been persuasive, because I am convinced that only by becoming more scientific can we achieve the humanitarian goal of improving education for our children and for everyone's children.

Stanford University

BIBLIOGRAPHY

[1] Barr, A. S. (ed.), *Wisconsin Studies of the Measurement and Prediction of Teacher Effectiveness*. Dembar Publications, Inc., Madison, Wisc., 1961.

[2] Carroll, John, 'A Model for School Learning,' *Teachers College Record* **64** (1963), 723–733.

[3] Center for Cognative Learning. *Concept Learning: A Bibliography, 1950–67*. University of Wisconsin: Technical Report No. 82, 1969.

[4] Dart, Francis E. and Pradhan, Panna Lal, 'Cross-Cultural Reaching of Science', *Science* **135** (1967), 649–656.

[5] Herriot, Sarah T., *The Slow Learner Project: The Secondary School "Slow Learner" in Mathematics*. SMSG Report No. 5. Stanford: School Mathematics Study Group, 1967.

[6] Higgins, Jon, *The Mathematics Through Science Study: Attitude Changes in a Mathematics Laboratory*. SMSG Report No. 8, Stanford University, Stanford, Calif. (in press).

[7] Husén, Torsten (ed.), *International Study of Achievement in Mathematics.* Almquist and Wiksell, Stockholm, 1967.

[8] Shulman, Lee S. and Keislar, Evan R. (eds.), *Learning By Discovery. A Critical Appraisal,* Rand McNally and Co., Chicago, 1966.

[9] Wilson, J. W., Cahen, L. S., and Begle, E. G. (eds.), *NLSMA Reports.* Numbers 1–18. Stanford: School Mathematics Study Group, 1968–9.

[10] Wirszup, Izaak and Kilpatrick, Jeremy (eds.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics.* Vols 1 and 2. Stanford University: School Mathematics Study Group and University of Chicago, 1969.

A. DELESSERT

DE QUELQUES PROBLÈMES TOUCHANT À LA FORMATION DES MAÎTRES DE MATHÉMATIQUES

I. PRÉAMBULE

Ceux qui ont suivi l'évolution de l'enseignement mathématique au cours de ces vingt dernières années ont pu observer que la "modernisation" s'est d'abord manifestée au niveau des programmes et des manuels. Ce n'est qu'assez récemment que l'on s'est aperçu que les réformes proposées resteraient lettre morte tant qu'on n'aurait pas imaginé de nouvelles techniques d'enseignement et, surtout, tant qu'on ne disposerait pas d'un corps enseignant capable de faire passer les idées nouvelles dans la pratique. En étudiant le problème de la formation des maîtres de mathématique, on embrasse d'un seul coup d'œil tout ce qui touche à l'enseignement mathématique avec l'assurance de ne pas perdre de vue l'essentiel: la réalisation concrète dans les classes.

Mais l'histoire nous apprend aussi que ce n'est pas parce qu'une idée relève de la plus simple évidence qu'elle s'impose rapidement à ceux qui auraient intérêt à s'en servir. C'est pourquoi je me propose de formuler d'abord quelques constatations banales. Après quoi j'essaierai de montrer quelques-unes des conséquences que l'on peut raisonnablement en tirer.

J'ajoute que ceux qui m'ont fait l'honneur de me lire ou de m'écouter sur ce sujet retrouveront peut-être quelques-uns de mes thèmes de prédilection. Tout en m'excusant auprès d'eux, je dirai, en parodiant l'humoriste, que tant qu'on s'obstinera à méconnaître certaines banalités lourdes de conséquences, je m'obstinerai à proclamer qu'elles sont lourdes de conséquences.

II. LES ÉTAPES DE LA FORMATION DES MAÎTRES

La formation des maîtres s'effectue au cours de trois périodes également importantes. Le *temps d'école* d'abord, où le futur maître va s'initier aux mathématiques élémentaires et à l'issue de laquelle il va choisir de faire des études mathématiques. Ensuite le *passage à l'Université,* où il va passer du rang de mathématicien amateur à celui de professionnel et où il va recevoir sa préparation didactique. Son *activité magistrale* enfin, durant laquelle il doit s'astreindre à un "recyclage continu".

De tous temps, on a beaucoup insisté sur la deuxième étape. C'est évidemment la plus spectaculaire et, à première vue du moins, la plus exaltante.

Certains candidats au diplôme d'enseignement font là un effort intellectuel qu'ils ne parviendront plus jamais à égaler par la suite. Cela les incite parfois à accorder à leur diplôme une vertu surnaturelle. Sous prétexte qu'ils sont gradués à vie, ils se considèrent comme indéfiniment compétents. Je connais de très médiocres licenciés qui écrasent de leur mépris des maîtres qui, bien que parvenus à l'enseignement mathématique par d'autres voies, leur sont infiniment supérieurs par l'ouverture d'esprit et l'aptitude à renouveler leurs connaissances et leurs procédés didactiques.

Toutefois, depuis quelques temps, on s'est avisé que les idées, en mathématiques, évoluent trop vite pour qu'on puisse admettre qu'un professeur passe toute sa carrière à exploiter les connaissances acquises en une fois au cours de ses études universitaires. La formation continue est devenue une obligation pour le maître; l'organisation scolaire doit lui faire sa place et l'Université doit en assumer la responsabilité technique.

Or, on parle moins, me semble-t-il, des influences que subit le futur maître de mathématique dans les classes où il enseignera lui-même par la suite. Je ne pense pas à la formation mathématique qu'il y reçoit, qui doit s'accorder à celle qui lui sera dispensée à l'Université, cela va sans dire. Je songe plutôt à l'opinion qu'il se fait du métier de maître de mathématique. Je connais plusieurs jeunes mathématiciens brillants qui reconnaissent avoir été convertis à la mathématique durant les dernières années de leur scolarité secondaire, qui s'intéressent même à l'enseignement, mais qui se sont promis de ne jamais professer les mathématiques élémentaires, afin de ne pas devenir semblables à tel ou tel maître qu'ils ont connu. Ce qui montre que si le message mathématique a bien été transmis, le statut de messager s'est révélé peu attirant.

Peut-être ces jeunes ont-ils pu observer un excellent technicien, bardé de diplômes, mais incapable de trouver le contact avec des non-mathématiciens. Son enseignement s'adresse uniquement aux futurs savants. Quant aux autres, il veut ignorer ce que peut représenter pour eux la mathématique. Il n'en attend rien, ne leur apporte pas grand-chose, éveillant chez tous un vague respect dénué de sympathie. Peut-être ont-ils vécu sous la férule d'un maître qui, parvenu essoufflé au terme de ses études universitaires, s'est réfugié dans l'enseignement. Pour se justifier à ses propres yeux, il défend la doctrine suivant laquelle la fonction d'enseignant et la carrière de mathématicien s'excluent mutuellement. Dès lors, il s'enferme dans un système scolaire dont il accuse encore la rigidité, l'œil rivé sur l'échéance des examens. A moins encore qu'ils ne soient tombés sur un amateur de vulgarisation décidé à briller à peu de frais par l'emploi d'un langage obscur et prétentieux auprès d'enfants obligés par l'école à l'écouter assis sans résistance apparente. Nous avons tous entendu parler de ces classes qui savent à merveille aiguiller leur maître vers ses domaines de divagation favoris, de sorte que la leçon se passe tout entière à des diversions ridicules. On en retire l'impression ambiguë que nul ne sait, du maître ou des élèves, qui a dupé l'autre.

Ces maîtres insuffisants sont dangereux par la répulsion qu'ils inspirent à de bons candidats à l'enseignement. Ils le sont encore plus par la séduction que leur comportement peut exercer sur des esprits médiocres dont l'école n'aura pas à s'enorgueillir.

De toute façon, l'atmosphère qui règne dans les classes de mathématique et le comportement des maîtres ont une grande influence sur le recrutement du corps enseignant mathématique.

III. QUEL EST L'OBJET PRINCIPAL DE LA FORMATION DU MAÎTRE DE MATHÉMATIQUE

Pour la mathématique comme pour toute autre discipline, le futur maître doit d'abord acquérir des connaissances plus approfondies et plus étendues sur le domaine qu'il va enseigner; il doit ensuite prendre conscience de ses moyens pédagogiques et enrichir le bagage de ses possibilités didactiques. Mais en plus de cela, la préparation à l'enseignement mathématique pose un problème qui lui est propre et dont je me propose de souligner ici toute l'importance.

L'enseignement de la mathématique peut se dérouler suivant deux ordonnances que nous appellerons respectivement la *présentation de type avancé* et *celle de type élémentaire*. La première, dont le traité de N. Bourbaki reste l'exemple justement célèbre, place d'abord les notions les plus fondamentales, c'est-à-dire des notions sous-déterminées qui, par composition, donneront naissance à tous les objets mathématiques. La présentation élémentaire, en revanche, s'échafaude à partir des notions les plus concrètes dont la mention s'impose par des applications matérielles. Ainsi on peut trouver d'un côté d'excellents exposés avancés de géométrie élémentaire et de l'autre des cours élémentaires sur les équations aux dérivées partielles. On voit bien par là en quoi les deux démarches se distinguent. Beaucoup de notions simples dans un exposé avancé peuvent n'apparaître que tardivement dans un exposé élémentaire, comme l'idée de "topologie". A l'inverse, la notion d'"angle", si intuitive dans les traités élémentaires, est plutôt élaborée dans les présentations avancées. Il serait un peu simpliste de croire qu'un exposé avancé n'est rien d'autre qu'un texte élémentaire lu à rebours, comme le croient certains, car il existe des notions à la fois fondamentales pour le mathématicien avancé et intuitives, commodes dans le domaine élémentaire (comme la notion d'"application", par exemple). Il n'en reste pas moins que les deux processus doivent être clairement distincts.

Et bien, si absurde que cela puisse paraître, il s'est trouvé des auteurs qui les ont confondus. Prenant prétexte du fait que Bourbaki "prend les mathématiques à leur début", ils se sont appropriés sa table des matières dont ils ont fait celle de leurs ouvrages. Il faut dire que pendant quelques temps, la "modernisation" de l'enseignement mathématique a consisté uniquement à remplacer les présentations élémentaires périmées par une présentation avancée, toujours la même d'ailleurs. L'erreur est aussi grave que celle de l'enseignement mathématique de jadis qui ne connaissait qu'une seule présentation élémentaire et oubliait de la confronter à la présentation avancée.

Nous sommes maintenant en mesure de préciser ce qui paraît bien être l'objet principal de la formation du maître de mathématique: *apprendre à connaître une présentation de type avancé et quelques présentations de type élémentaire se rapportant à la matière à enseigner puis savoir situer constamment ce qui se fait en classe relativement à ces deux démarches.*

Évoquons une image. Une présentation avancée est semblable à un ouvrage d'art, un pont en ciment armé, construit en une matière à la fois raffinée, durable et indifférenciée, donc susceptible de se couler dans des formes économiques. Une présentation élémentaire serait analogue à un échafaudage: plus facile à mettre en place, il tolère l'utilisation de matériaux moins élaborés, associés entre eux d'une manière plus lâche. Le professeur de mathématique est une sorte de maître d'œuvre qui unit dans une même vision la construction de l'échafaudage et celle de l'ouvrage définitif.

Il faut se méfier des métaphores. Ainsi dans notre cas, il serait abusif de considérer la présentation avancée d'une question mathématique comme un objet parfait et immuable: il existe aussi des degrés dans l'avancement des mathématiques constituées. D'autre part, il est évident que l'enseignement de type élémentaire ne débouche pas nécessairement pour tous sur une présentation avancée. La plupart des utilisateurs des mathématiques se contentent de connaissances ou de procédés qui, aux yeux du mathématicien, ne sont guère plus que des motivations intuitives.

Il n'en reste pas moins que l'art propre du maître de mathématique consiste à situer sa démarche didactique par rapport à une présentation avancée qui en garantit l'authenticité. Il bénéficie par là-même d'un surcroît de liberté dans le choix de ses stratégies et de ses motivations.

IV. DANS QUEL SENS LA FORMATION ACTUELLE DES MAÎTRES DOIT-ELLE INFLÉCHIR L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE?

Une réforme de l'enseignement mathématique, de ses programmes, de ses méthodes, de ses objectifs ne peut réussir que si les maîtres chargés de la réaliser en ont compris la portée et les tendances. Elle doit donc être précédée par la mise à jour de la formation des maîtres. On peut donc se demander: quel but cherche-t-on à atteindre demain en reconsidérant aujourd'hui la préparation des maîtres de mathématique?

On a justement reproché à l'enseignement traditionnel de s'être enlisé dans un fatras de recettes anecdotiques et de subtilités stériles qui l'apparentaient aux mathématiques amusantes. Par la suite, les programmes se sont orientés vers les présentations de type avancé et il faut bien admettre qu'ils ont délibérément cessé d'être amusants. Il est difficile d'imaginer quelque chose de plus ennuyeux que les ouvrages de mathématique moderne de la première génération. En ce qui concerne les problèmes, on atteint à peu près le paroxysme de la drôlerie en cherchent à prouver que **Z** n'est pas un groupe pour la loi "$(a, b) \to a - \sup(a, b)$".

Cette évolution était prévisible. D'abord, l'enseignement de ce qu'on a appelé les mathématiques modernes ne bénéficiait pas de cette accumulation de problèmes variés à laquelle avaient collaboré pendant des centaines d'années des mathématiciens de grande valeur. On peut observer ensuite que la richesse des problèmes attachés à un chapitre de mathématique croît avec le degré de désorganisation de ce chapitre. Il suffit de penser à la géométrie euclidienne classique d'une part et à l'algèbre des espaces vectoriels réels de petites dimensions d'autre part. Tout ouvrage de géométrie classique comporte des centaines de problèmes dont l'intérêt mathématique est quasiment nul, c'est entendu, mais qui exigent une ou plusieurs associations d'idées originales et qui impliquent une découverte de la part de l'élève. L'étude des espaces vectoriels réels de petites dimensions limitée à ce qu'il est possible et souhaitable de traiter à l'école, peut être présentée en une cinquantaine de propositions, à peine. C'est moins énorme qu'on pourrait le croire, si l'on songe qu'il faut une bonne dizaine d'entre elles rien que pour établir l'existence et les propriétés élémentaires des déterminants. Examinez maintenent les problèmes correspondants: ils sont pratiquement tous traités explicitement par l'une ou l'autre des propositions mentionnées. Cela parle en faveur de la théorie. Mais si l'on ne considère que l'intérêt que ces problèmes présentent pour les élèves, il faut reconnaître qu'ils n'exigent que très peu d'invention et qu'ils n'apportent aucune découverte. Si l'on préfère, ils ne sont guère que des exercices. On peut toutefois créer de véritables situations "problématiques". Par exemple, on peut faire une incursion vers des espaces fonctionnels qui ne sont plus de dimension finie. On peut demander de montrer ce qui subsiste de telle proposition quand on y remplace les espaces vectoriels par des **Z**–modules de type fini ou encore de prouver que telle hypothèse d'un théorème n'est pas supprimable en étudiant un contre-exemple ad hoc. En bref, on ne retrouve de vrais problèmes que dans la mesure où on réintroduit le désordre dans un chapitre initialement si bien ordonné. On encourt alors le grief fait naguère à l'enseignement traditionnel, à savoir de traiter par des méthodes qui relèvent du bricolage des problèmes qui se résolvent d'eux-mêmes dans une théorie plus élaborée.

Admettons que "faire des mathématiques", c'est essentiellement aller à la découverte, c'est augmenter par soi-même son bagage de connaissances et d'expériences mathématiques. On peut résumer ce qui précède en disant que *les mathématiques modernes de la première génération ont conduit à faire de meilleures mathématiques, mais à en faire moins.*

Pour échapper à ce dilemme, il suffit de bien vouloir reconnaître que l'apprentissage mathématique comporte deux phases. La première vise à l'acquisition de connaissances, de mécanismes automatiques. C'est une démarche de mémorisation et d'exercice absolument indispensable, qui se réfère à un fondement théorique solide et économique. Elle fait l'objet d'un enseignement systématique qui appelle des techniques appropriées comme l'étude programmée. La seconde phase est l'invitation à la découverte. C'est la mise en œuvre des facultés d'intuition, d'imagination, de comparaison, de critique devant des problèmes nouveaux. Elle requiert du maître le sens de l'improvisation et une intense curiosité de l'esprit mathématisant.

On peut me reprocher d'évoquer dans cet ordre les deux phases de l'apprentissage mathématique. La recherche ne précède-t-elle pas l'organisation des découvertes? Je m'en voudrais de ressuciter sous cette forme éminemment distinguée l'antique problème ontogonique de l'œuf et de la poule. Je désire simplement souligner que la mémorisation et l'exercice ont toujours fait partie de la formation mathématique et que la nouveauté consiste à consacrer systématiquement une partie de l'enseignement à la recherche.

Notons que l'aveu de l'existence de ce double mouvement de l'enseignement mathématique est bien plus qu'une simple concession à la pédagogie. Il revient à admettre que cet enseignement doit vivre de la vie propre de la mathématique qui, elle aussi, connaît une phase d'expansion, de découverte, et une phase de régénérescence interne à la lumière des acquisitions nouvelles. Cela revient donc à admettre que le maître de mathématique est aussi un mathématicien professionnel.

Pour en revenir à notre propos, disons que les réformes de la première génération ont eu pour but d'aligner les programmes, le contenu et les textes de l'enseignement mathématique élémentaire sur ceux des enseignements avancés. Les réformes de la deuxième génération, *sans compromettre les acquisitions déjà faites*, visent à augmenter l'activité personnelle de l'élève au sein d'une classe engagée dans des processus de recherche.

Résumons-nous:

(a) Le recrutement des maîtres, dont dépend la réussite ou l'échec de toute réforme, dépend dans une large mesure de ce qui se passe effectivement dans les classes. (b) L'art d'enseigner la mathématique consiste à équilibrer subtilement les exigences d'une présentation nécessairement élémentaire destinée à de jeunes élèves et celles des présentations avancées qui la sous-tendent. (c) L'enseignement, qui était naguère plutôt descriptif, ou si l'on préfère, normatif, doit déboucher sur des mathématiques "engagées".

Quelles conséquences peut-on tirer de là quant à la formation effective des maîtres?

Partons de notre première remarque. Il est évident que l'éveil de la vocation des futurs maîtres de mathématiques n'est pas une des tâches majeures de l'enseignement secondaire. Toutefois, si l'enseignement est organisé de telle manière que l'on ne trouve plus de jeunes qui aient envie d'enseigner les mathématiques, on ne peut vraiment plus cacher qu'il est un échec. La carrière de maître de mathématique n'est attirante ni par les perspectives de promotions, ni par les activités parallèles qu'elle comporte. Au moins peut-on exiger que le maître, loin d'être un exécutant subalterne, soit investi de l'autorité que confère une information précise sur la signification et la portée de son travail et qu'il dispose d'une véritable liberté de manœuvre dans les classes qu'il conduit. Ces conditions ne peuvent être réalisées que dans un système scolaire adéquat. Mais au-delà, c'est toute la formation du maître qui est en cause.

Pour examiner les choses de plus près, passons à notre deuxième remarque. Supposons que le candidat à l'enseignement ait assimilé une présentation de type avancé des mathématiques enseignées à l'école secondaire. Admettons aussi qu'il a reçu la préparation pédagogique habituelle. Est-il prêt à enseigner les mathématiques?

On va lui demander de se charger de quelques classes qu'il devra suivre sur une petite portion de la trajectoire de leur formation mathématique. S'il aime le confort, il lui suffit de se mettre à l'abri d'un programme et d'un manuel choisis par d'autres et d'attendre que l'année se passe en veillant que les enfants réservent dans leur cahier des marges suffisantes à droite et qu'ils ne désobéissent pas trop à la règle des signes. Mais s'il a conscience d'être un maillon dans une chaîne unique, il va s'efforcer d'exploiter et de consolider ce que ses élèves ont acquis auparavant et aussi de préparer la compréhension de ce que ses collègues aborderont à des niveaux plus élevés. Il évitera d'enfermer prématurément une notion dans des notations et des usages pédagogiquement et provisoirement commodes, mais qui en interdisent le développement ultérieur. Il saura mesurer l'écart entre l'état actuel d'une question et sa position dans une présentation plus avancée. Il aura surtout le courage de ne pas dire tout ce qu'il sait sur les questions traitées, exploit difficile entre tous.

Il est clair que pour réussir tout cela, le maître devra garder constamment devant les yeux un panorama complet des mathématiques élémentaires. Il devra pouvoir reconstituer rapidement tous les avatars d'une notion jusqu'à ce qu'elle ait acquis un statut vraiment mathématique. Pour me borner à ce que j'ai pu observer dans mon pays, bien rares sont les maîtres qui ont une telle vision, et je vois mal à quel moment de leur formation professionnelle ils ont pu l'acquérir.

Avec mon collègue Théo Bernet, nous sommes en train de mettre sur pied une réforme de l'enseignement mathématique qui ne se borne pas aux seuls programmes (sur ce point, la mise à jour se réalise par morceaux depuis de longues années déjà), mais qui vise surtout la technique d'enseignement et la formation des maîtres. Nous avons essayé de matérialiser le panorama des mathématiques élémentaires dont nous parlions tout à l'heure, pour ce qui concerne l'école secondaire générale entre la 5e et la 11e année. La mode étant aux graphes, nous avons dressé des diagrammes de flèches, diagrammes symétriques d'ailleurs. Les sommets en sont constitués par des notions appartenant aux mathématiques élémentaires. Les unes sont assez générales, comme celles de "groupe", d'"équivalence"; les autres sont plus particulières: "nombre premier", "tracés élémentaires dans le plan", "fonction logarithmique". Par souci de clarté, nous avons réduit au minimum le nombre des sommets. Ainsi, par exemple, la fiche "figures élémentaires du plan" est censée recouvrir l'étude intuitive des droites, du cercle, des polygones les plus simples. Ces sommets sont reliés par des flèches indiquant tantôt des liaisons mathématiques nécessaires comme "$\mathbf{Z}^2$ – équivalence – $\mathbf{Q}$", tantôt des connexions plus didactiques comme "équation – parties d'un ensemble". Pour des raisons de commodité, nous avons découpé le graphe total en sous-graphes. Une description plus poussée de ces diagrammes nécessiterait un exposé complet. Je me bornerai à dire que, pour mon collègue et moi, le résultat de ce travail a dépassé ce que nous en attendions. Nous avions le sentiment d'avoir une vue claire sur l'enseignement élémentaire des mathématiques, mais nous avons fait des découvertes surprenantes. D'emblée, nous avons été abasourdis de l'énormité du bagage mathématique que l'école secondaire doit transmettre à tous ses élèves, futurs universitaires ou non. Par ailleurs, nous avions centré nos sous-graphes autour de quelques notions que nous considérions comme particulièrement accrocheuses. Et nous avons eu la surprise de voir que la matière s'organisait à notre insu autour de centres que nous avions sous-estimés comme les "groupes de transformations planes" ou même de notions apparemment anodines comme celle d'"exposant".

Nous pensons que c'est l'exemple d'une documentation qui devrait être fournie aux maîtres. Elle leur permettrait de mieux se représenter les interactions entre ce que nous avons appelé les présentations de type élémentaire et les présentations avancées qui leur donnent un sens.

Formulons encore à ce propos une remarque un peu paradoxale. L'harmonisation entre les types de présentations dont nous avons parlé est particulièrement délicate au niveau des jeunes élèves. Plus l'âge des élèves croît, plus ces deux formes d'exposés se rapprochent. Il serait donc naturel d'attribuer aux plus jeunes élèves les maîtres les mieux formés. Or chez nous en tous cas, c'est exactement le contraire qui se produit: la promotion des maîtres est calquée sur celle des élèves.

Reprenons maintenant notre troisième remarque, celle qui concerne la double démarche de l'apprentissage mathématique: assimilation et découverte. Cette fois, ce n'est pas seulement le comportement local du maître qui est en cause, c'est tout le système d'enseignement. Il n'est pas question de traiter ici le problème, même superficiellement. Bornons-nous à quelques observations de bon sens.

L'introduction systématique d'une véritable activité de recherche dans le plan d'étude mathématique est de nature à modifier complètement le style de l'enseignement. Il n'est donc pas possible de s'en remettre pour tout à l'improvisation personnelle. On ne peut pas se contenter de dire aux maîtres: "Amis! Faites-nous donc un peu de recherche avec vos classes!" Nous allons considérer rapidement ce problème du point de vue des organisateurs de l'enseignement, puis du point de vue du maître et enfin de celui des responsables de la formation des maîtres.

L'organisateur doit prévoir une activité de recherche, avec ce que cela comporte d'autonomie, tout en assurant une avance normale et la coordination entre les classes et les niveaux. Une stratégie possible consiste à:

(1) Déterminer d'abord quelques *points de ralliement* où maîtres et élèves dressent le bilan des notions acquises.

(2) Réserver ensuite des périodes de *travail presque individuel* consacré à la mémorisation, à l'apprentissage du calcul, à l'acquisition de divers mécanismes. Pour l'aider dans cette tâche délicate à accomplir au sein de la collectivité d'une classe, le maître devrait pouvoir disposer de moyens techniques spéciaux qui allège sa besogne tout en améliorant son rendement.

(3) Octroyer enfin un temps largement compté à la *recherche en classe.* C'est alors la technique des situations qui s'impose: la classe est placée devant un problème susceptible d'éveiller son intérêt; les données en sont peut-être vagues ou incomplètes; la solution n'est préfigurée ni dans l'énoncé, ni dans une théorie préalable, ce qui nécessite des enquêtes, diverses tentatives et des choix critiques.

Précisons que les trois activités que nous venons d'énumérer ne coïncident pas avec ce que l'enseignement traditionnel appelle: théorie, exercices et problèmes. Ainsi, par exemple, la mise au point d'une question théorique, sa présentation axiomatique peut fort bien constituer une situation de recherche.

De plus, les organisateurs doivent évidemment préparer et maintenir à jour toute la documentation indispensable pour réaliser ce plan de travail.

Venons-en au point de vue du maître. Il a un vaisseau à conduire à bon port. Certaines étapes lui sont imposées. Mais entre deux escales, il est seul maître à bord. Il doit pouvoir choisir sa route suivant les circonstances. Une même situation peut se développer dans des directions très différentes. Par exemple, l'étude des lois de composition internes sur un petit ensemble conduira peut-être à l'invention d'une notation de type matriciel ou bien à la construction (imaginaire ou réelle) d'une machine à réaliser de telles lois. Une situation peut réussir beaucoup mieux dans telle classe que dans telle autre. Il faut savoir l'arrêter avant qu'elle ne devienne exubérante. Si elle échoue, il convient de pouvoir en choisir une autre qui aborde les mêmes choses sous un angle différent.

Comment préparer les maîtres à enseigner de la sorte? Nous avons déjà dit qu'on va exiger d'eux l'aptitude à évoluer sans contrainte dans un climat de recherche ouverte. Il faut donc commencer par les initier à la technique même des situations, afin de leur donner confiance en leurs capacités d'invention. Pour reprendre notre métaphore nautique, l'enseignement traditionnel était semblable au cabotage, le maître ne perdant jamais de vue le problème-type ou le théorème de secours. L'enseignement nouveau requiert la navigation en haute mer. Affronter un problème, c'est sortir des théories bien établies, comme nous l'avons vu. C'est même généralement quitter le cercle des mathématiques. La physique, la biologie, l'économie, le droit, la circulation routière, que sais-je, fournissent de merveilleuses situations pour la mathématisation. Le maître doit être capable de s'orienter au moins parmi les données les plus simples touchant ces domaines. La recherche didactique a fait d'énorme progrès dans cette direction depuis quelques années. Mais il faut reconnaître qu'en général la documentation élaborée ne parvient pas aux maîtres auxquels elle est essentiellement destinée. Il y a là une tâche d'information urgente, tant en ce qui concerne les nouveaux maîtres que les enseignants chevronnés.

Mais ce n'est pas tout. Les parts attribuées à la recherche, à l'acquisition de mécanismes mathématiques et à l'activité de mise au point, ainsi que leurs interactions respectives dépendent du système scolaire envisagé. Quel que soit le niveau où ils enseignent, les maîtres doivent être informés avec précision sur le plan d'étude mathématique considéré dans son ensemble.

Nous voyons donc que si l'on désire réellement renouveler l'enseignement des mathématiques élémentaires, il faut donner aux maîtres:

(a) Une vue complète sur ce que nous avons appelé le panorama des mathématiques élémentaires, avec son double aspect; ce tableau ne dépend que peu du système scolaire en vigueur.

(b) La description d'une stratégie: apprentissage de mécanismes, activité de recherche, points de ralliement; ces données caractérisent le plan d'étude mathématique propre à l'école considérée.

Cette documentation n'apparaît pas au programme des études proprement mathématiques. Elle ne figure que d'une manière très fragmentaire dans les cours ordinaires de pédagogie. Par sa nature même, elle est en constante évolution. Elle relève donc essentiellement de la formation continue.

D'autre part, le matériel nécessaire à l'enseignement par les situations ou à l'apprentissage programmé doit faire l'objet d'une prospection suivie. Ce sont les maîtres qui sont le mieux à même d'effectuer cette tâche passionnante. Nous voyons donc que la formation continue des maîtres, qui constitue certainement l'un des rouages principaux du système, ne peut se réaliser qu'avec la participation active du corps enseignant lui-même.

L'information dont nous venons de souligner l'importance comblerait une lacune entre la formation du mathématicien proprement dit et la préparation pédagogique du maître de mathématique. Cet hiatus explique pourquoi l'enseignement mathématique s'est si souvent fourvoyé en adoptant des slogans pédagogiques dénués de sérieux, tels que le "passage du concret à l'abstrait" ou la "découverte du vrai par le faux".[1] Je suis sûr que bien des faux problèmes didactiques disparaîtront quand les maîtres seront mieux initiés à la stratégie d'enseignement que nous avons évoquée. Mais pour tempérer un peu l'enthousiasme que pourraient faire naître ces considérations idylliques, il me faut signaler un obstacle majeur que doit surmonter une formation plus approfondie du corps enseignant. Si je considère ce qui se passe dans mon pays, je constate qu'une grande partie des maîtres n'a pas eu de contact récent avec une présentation avancée d'un chapitre de mathématique, ou même n'en a peut-être jamais eu. Or une règle dont la validité semble de plus en plus certaine veut qu'*une interruption de quelques années dans la formation mathématique rend impossible l'accès à un niveau supérieur d'abstraction, sauf exception remarquable.* On voit immédiatement quelles conséquences vont en découler pour la préparation du corps enseignant. Les initiateurs de la formation continue doivent savoir que si celle-ci est continue à droite de l'origine, elle est fortement discontinue à gauche, ce qui doit les inciter à une infinie patience.

V. CONCLUSION

Ce qui précède repose sur l'hypothèse que, dans leur ensemble, les maîtres de mathématique souhaitent évoluer avec plus d'autonomie dans un cadre moins rigide. Je dois avouer que j'ignore si cette condition est satisfaite. Ce que j'ai pu observer dans mon pays m'incline au pessimisme: à plusieurs reprises, il a été possible de faire figurer à l'horaire de certaines classes des leçons que le maître pouvait utiliser librement à des introductions intuitives ou des travaux pratiques: les maîtres intéressés n'ont cessé d'assourdir de leurs plaintes le ciel et les autorités scolaires que lorsqu'on leur a fourni un programme strict et ennuyeux, comme tous les programmes.

Nous voici ramenés à notre point de départ. L'enseignement mathématique d'aujourd'hui tend à attribuer un rôle plus important au maître. Ce surcroît de responsabilité ne peut s'exercer que dans une liberté accrue. Le prix de cette autonomie consiste en une meilleure connaissance des fondements de la mathématique élémentaire et des procédés d'enseignement actuels. Les maîtres d'aujourd'hui aiment-ils assez la liberté pour en payer le prix? Les futurs candidats à l'enseignement qu'ils forment maintenant seront-ils disposés à en faire autant?

De la réponse à ces questions dépend l'avenir de l'enseignement mathématique.

Riex

NOTE

[1] Cf. 'Connections between the Reform of Mathematical Education and the Further Training of Teachers', *Educ. Stud. in Math.* **1** (1968–69), 365–77.

ARTHUR ENGEL

THE RELEVANCE OF MODERN FIELDS OF APPLIED MATHEMATICS FOR MATHEMATICAL EDUCATION

Our age is one of the great ages of mankind. It confronts the teacher with an exciting challenge, the challenge to cope with rapid progress. Continuous education and continuous reform must become a way of life. Every few years you must relearn almost everything you know. In teaching we must concentrate on durable tools. What the student needs are some fundamental modes of thinking, flexibility, and a strategy for self-education. The ultimate goal of precollege education is to shift to the student the burden of pursuing his own education.

The idea of a permanent reform is a nightmare to many teachers. They still hope that the reform will soon be over and peace will return. Then at last they can teach exactly the same topics for the rest of their lives. The best teachers realize that permanent education and permanent reform are here to stay. They are willing to share the burden of pioneering work, but they are disoriented by too many contradictory proposals. There should be some guiding-star to show which way the reform should go. I propose to use the modern fields of applied mathematics as a guiding-star. This is not a fixed star, and if you follow it, permanent education and adaptation to the modern world becomes self-evident.

I believe that in the near future we will be forced to turn to applications, by the students. All great ages are times of ferment, old values are questioned. When I started my teaching career, the student asked "What" and very seldom "Why". Today he asks vehemently "Why do it?", "What is the relevance of your subject to human society?". Since the bulk of what we teach is completely useless and sometimes even harmful, we are obviously in deep trouble. The selfimposed isolation of most mathematicians and of the topics they cultivate from science, technology, and the great problems of society is responsible for much discontent among students and teachers.

The world is becoming more and more complicated. We are rapidly approaching an unbearable and even dangerous situation: Only a small fraction of the population will know what is going on and the great majority will be condemned to be merely passive spectators. Mathematics is the only subject broad enough to prevent this. Not the mathematics actually taught, but a new mathematics inspired by all fields of applications. It must be taught as *fundamental science* which provides indispensable modes of thinking and tools to cope with the real world: *the physical world*, and *the man-made world.*

Let us now look at some topics of applied mathematics and their relevance for education. The selection of topics is somewhat arbitrary. It is the spirit that counts, not the letter. I will expound the philosophy and motivation of my own teaching. I am teaching grades 5 to 13.

Applied mathematics has undergone a profound and irrevocable change because of the computer. The computer stimulated many new branches of mathematics and brought about a rejuvenation of mathematics. There is a loose unity in modern applied mathematics. All of it belongs to the broad area of *discrete combinatorial mathematics,* all its branches are computer-related disciplines.

I begin with a science of greatest scope which is a big consumer of mathematics. It is the new *science of decision making* which has a strong impact on the whole national life of every advanced nation. It is called *Operations Research* or *Management Science.*

Everyone is a decision maker. We make decisions every minute of the day, mostly small decisions with small consequences. We are guided by intuition or rule of thumb. In industry, business, government, and defence there are decision makers facing big decisions with grave consequences. For these big decision makers intuition and rule of thumb are no more adequate. During the past 20 years many tools were developed to cope with the various problems facing decision makers. These tools are known under the label Operations Research or Management Science. But Operations Research is not a collection of mathematical techniques, it is a mode of thinking. In every science we must distinguish two separate components: on one side *a mental attitude, a mode of thinking, a way of looking at the real world.* On the other side the tools used by that science. For general education the mental attitude is of prime importance, but mathematicians tend to concentrate on the mathematical tools. They consider the rest to be somebody else's business. But if mathematical tools are taught separately from their fields of application they become a useless box of tools.

Operations Research deals with *systems,* large and complex systems of men, machines, materials, and money. If the student looks around with the right state of the mind, he will see that the whole world is a vast collection of systems: economic, engineering, physical, military, biological, medical, etc.

To understand, to control, or to design a system, you must construct a model of the system. Here mathematics comes in. Applied mathematics is the art of model building.

An unknown system S can be thought of as a "black box" which accepts inputs and generates from them outputs. What tools are needed to analyse a system? The simplest and most versatile tool is a graph. Because of the great generality of their mathematical structure, graphs can be used to model any discrete system. Graphs are used extensively in all fields of modern applied mathematics. *Thinking in graphs is a fundamental mode of thinking.* It is the main part of the more comprehensive *combinatorial thinking*. Whenever a student is confronted by a system, he should start by drawing a graph of the system. He should know that a graph can be represented by a matrix. A graph is intuitively suggestive and easy to grasp. The matrix lacks this intuitive appeal, but it can be handled quantitatively, and a computer can understand it. Connectedness and path problems can be studied by matrix operations. The powers of the matrix are especially useful, for instance for Markov chains, linear automata, or linear economic models, like Leontieff models.

The usefulness of graphs can be explained by an example from *systems engineering*. This is the art of turning a conceptual system into reality. Here a new group of simple techniques under the name *CPM* (*Critical Path Method*) and *PERT* (*Project Evaluation and Review Technique*) have had far-reaching repercussions. Suppose you want to plan and schedule a large, complicated project, e.g. the construction of a bridge. Break down the programm into many individual jobs. Certain of these jobs will have to be finished before others can be started. The order relations among the jobs can be depicted by a graph whose arcs represent jobs. This graph is the basis for all further planing.

Students should analyse some projects. A good project to start with is the construction of a house. First they collect information from parents and relatives who have built houses. Then a list of jobs is drawn, starting with the making of the plans and ending with a big celebration in the new house. The order of precedence is determined, a graph is drawn and analysed.

Here is another project popular with students: You are handed a billion dollars and are told: build a tunnel under the channel. A general outline is made with rough cost estimates. Then the design is refined in several stages.

I cite another instructive example: An island is colonized by newly wed couples. All men are 25 and all women are 20. You are governor of the island. Make plans for the next 100 years. What is your biggest problem? The most formidable problem is easily overlooked. This is of course the age distribution. It results in a birth rate with a large oscillation whose period is about one generation. Only gradually these oscillations subside as the successive generations merge into each other.

In analyzing projects another point becomes clear. A single man cannot conceive, plan and implement a modern complex system. *The importance of teamwork* becomes clear, and the student works for the first time in a team. Teamwork is systematically encouraged by solving large scale problems which can be split. *Teamwork is a fundamental educational goal* grossly neglected by teachers.

The mathematical methods of Operations Research comprise the extensive field of *mathematical programming*: linear programming, dynamic programming, nonlinear programming, integer programming, and network flow theory. Few mathematicians realize that there are beautiful theorems in programming which rival in elegance results of number theory. These are often fundamental theorems, and their proofs and applications provide a paradigmatic insight into the current direction of research. These results can sometimes be reached in a few lessons, starting litterally from scratch. I will give no example since this would take away my whole lecture.

The treatment of linear programming in high school is inadequate. As a rule two-variable problems are solved in a formal way. It is ignored that *linear programming is a model building technique*. And *the purpose of a mathematical model is to provide insight, and only in the second place to provide numbers*. You have a big system, which is a complex of machines, people, facilities, and supplies. You decompose the system into a number of elementary black boxes into which flow supply and money, and out of which flow products. What goes on inside the boxes is somebody else's business. You are only interested in the rates of flow in and out of the boxes. In a linear programming model you assume that outputs are proportional to inputs. Your aim is to optimize some flow, e.g. profit or cost. With this background in mind one can turn to the purely mathematical task of optimizing a linear form subject to linear inequality constraints.

One should start with the *transportation problem*, which is a special linear programming problem. It is easy to formulate and to understand, and large scale problems can be solved by paper and pencil in a few minutes. No prerequisites beyond the arithmetic of integers are necessary. You can do these problems with 12 year olds. Starting with a feasible transportation plan one uses the *stepping stone method* for improving the plan by a sequence of iterations. The calculations involved can be split and handed to different students. Later, refinements can be introduced, like the use of potentials. In higher grades one can tackle the related area of network flow theory. Several beautiful theorems and algorithms are easily accessible.

How can we treat more adequately general linear programs? Problems with two variables present no difficulty. Teachers often overlook that problems with two constraints and any number of variables can also be interpreted in the plane. The only new concepts you need are *the convex combination* and *the convex hull* of a finite set of points in the plane.

The simplex algorithm is a modification of the Gaussian algorithm for solving systems of linear equations. It is easily explained by examples and makes the manipulation of linear systems more interesting. If you want to go further this has sweeping consequences. The usual treatment of linear algebra must be modified. It must be developed *from an algorithmic point of view.* The central algorithm is the *pivot step operation,* which is an exchange of two variables. All algorithms of linear algebra are simple sequences of pivot steps. The *Numerical Mathematics* by E. Stiefel shows how to develop linear algebra from this point of view. In the computer age this might be the right way.

Linear programming alone is not interesting enough. It must be combined with game theory. This is the most natural road to duality. To solve a matrix game you have to solve a feasible pair of dual linear programs.

Next in importance comes *Dynamic Programming* which is used to solve multistage decision problems. Here the possibilities are limited. And yet it is possible to skim off all important ideas by solving a sequence of 12 to 15 well chosen problems. When you are through the student should gain these insights:

(a) The idea of imbedding a given problem within a family of similar problems. By broadening the scope of the problem we simplify its solution. This idea has many applications inside and outside of mathematics.

(b) The idea of backward induction or recurrence.

(c) Reduction of an n-dimensional optimalization problem into a sequence of onedimensional problems.

(d) Decision-making is almost always multistage decision making. This is because time goes on and you make a sequence of decisions over time.

Discrete dynamic programming problems can always be viewed as seeking an optimal path in a network. Suppose d_{ik} is the length of the directed road connecting nodes i and k. Consider the problem of shortest paths to destination $i=0$. Let D_i be the length of the shortest path from i to 0. The node function D_i can be found by the simple recurrence $D_i=\min_{k\neq i}(d_{ik}+D_k)$ starting with $D_0=0$ at $i=0$ and working backwards. For longest paths one replaces "min" by "max" (Figure 1).

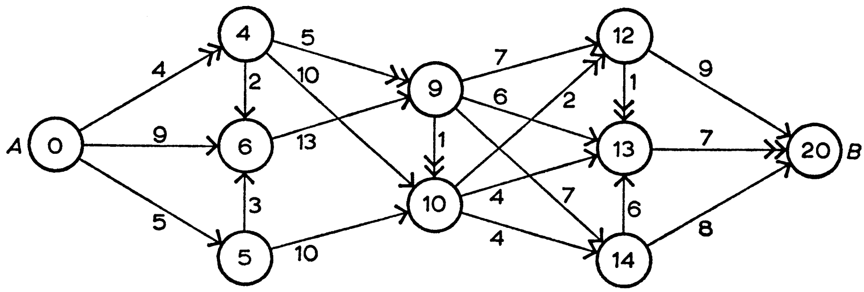


Fig. 1. [The shortest path from A to B is indicated by double arrows].

Integer programming is linear programming with integer solutions. It is not suitable for high school. But you can solve or merely discuss two problems, like cutting paper rolls and steel plates, and then show that the whole world is full of integer programming problems. It is important that the student sees problems, even if he cannot solve them. The real world is an inexhaustible source of challenging unsolved problems. But you can see the problems only if you approach the world with the right state of mind. The student sees nothing because he wears gigantic intellectual blinders, the product of a misguided education. He is hopelessly spoiled by being given only artificial problems which can be solved. These problems have no relation to the real world.

Up till now I have deliberately ignored the most crucial aspect of decision-making: *Every decision-making is Decision-Making Under Uncertainty.*

Uncertainty is more fundamental than the very special case of certainty and it is treated before the deterministic case. The first models of reality a student ever constructs are stochastic models.

You must start when the student is very young, about 11 years. Your aim should not be to teach probability as a branch of mathematics, but as a way of looking at the real world. The whole world is one big stochastic process. This is not obvious, because we have no probabilistic intuition. *Statistical thinking*, a most fundamental mode of thinking, must be developed by a long training. The student must experiment with countless random phenomena in different settings. If this intuitive background is missing, probability becomes a useless game, useless and dull, and the time wasted on it could be put to better use.

How do you start? The student first observes random phenomena and records his observations. Examples: (a) Look out of the window and record the sexes of people passing by. Ignore couples. A record might start like this: 00001 00010 1010 11101 00000 11100 11100... (1 stands for males). (b) Record cars passing by. Let 1 stand for a VW and 0 for any other car. You could get 00010 00001 00110 11010 00110 10001 10001 00010.... (c) Here is the weather record for four weeks: 0000 111 00 1 000 1111 0 111 0000000. 1 stands for a dry day and 0 for a wet day. The student records daily births, deaths, fatal accidents etc. In each case the record is a long string of digits in some alphabet.

Now we try to construct models for these phenomena. The first stage of abstraction is a *mechanical model*. The student studies *wheels of fortune* or *random digit generators*. Here are some wheels of fortune (Figure 2). They too generate long strings of digits. The decisive idea is this: Real processes can be simulated by random digit generators so closely that you cannot tell if a record was produced by some wheel or by observing the real phenomenon.

Instead of the real process you might just as well study the output of some random device. *Simulation by random digits is called Monte Carlo Method.* It is an indispensable tool of Operations Research for dealing with the complexities of the man made world.

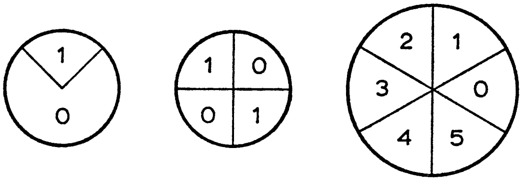


Fig. 2.

A sequence like 010110001101 ... can be interpreted as the *path of a random walk* in the plane. Start at the origin and use this coding: 0→one step to the right, 1→one step up (Figure 3). This interpretation turns probability into a dynamic subject.

If the student looks around with the right state of the mind he will see nothing but wheels of fortune turning out long strings of digits. Or, alternatively, he will see random walks everywhere.

Simulation is the best means to develop the intuitive background of probability and to learn thinking in statistical terms. It should be conducted on

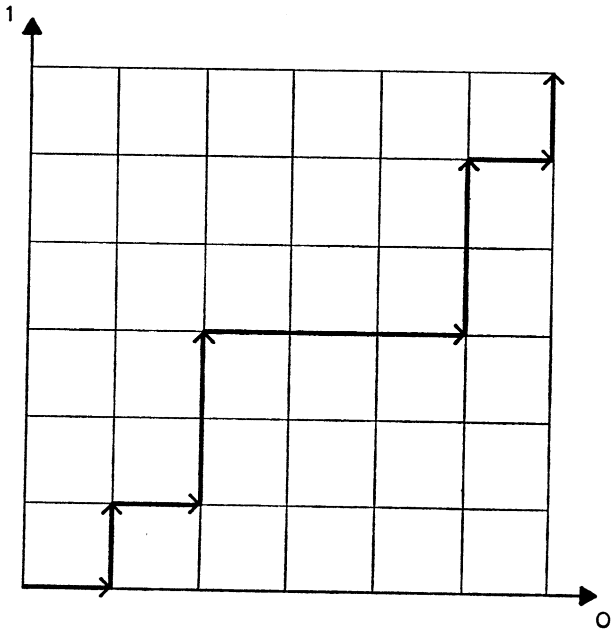


Fig. 3. The path 010110001101.

a big scale. Every student should have a table of at least 10000 random digits in base ten. Then you can start simulating economic, physical, biological, and medical phenomena. Most phenomena are not discrete, but they can be made discrete by quantization of space or time. In real life simulation is done on a computer. But a class which is organized into one team is a reasonable substitute for a computer, provided the experiments are carefully planned and each student plays his part well. Team work and design of experiments are additional valuable dividends of simulation.

There are many interesting examples suitable for simulation, for instance growth of plants, spread of rumours and epidemics. Examples from Operations Research are especially numerous: production problems, inventory problems, queues, reliability problems. Instead of discussing specific examples I will make a few general remarks:

(a) The aim of education is not to teach some theorems about some exotic structures. Rather we want to change the student, we want to influence the way he sees the real world, and the way he acts. Hence we should treat important problems, and we must show that they really are important. The student does not see this. Take for instance queues. If you look around with the right state of the mind you see queues everywhere. You wait to cross the street, you wait for the bus, the bus waits for green light. You wait in cafeteria lines, drug stores, banks, post offices, elevators, gas stations, barber shops, at the movies, in doctors and dentists offices. We are waisting a good deal of our time waiting in a line. But our time is our life. Overpopulation is increasing and queues will get longer. Hence it makes sense to study queues in the hope to master them. Now simple queues are studied by simulation: the parking lot, the dentist's office, etc.

(b) Real life data are usually not available. This does not matter. Data not available can be assumed. Take this example: In a 100 by 100 miles forest a rabies epidemic breaks out which is sustained by red foxes. You want to wipe out the disease by decimating the red fox population below the critical density. The foxes must be thinned out to the point where infected animals infect on the average less than one other animal before they die. Then the virus dies too. To simulate the problem all necessary data about the foxes and the disease are assumed.

(c) Operations Research is the most prolific source of model building situations accessible to high school students. But interesting models involve chance. This does not mean that you can treat them only after an extensive course in probability. Almost any probabilistic topic can be reached in less than six hours starting from scratch. Let us take symmetric random walk. A particle starts at the lattice point x of the line and jumps each second one unit to the right or left with equal probabilities $\frac{1}{2}$. As soon as it reaches

n or $-n$ it stays there. One is interested in two problems:

(1) What is the probability $p(x)$ of absorption in n?

(2) What is the mean time $m(x)$ to absorption?

Even if the student has never heard of probability he can solve these problems in at most two hours. After a short intuitive discussion the problems are reduced to two discrete boundary value problems: (1) Find a function p with $p(-n)=0$, $p(n)=1$ such that the value of p at an interior point x is the average of its values at the two neighboring points, i.e. $p(x)=\frac{1}{2}p(x-1)+\frac{1}{2}p(x+1)$. Such a function is called a discrete harmonic function. Obviously p is linear and hence $p(x)=(n+x)/2n$.

(2) Find a function m with $m(-n)=m(n)=0$ such that the value of m at an interior point x is by 1 larger than the average of its values at the two neighboring points, i.e. $m(x)=1+\frac{1}{2}m(x-1)+\frac{1}{2}m(x+1)$. This is a superharmonic function. One finds by simple algebra

$$m(x) = n^2 - x^2 .$$

MATHEMATICS IN THE BIOSCIENCES

Biology is the science of the future, it is the last frontier. For this reason it is important that mathematics gains firm foothold in this field. Our past record is not impressive. The area that really counts is molecular biology. Thus far physicists and chemists have been undisputed leaders in this branch of biology. The main goal of present-day molecular biology is the determination of the structure of organic molecules. There is reasonable hope that discrete combinatorial mathematics will make fundamental contributions in this area in the near future.

Let us look at some achievements of the past. I mention four names: D'Arcy Thompson, A. Lotka, V. Volterra, N. Rashevsky. Some of their work is very interesting, but it did not have a decisive impact on biology. Little of it, if any, is relevant for education.

Statistics has always been enormously successful in biology. Modern statistics is due to R. A. Fisher who developed it to tackle biological problems. Biology provides numerous interesting examples for statistics.

Mathematics has been tremendeously successful in genetics, especially in population genetics. This is an area of highest relevance for education. Everyone should study genetics before he starts practicing it. Hence it must be a part of general education. It is a subject cutting across many disciplines. The mathematics involved is highly interesting. Results of fundamental importance can be derived with little biological knowledge in a short time by use of intermediate algebra. In genetics we have a paradigm mathematical model building. It would be outright foolish not to exploit this unique topic.

Small-scale problems can be tackled as early as grade 7. For instance students are given data of twin births and their sex distribution. Here are the data for 500 successive twin births in Stuttgart: 170 bb, 174 bg, 156 gg (b and g stand for boy and girl). Estimate the proportion of identical twins.

In population genetics models are constructed which describe the changes in frequencies of various genotypes within a population from one generation to the next. I treat substantial amounts of population genetics as early as grade 8 and 9. Biological prerequisites are not necessary. I introduce a pond populated by frogs of three types AA, Aa, aa with respective frequencies u, v, w, $u+v+w=1$. The AA and Aa frogs look exactly alike, while the aa frogs look different. All the frogs die in autumn, but before they pass away each deposits two chips in a genetic pool. An AA frog deposits two A chips, an Aa frog an A and an a chip, and the aa frog two a chips. In early spring new frogs are fabricated from the pool, by sampling pairs of chips with replacement. By simple algebra you can prove that the gene frequency does not change from one generation to the next, and hence evolution is all over after one generation. This is the *Hardy-Weinberg law*, a cornerstone of population genetics. By killing the aa frogs immediately after birth you can study the elimination of a lethal recessive gene. By segregating the three types of frogs you can study inbreeding, etc. Genetic problems involve interesting mathematics, like difference equations and iterations.

I will close my lecture with a few random remarks about *Computer Science*.

Every citizen of an advanced nation is greatly affected by computers. Hence a general education should include enough information to comprehend computers at a fundamental level.

The whole mathematics course must be revised stressing *the algorithmic point of view*. An easy and very useful step in this direction are flow-charts and an informal step-by-step description of an algorithm. Lack of experience prevents me from going into more detail.

In explaining the *logical design* of computers *switching algebra* and *logic* should be introduced. The student is already familiar with related topics, like *Boolean algebra of events (sets)*, *indicator functions*, and *reliability*. Synthesis of switching systems from simple components presents no difficulty. Many successful experiences at the high school level are available.

Automata theory is a branch of logic, but it also uses extensively algebraic tools. *Turing* and *Post machines* are universal machines that can be programmed to execute any algorithm. Because of their simplicity they are relevant for education. The student can write programs for simple algorithms, or analyse programs of more complicated ones. My own experience is restricted to *linear feed-back shift registers.*

Figure 4 is an example of a shift register. Initially its registers are loaded by four binary digits (except 0000). To the beat of a clock the content of each register is shifted to the next one to the right, and the last one, which becomes empty is loaded by the mod 2 sum of the registers 1 and 2. In this

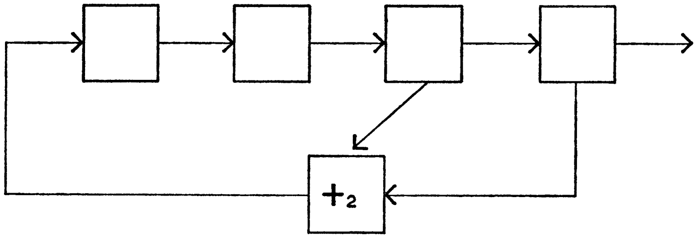


Fig. 4.

way a sequence of zeros and ones is generated. Shift registers have an amazing number of significant applications. And they have a beautiful mathematical theory based on *finite fields.* For instance all the properties of the shift register above can be unraveled by studying the "primitive polynomial" $f(x)=x^4+x+1$ over the finite field with two elements.

The importance of finite fields is increasing at a surprising rate. Their classical use for constructing *orthogonal latin squares* is well known. Latin squares are used in *designing statistical experiments.* This is a fascinating topic for high school. New applications of finite fields are to automata theory, computer technology and *Information Theory.*

The coding problem of information theory should be discussed in high-school. In fact there are two distinct coding problems.

(1) The removal of redundancy. This is a statistical problem, and it leads to the famous definition of information $H=-\sum p_i \log_2 p_i$.

(2) Protection against noise. This is a purely algebraic problem. The topic of error correcting codes is extremely interesting. Here extensive use is made of abstract algebra, like groups, rings, fields, and vector spaces. Finite fields are especially important. The central problem in this area can be discussed at an elementary level suitable for high school.

Stuttgart

BIBLIOGRAPHY

This is a small selection of high quality books and articles on the topics which are mentioned in my paper. The books are arranged in a random order, and they are provided with a short comment.

(1) M. Kac and S. M. Ulam: *Mathematics and logic, Prospects and Retrospects* (1968). New York and London, Frederick A. Praeger.

This is a brilliant masterpiece by two distinguished applied mathematicians. The interplay between pure and applied mathematics is especially well presented.

(2) *The Mathematical Sciences, a collection of essays*, edited by COSRIMS (1969). Cambridge, Mass. and London, The M.I.T. Press.

A collection of 22 essays on various branches of applied mathematics by prominent experts.

(3) *Education in Applied Mathematics. SIAM Review*, April 1967, 289–415.

This are the Proceedings of a conference on education in applied mathematics. Contains a wealth of information on modern fields of applied mathematics.

The next two books are highly to be recommended. Besides their high quality they are easy to read, they are inexpensive, and they are available in 8 languages.

(4) Hans Freudenthal, *Mathematics observed.*

(5) A. Kaufmann, *L'homme d'action et la Science.*

Both of these books appeared 1967–1968 in the World University Library. They are published simultaneously in England by Weidenfeld & Nicolson, in France by Hachette, in Holland by Meulenhoff/De Haan, in Italy by Il Saggiatore, in Sweden by Aldus/Bonniers, in Spain by Guadarrama, in the USA by McGraw-Hill, and in Germany by Kindler. Freudenthal's book touches on a wide range of applications whereas Kaufmann's book is primarily oriented toward Management Science.

The most important periodicals for mathematical programming are *Management Science, Operations Research.*

It is instructive to browse in these journals just to see the wide range of topics treated and the kind of mathematics used.

(6) Patrick Rivet: *Concepts of operational research* (1968). London, C. A. Watts & Co. Ltd.

This inexpensive little book is written for the educated layman. It is a successful attempt to describe the core of Operations Research by using little mathematics.

(7) A. Kaufmann & R. Faure: *Invitation à la recherche opérationnelle* (1965). Paris, Dunod.

This is the most interesting treatment of Operations Research. It combines brilliant exposition with a high scientific level. It is translated into many languages, among others into English and Russian. The English translation: *Introduction to Operations Research* (1968). New York, Academic Press.

(8) D. R. Fulkerson: 'Flow networks and combinatorial operations research', *American Mathematical Monthly* 73 (1966), 115–138.

A very good expository article.

The most comprehensive treatment of programming is

(9) G. B. Dantzig: *Linear programming and extensions* (1963). Princeton University Press.

German and Russian translations are available. In spite of its tremendeous scope it is not difficult to read.

A unified theory of Optimization is presented by

(10) D. J. Wilde & C. S. Beightler: *Foundations of optimization* (1967). Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall.

This is a highly original book, but unfortunately too difficult for secondary school teachers.

(11) J. C. G. Boot: *Mathematical reasoning in economics and management science* (1967). Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall.

By treating twelve self-contained topics the author shows the use of mathematics in economics. Easy to read.

(12) C. L. Liu: *Introduction to combinatorial mathematics* (1968). New York and London, McGraw-Hill.

This is a comprehensive and easy to read introduction to combinatorial mathematics, including graph theory, linear and dynamic programming, block designs, network flows, etc.

(13) A. Kaufmann: *Des points et des flèches ··· la théorie des graphes* (1968). Paris, Dunod

An easy and inexpensive introduction to graph theory. Especially to be recommended for high school teachers.

An especially lucid synthesis of games and linear programs is to be found in

(14) A. W. Tucker: 'Combinatorial algebra of matrix games and linear programms'.

This is Chapter 11 of *Applied Combinatorial Mathematics* (1964). Edited by E. F. Beckenbach. New York, J. Wiley. See also on a somewhat higher level Chapter 8 of Marshall Hall, Jr.: *Combinatorial Theory* (1967). London, Blaisdell Publ. Comp.

A very simple account of games and linear programs is also found in E. Stiefel: *Einführung in die numerische Mathematik*, Stuttgart, B. G. Teubner.

An English edition of this book is available.

(15) J. Maynard Smith: *Mathematical ideas in biology* (1968). Cambridge University Press.

A small inexpensive book, interesting and easy to read.

(16) J. F. Crow: *Genetic notes.*

A well-written introduction to elementary genetics.

(17) J. D. Watson: *The molecular biology of the gene.*

A comprehensive review of molecular genetics.

(18) R. W. Hamming: *Calculus and the computer revolution* (1968). Boston, Houghton Mifflin Company.

The ideas of this inexpensive booklet should be incorporated into every calculus textbook.

(19) W. S. Dorn & H. J. Greenberg: Mathematics and computing, with FORTRAN programming (1967). New York and London, John Wiley and Sons.

A successful synthesis of mathematics and computing on a level easily accessible to high school students.

(20) *Algorithms, computation and mathematics.* SMSG

This is another good book on mathematics and computing. The main text does not go beyond flow charts, but there is an ALGOL and FORTRAN supplement.

The next book is a monumental work on mathematics and computing.

(21) D. E. Knuth: The art of computer programming, I: *Fundamental algorithms* (1968). II: *Seminumerical algorithms* (1969). Reading, Mass., and London, Addison Wesley Publ, Comp.

The complete work will consist of 7 volumes, each about 600 pages. The author treats nonnumerical algorithms, i.e. algorithms in which the emphasis is on decision making rather than arithmetic operations.

This is the most brilliant synthesis of mathematics and computer programming on the highest level. Not for the casual reader.

(22) S. W. Golomb: *Shift register sequences* (1967). San Francisco, Holden-Day, Inc.

An interesting treatment of shift registers and their applications. Mathematically not too advanced.

(23) Gordon Raisbeck: *Information theory, a introduction for scientists and engineers,* Cambridge, Mass. and London, The M.I.T. Press.

A small inexpensive but high quality introduction to information theory.

(24) E. R. Berlekamp: *Algebraic Coding Theory* (1968). New York, McGraw-Hill Book Company.

This is a very beautiful book but on a very high level. It shows the extensive use of abstract algebra in modern communication theory.

ANDRÉ REVUZ

LES PREMIERS PAS EN ANALYSE

I. INTRODUCTION

Il est inutile de souligner l'importance de l'analyse. Contentons-nous d'en rappeler deux aspects essentiels pour l'enseignement:

(a) L'analyse est un des domaines où les différentes structures fondamentales interviennent naturellement en relation les unes avec les autres, où il est possible de mettre en valeur leur efficacité et d'apprendre à les faire intervenir à bon escient.

(b) Les applications de l'Analyse sont innombrables et il n'est sans doute pas exagéré de dire que le problème de la coordination des enseignements de Mathématique et de Physique serait résolu si l'on attendait moins pour commencer l'enseignement de l'Analyse.

Je crois qu'aucune difficulté intrinsèque ne s'oppose à ce qu'on aborde l'étude de l'Analyse beaucoup plus tôt qu'il n'est actuellement d'usage de le faire. L'obstacle essentiel est le respect d'une tradition, non formulée et par là d'autant plus pernicieuse, qui veut que l'enseignement traite les questions dans l'ordre et dans l'esprit où elles ont été abordées pour la première fois ou cours de l'histoire. L'ordre historique n'est pas souvent l'ordre le plus rationnel, et les plus vieilles méthodes sont loin d'être les plus simples ou les mieux adaptées à leur objet.

La tâche spécifique primordiale de l'enseignement est de repenser les questions fondamentales et leur exposé élémentaire à la lumière de la totalité du développement scientifique, et non de ses seuls premiers stades: il ne parait nullement utopique d'obtenir dans la plupart des domaines mathématiques des présentations simples et préparant bien l'avenir.

En ce qui concerne l'Analyse, l'usage le plus répandu actuellement est de ne l'introduire que tardivement (à des élèves de plus de 16 ans et souvent de plus de 18 ans). L'excuse de la difficulté du sujet n'est guère valable si l'on songe aux études de géométrie relativement savantes, encore que souvent mal orientées, que l'on a imposées aux élèves avant d'aborder l'Analyse.

L'influence de l'histoire ne se manifeste pas seulement par le retard avec lequel l'enseignement aborde l'Analyse, mais aussi par les erreurs de perspectives commises dans les exposés élémentaires classiques:

(a) les exposés concernant la mesure sont souvent dérivés de la théorie compliquée élaborée par les grecs; théorie que l'on présente habituellement dans un état de décomposition plus ou moins avancé, qui en conserve la maladresse mais non la rigueur.

(b) la notion de limite est présentée sans préparation adéquate, et avant celle de continuité qui est plus simple.

(c) les nombres réels sont utilisés sans que leurs propriétés aient été nettement explicitées.

(d) les premières fonctions étudiées sont des fonctions algébriques (polynômes et fractions rationnelles) qui ne sont sans doute pas les plus simples à tous les points de vue.

(e) on traite la différentiation bien avant l'intégration, en mettant l'accent sur la première plus que sur la seconde qui n'intervient que par l'intermédiaire des primitives.

Au lieu de se tourner constamment vers le passé, à chaque niveau l'enseignement doit, tout en fournissant des idées et des méthodes immédiatement utilisables préparer ce qui sera traité aux niveaux supérieurs. A cet égard un *enseignement d'initiation à l'Analyse est souhaitable et possible dans le premier cycle du second degré* (élèves de 10–11 ans à 14–15 ans), et je voudrais dans ce qui suit en esquisser les grandes lignes. Le présent exposé tient compte d'une part des expériences menées par le Département de la Recherche Pédagogique de l'Institut Pédagogique National à l'occasion du changement progressif de l'enseignement mathématique dans le premier cycle du second degré qui va commencer en octobre 69 par la mise en vigueur d'un nouveau programme dans les classes de sixième (élèves de 10–11 ans), d'autre part des études faites par l'IREM de Paris en vue d'éclairer les transformations ultérieures. Il s'agira ici d'indiquer les objectifs et quelques idées sur des progressions possibles: il est bien entendu que le contenu doit être réparti sur quatre années d'enseignement et que bien des répartitions différentes et également valables entre ces quatre années peuvent être envisagées.

Les objectifs sont d'une part de fournir un matériel minimum: matériel numérique (les nombres réels) et matériel fonctionnel (des fonctions simples et des espaces de fonctions simples), et d'autre part de familiariser avec le rôle des espaces vectoriels et de l'approximation (c'est à dire sous une forme plus savante, des aspects algébriques et topologiques de l'Analyse). La notion d'approximation apparait dans toute opération concrète de mesure et dans tout calcul numérique même très élémentaire (l'ensemble des décimaux est un anneau et non un corps!): il est assez piquant de constater qu'elle est cependant passée sous silence par l'enseignement élémentaire qui feint de ne pas la voir quand il la rencontre et qui donnant à ses élèves des idées fausses sur l'exactitude des calculs, leur ferme l'esprit et rend ainsi artificiellement difficiles les notions de base de l'Analyse.

Un autre préjugé aux conséquences néfastes consiste à considérer que les mathématiques fournissent, non pas des modèles plus ou moins adéquats de la "réalité", mais une description authentique de cette réalité: la conséquence en est qu'on privilégie implicitement un modèle au détriment d'autres qui peuvent être intrinsèquement plus simples et rendre les mêmes services dans certaines situations, et qu'on ôte à l'esprit la liberté dont il a besoin pour aller de l'avant et imaginer d'autres modèles.

On peut proposer, pour l'enseignement d'initiation à l'Analyse trois lignes d'attaque:

(a) élaboration de l'outillage numérique;

(b) édification d'une théorie élémentaire de la mesure;

(c) étude de quelques types de fonctions simples et d'espaces de fonctions.

Il faut souligner tout de suite que ces trois sujets ne doivent pas être considérés comme indépendants les uns des autres mais que chacun d'eux, et surtout le second, peut et doit fournir aux autres des motivations et des applications. Chacun donne d'autre part de nombreuses occasions de développer le thème de l'approximation.

II. ÉLABORATION DE L'OUTILLAGE NUMÉRIQUE

Au cours de la 1ère année (classe de sixième), les élèves prennent contact avec les opérations ensemblistes et rencontrent des exemples de relations et d'applications. La notion d'entier naturel est rattachée à celle de bijection (entre ensembles finis).

(1) Partant de l'ensemble **N** des entiers naturels muni de ses deux opérations et de son ordre usuel, on peut passer à l'anneau ordonné **Z** des entiers relatifs par diverses méthodes. Les deux suivantes ont été expérimentées avec succès:

(a) faire manipuler à partir de jeux divers des couples d'entiers et construire le groupe (**Z**, +) sur un quotient de l'ensemble de ces couples. Identifier **N** à une partie de **Z** (deux identifications possibles). Prolonger l'ordre de **N** à **Z**, puis prolonger la multiplication de **N** à **Z** (en lui imposant de conserver la distributivité par rapport à l'addition, ou en cherchant les endomorphismes de (**Z**, +). Cette dernière méthode apparemment plus savante a été essayée par certains professeurs et mérite d'être prise en considération).

(b) considérer un ensemble totalement ordonné, sans premier ni dernier élément, et tel qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'éléments entre deux éléments quelconques. Un tel ensemble qui peut aussi être très avantageusement utilisé pour une théorie de la longueur peut être appelé, pour cette raison, une graduation. Des bijections s'introduisent naturellement: celles qui à tout élément font correspondre le n^e qui se trouve "après", ou le n^e "avant".

L'ensemble de ces bijections muni de l'opération "composition des applications" fournit $(\mathbf{Z}, +)$, à partir duquel comme plus haut, on passera à $(\mathbf{Z}, \leqslant, +, \cdot)$. Choisissant une origine sur la graduation, on peut repérer chacun de ses éléments par un élément de **Z**. (**Z** opère fidèlement sur la graduation qui apparait comme espace homogène de **Z**.)

(2) De **Z**, on peut passer aux décimaux relatifs (ou plus généralement aux "nombres à virgule" pour une base quelconque b, 2 en particulier). Une bonne motivation en est le passage d'une graduation G à une graduation G_1 plus fine, obtenue en insérant $b-1$ éléments entre chaque couple d'éléments consécutifs de G. Itérant l'opération, on obtient le groupe additif ordonné **D** des décimaux relatifs, auquel on prolonge la multiplication de **Z**. Il faut à chaque pas, mettre nettement en lumière les propriétés des opérations que l'on définit (pour chaque prolongement, c'est la conservation des propriétés qui permet de déterminer le prolongement), et en outre, exercer pratiquement au calcul sur les divers nombres définis, en insistant moins sur la création d'automatismes qui s'établiront spontanément à l'usage, que sur le rôle que jouent les propriétés des opérations dans la technique du calcul: l'utilisation des machines à calculer de bureau s'est révélée extrêmement profitable à cet égard. Elle incite à la réflexion sur les propriétés des opérations et permet de traiter de bien plus grandes quantités de données numériques que le calcul à la main ou le calcul mental (qu'il ne s'agit pas d'abandonner, mais auquel les élèves ont spontanément recours pour les opérations simples pour lesquelles la machine n'offre pas d'aide).

On insistera dès le départ sur les structures d'ordre total de **Z** et de **D**, qui sont compatibles avec les opérations, sur la notion de valeur absolue ($|x|$ est le plus grand des deux nombres x et $-x$), sur les propriétés de cette valeur absolue (inégalité triangulaire) et sur la distance qu'elle permet de définir ($d(x, y) = |x-y|$).

Dès le départ aussi, on étudiera soigneusement la conduite de calculs approchés, l'approximation pouvant être définie par un encadrement, ou par la distance rappelée ci-dessus: on vérifira que pour toutes les opérations définies sur **D**, une amélioration de l'approximation sur les données se traduit par une amélioration de l'approximation sur le résultat, préparant ainsi l'introduction de **R** et ultérieurement des notions de continuité et de limite.

(3) L'introduction de **R** est sans doute un des obstacles qui ont le plus contribué à repousser vers les classes supérieures l'enseignement de l'Analyse. Mais même dans ces classes, si une construction de **R** (à partir de **Q** ou de **D**) était présentée (coupures de Dedekind ou suites de Cauchy) il était rare qu'elle fût intégralement développée, tandis que les élèves utilisaient en fait les nombres réels depuis plusieurs années sans avoir pris nettement conscience de leurs propriétés.

L'attitude qui paraît la plus raisonnable est sans doute celle qui consiste à renoncer à toute construction de **R**, mais en revanche à préciser les propriétés fondamentales de **R** et en fournissant la liste (que l'on résume en disant que **R** est un corps commutatif totalement ordonné vérifiant l'axiome des segments emboités) et en déduisant les autres propriétés, et en montrant enfin que **R** contient **Z**, **D**, **Q**. Les exigences que l'on émet à l'égard de **R** (c'est-à-dire les axiomes de **R**) sont facilement acceptées, si l'étude des opérations dans **D** et de l'approximation dans **D** a été faite avec assez de soin. D'autre part, ces axiomes fournissent les règles fondamentales de calcul dans **R**, d'où toutes les autres se déduisent, et il est beaucoup plus profitable de procéder à cette déduction, que d'en faire apprendre et appliquer mécaniquement les résultats. Par exemple tout ce qui concerne les "inégalités" se ramène à la compatibilité de l'ordre et des deux opérations, exprimée par les deux axiomes:

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c)\,[a \leqslant b \quad\Rightarrow\quad a + c \leqslant b + c]$$
$$(\forall a)(\forall b)\,[0 \leqslant a \text{ et } 0 \leqslant b \Rightarrow 0 \leqslant ab].$$

On peut caractériser **R** par des propriétés moins riches que celles que je propose ci-dessus, et par exemple le définir comme un groupe commutatif totalement ordonné contenant **D** vérifiant l'axiome des segments emboités, et retrouver la multiplication de **R** en cherchant les endomorphismes monotones. Ceci pourra être proposé aux excellents élèves, mais est d'une importance mineure à l'égard de l'objectif primordial qui est de donner avec **R** aux élèves un outil dont ils sachent parfaitement se servir.

III. ÉDIFICATION D'UNE THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DE LA MESURE

La théorie de la mesure n'a pas, dans l'enseignement élémentaire et secondaire la place qu'elle mérite, pour son intérêt intrinsèque et celui de ses applications. Il est possible cependant de donner un cadre unique simple pour toutes les mesures usuelles y compris les probabilités, et de préparer la voie à la théorie de l'intégration.

Les principes qui doivent présider à un premier enseignement de la théorie de la mesure me paraissent être les suivants:

(a) Résolument présenter dès le départ toute mesure comme "fonction additive d'ensemble", ce qui sous une forme plus précise s'énonce ainsi: un clan $\mathscr{A}$ de parties d'un ensemble X est une partie de $\mathfrak{P}(X)$ qui possède la propriété:

$$(\forall A)(\forall B)\,(A \in \mathscr{A} \text{ et } B \in \mathscr{A} \quad\Rightarrow\quad A \cup B \in \mathscr{A} \text{ et } A - B \in \mathscr{A}).$$

Une mesure (positive, mais on ne considèrera au début que celle-là) est une application d'un clan $\mathscr{A}$ dans $\mathbf{R}^+$ vérifiant l'une des propriétés équivalentes suivantes:

$$(1) \qquad (\forall A)(\forall B) \quad (A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B))$$

$$(2) \qquad (\forall A)(\forall B) \quad m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$$
$$m(\emptyset) = 0$$

La situation fondamentale de toute théorie de la mesure est la donnée d'un tel triplet $(X, \mathscr{A}, m)$.

Une mesure étant une application d'un clan de parties dans $\mathbf{R}^+$, nous éviterons dans la langue mathématique de parler de mesure de longueur, d'aire, etc., mais parlerons de la longueur, de l'aire, de la probabilité comme de mesures (définies respectivement sur des clans à préciser chaque fois).

Des deux notions d'additivité et de clans de parties, c'est la première qui dans la mentalité actuelle des élèves et de leurs professeurs paraît la plus facile et la plus naturelle. Mais, dès que l'on veut préciser en quoi consiste cette additivité, on est amené à dégager la notion de clan (on peut commencer par le cas plus simple où $X \in \mathscr{A}$, et où la condition relative à la différence $A - B$ peut être remplacée par la condition $(\forall A)\,(A \in \mathscr{A} \Rightarrow \complement_X A \in \mathscr{A})$).

(b) Il y a intérêt à donner de nombreux exemples de clans et de mesures, et d'exemple de mesures différentes sur un même clan.

L'exemple le plus simple et qui est fondamental, car on peut le considérer comme le germe de toute la théorie, est celui du clan des parties d'un ensemble fini avec pour mesure l'application qui à une partie attribue son cardinal. Si chaque élément est affecté d'une masse, la masse de chaque partie (somme des masses de ses éléments) fournit une autre mesure très naturelle sur le même clan. Des exemples un peu plus élaborés peuvent être obtenus à partir du clan des parties finies d'un ensemble infini.

(c) Un dangereux écueil à éviter est la confusion entre la technique de la mesure (du "mesurage") qui relève des sciences expérimentales et la conception du modèle, ou des modèles, qui rendent compte de l'activité de l'expérimentateur ou du technicien et qui servent de support au raisonnement mathématique.

C'est la tâche du physicien, plus spécialement du métrologue, de garantir que les repères d'une graduation soient "régulièrement espacés": le raisonnement mathématique est totalement impuissant à l'égard de ce problème. Il pourra effectuer des calculs à partir de nombres de repères d'une graduation, mais il n'a aucune prise sur la régularité physique de la graduation.

Le schéma mathématique d'une graduation linéaire est un ensemble totalement ordonné tel qu'entre deux éléments il n'y en ait qu'un nombre fini, modèle que nous appellerons (cf. plus haut) lui-même une graduation G. Les graduations réalisées matériellement ont toujours un premier et un dernier élément. L'idéalisation mathématique de la situation amène rapidement à considérer des graduations sans premier ni dernier élément. Sur une graduation, les parties dont la considération s'impose sont les semi-segments du type $]a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$, le clan qu'ils engendrent n'est autre que celui des parties finies de G, et sur ce clan, il existe une mesure canonique qui à $]a, b]$ fait correspondre card $]a, b]$. C'est ce qui se produit pour les longueurs (les éléments de G peuvent être les repères d'une règle graduée, les bornes d'une route, les points où les talons d'un homme qui "compte ses pas" heurtent le sol, etc.). Un exemple très concret d'une telle graduation est fourni par l'ensemble des stations d'un moyen de transport reliant un lieu à un autre, et sur le clan correspondant on peut considérer pratiquement de nombreuses mesures représentant respectivement (a) le nombre de stations, (b) le nombre de kilomètres séparant deux stations, (c) dans certains cas, le prix du transport entre deux stations, (d) le nombre de voyageurs transportés entre deux stations pendant une période donnée, (e) le nombre de voyageurs-kilomètres fournis par l'entreprise de transports entre deux stations pour une période donnée, (f) l'énergie consommée entre deux stations pendant une période donnée.

L'étude de graduations de plus en plus fines conduira à des clans de plus en plus riches et à des mesures ayant pour valeurs des nombres à virgule. La théorie élémentaire de la mesure peut être une motivation à l'introduction de ces nombres, où à l'inverse, en être une application: il me paraît difficile de trancher définitivement entre ces deux points de vue. L'essentiel est qu'au moment de la synthèse qui doit couronner l'étude, les propriétés des nombres et celles des mesures soient nettement formulées. La théorie de la longueur est étroitement liée à celle des nombres réels: c'est un avantage si l'on considère que la première fournit une motivation à la seconde, c'est un inconvénient à cause de la difficulté que peuvent éprouver certains à dissocier les deux points de vue. Aussi certains professeurs préfèrent-ils, non sans raison, ni sans succès, prendre comme premier exemple de mesure l'aire plane définie sur le clan engendré par les carreaux d'un quadrillage. L'aire est alors à valeurs entières, la loi d'additivité s'exprime aisément et le clan est aisément conçu et visualisé. Quel que soit l'ordre adopté il est en tous cas important de dégager à cette occasion la notion de mesure produit, que l'on retrouve en probabilité, où elle est le meilleur moyen de faire comprendre les notions relatives à la probabilité conditionnelle.

En ce qui concerne la notion de probabilité, je m'associe pleinement aux conclusions de la conférence de Mars 69 organisée par la Southern Illinois University et le Central Midwestern Regional Educational Laboratory, qui recommandent l'organisation d'un enseignement de probabilité aux niveaux élémentaire et secondaire. Au niveau où je me place ici, c'est-à-dire pendant les quatre premières années de l'enseignement secondaire, il me paraît indispensable de montrer que le schéma qui est à la base de l'évaluation des probabilités est le même (le triplet $(X, \mathscr{A}, m)$) que celui qui rend compte de l'évaluation des longueurs ou des aires. Cela débarrasse la notion de probabilité du halo mystérieux dont son introduction est trop souvent accompagnée. Cela n'exclut en rien la présentation d'exemples nombreux et variés, et permet de faire comprendre comment une même théorie mathématique permet de grouper des modèles variés représentant de nombreuses situations dont les aspects concrets sont extrêmement différents. On pourra se limiter à ce niveau à des probabilités définies sur des ensembles finis, mais même dans ce cadre très simple il est intéressant de dégager la notion d'application mesurable,[1] ce qui peut être fait à partir d'exemples très simples et permet d'effectuer des transports de mesure qui rendent de grands services dans la description des phénomènes et conduisent en particulier à des constructions naturelles de répartitions non uniformes de probabilité.

IV. FONCTIONS NUMÉRIQUES

Les élèves auront été familiarisés avec la notion d'application la plus générale; il y aura lieu en leur présentant les fonctions numériques, c'est-à-dire ici, les applications à valeurs réelles, de les situer dans ce cadre général et de mettre en lumière ce qu'il y a de particulier pour les fonctions numériques, c'est-à-dire la structure de l'espace d'arrivée qui permet de définir une structure d'algèbre réticulée sur l'ensemble des applications d'un ensemble E dans $\mathbf{R}$, dont la plupart des sous-ensembles intéressants en sont des sous-algèbres ou des sous-espaces vectoriels (assez souvent aussi des sous-espaces vectoriels réticulés). Considérer les fonctions comme éléments d'un nouvel ensemble a été une conquête assez difficile parce que les esprits avaient été éduqués dans une mauvaise direction, et il semble qu'aujourd'hui il n'y ait pas de difficulté et en revanche, d'incontestables avantages à le faire dès le départ.

Dans la présentation élémentaire des fonctions numériques, les points suivants méritent une attention particulière:

(a) Donnée pratique d'une fonction. Elle peut intervenir par l'intermédiaire d'une table de valeurs, d'un graphique, d'une loi permettant le calcul. Dans tous les cas se poseront des problèmes d'approximation, dont l'étude préparera très bien à la conception de la continuité.

(b) Donner des exemples variés. Outre les polynomes et les fractions rationnelles (qui sont analytiques), il y a lieu de présenter des fonctions affines par morceaux (tels les graphiques de chemin de fer) et aussi des fonctions discontinues, telles que les fonctions en escalier et les fonctions caractéristiques d'ensembles. Si l'on considère un segment $[a, b]$ avec une graduation donnée $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$, les fonctions en escalier, constantes sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ décrivent un espace vectoriel de dimension $2n+1$ (nombre que l'on peut réduire en imposant des conditions de continuité à droite ou à gauche en certains points x_i): on a là un excellent matériel de présentation d'espaces vectoriels de dimension finie. En outre, si une mesure a été définie sur le clan fini engendré par les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$, on peut facilement définir l'intégrale des fonctions en escalier relativement à cette mesure et étudier la forme linéaire positive ainsi obtenue. Les fonctions en escalier ne sont autres que les combinaisons linéaires finies des fonctions caractéristiques des ensembles du clan: on procède donc là à une linéarisation de la mesure qui permet le passage du caractère additif de la mesure au caractère linéaire de l'intégrale. La technique est très simple pour n petit, mais on a le germe, et les propriétés de base de l'intégration.

L'intégrale indéfinie correspondante est une fonction affine par morceaux. L'étude de son lien avec la fonction en escalier permet de procéder à des calculs de différences qui conduisent (comme ils ont conduit Leibniz!) au calcul différentiel.

Rien de ce qui est proposé dans ce qui précède n'est très révolutionnaire: une bonne partie en a déjà été expérimentée dans de nombreux pays. La mise au point de ce qui ne l'a pas encore été, ou ne l'a été que de façon restreinte ne présente pas de difficulté: la matière est riche, les exercices ayant une origine concrète et un intérêt théorique ne manqueront pas, non plus que les triplets "situation, modèle, théorie". Le problème essentiel est celui de la mise en application généralisée: elle est conditionnée par la publication de documents étudiant le détail des théories et les manières de les présenter, mieux de les faire découvrir par les élèves.

C'est une des tâches importantes de l'enseignement mathématique actuel, et une de celles auxquelles, en particulier, les IREM créés ou à créer en France devront consacrer une part importante de leurs efforts.

Paris

NOTE

[1] Le mot n'est pas très heureux, mais il n'est pas aussi catastrophique que celui de variable aléatoire qui est à proscrire dans l'enseignement élémentaire, et peut-être même au-delà.

A. MARKOUCHEVITCH

CERTAINS PROBLÈMES DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE

1. Le problème principal, qui domine tous les autres – c'est le problème du contenu des études: quelles sont les mathématiques qu'il faut étudier à l'école générale aujourd'hui? Ce problème peut être résolu sans difficulté dans les écoles de spécialisation mathématique où les élèves se préparent à continuer leur études mathématiques au niveau universitaire. En fin de compte il s'agit, dans ce cas, pour le maître d'école et le professeur d'université, de se mettre d'accord sur la répartition du temps et du travail voué à une même tache – la formation d'un mathématicien professionnel. Le choix même des matières à étudier dans une école de ce type, l'organisation de ces matières dans un système cohérant, et leur présentation aux élèves se déterminent alors par les nécessités de la profession de mathématicien.

Mais il est autrement important du point de vue social, et à la fois bien plus difficile, de bâtir un cours de mathématiques en considérant celles-ci comme élément de la culture générale de l'homme moderne, indépendamment de sa position sociale et de sa profession. Cette tâche est alors d'une importance centrale dans la mesure où sa solution rationnelle créera des conditions favorables à la révélation et au développement des vocations mathématiques dans toutes les couches sociales de la jeunesse et, par conséquent, à leur orientation professionnelle vers les mathématiques et leurs applications.

La solution de ce problème central présuppose non seulement une analyse détaillée et une évaluation des mathématiques d'aujourd'hui, de leurs perspectives de développement, de leur place parmi les autres sciences, de leur rôle dans les diverses branches de l'activité humaine, mais aussi l'étude de l'effet des idées et des méthodes mathématiques sur la personnalité de l'élève – son esprit, sa volonté, son caractère, sa capacité d'effectuer un travail organisé et orienté vers un but précis.

Evidemment, des problèmes de ce genre ne sont pas nouveaux, ils se posaient déjà, par exemple, pendant la deuxième moitié du 19ième siècle au cours de la querelle entre les adeptes des études "classiques" et les adeptes des études "scientifiques modernes". Mais dans le monde d'aujourd'hui les mathématiques occupent une place relativement bien plus importante qu'à toute époque antérieure. Nous pouvons nommer trois aspects d'importance fondamentale pour le problème considéré:

(a) l'essor sans précédent des idées et des méthodes mathématiques qui se manifeste dans le développement des théories classiques telles que la logique mathématique, l'algèbre, la topologie, l'analyse fonctionnelle, les équations différentielles, la théorie des probabilités, ainsi que l'apparition de nouvelles disciplines, liées aux nouvelles branches d'application des mathématiques (théorie de l'information, théorie des graphes, théorie des jeux, programmation linéaire, programmation dynamique etc.),

(b) l'utilisation croissante des ordinateurs qui permettent la solution numérique de problèmes aussi complexes que l'on veut, et qui rendent sensibles les plus larges couches de la population aux succès de la théorie mathématique,

(c) la mise en valeur des principes et des conceptions générales, la systématisation de l'immense accumulation de connaissances mathématiques, qui permet de s'orienter sans difficulté dans cette richesse de faits et d'idées.

Ce qui a été dit, explique pourquoi les chercheurs de même que les enseignants et les psychologues, en nombre croissant, travaillent, avec espoir de succès, pour tracer un nouveau chemin – je ne dirais pas "royal", car ce concept a vieilli aujourd'hui, mais plutôt un nouveau chemin "pour les enfants" vers les trésors de la pensée mathématique.

2. Mais les questions essentielles: quelles doivent être les matières à aborder dans le cours de mathématique de l'école générale, quelle doit être leur place dans la structure du cours, quel degré de généralité et de profondeur doit caractériser leur étude et, enfin, à la lumière de quelles idées fondamentales doivent-elles se présenter aux élèves – toutes ces questions essentielles n'ont pas de réponse unique. En sus, les réponses sont influencées par le but poursuivi par l'éducation générale du pays en question, ainsi que par les formes sous lesquelles l'éducation se présente. Sans chercher à faire une liste complète des facteurs susceptibles d'influencer les réponses aux questions ci-dessus, je me borne à mentionner le choix de la conception philosophique selon laquelle on envisage la science mathématique. Nous sommes tous d'accord qu'il existe une différence essentielle entre le point de vue du mathématicien convaincu par l'idée que les mathématiques n'ont rien à voir avec la réalité (par exemple Brouwer d'après Heyting: Les mathématiques pures sont une création libre de la raison et non liées à l'expérience) et la conception des mathématiques comme science des relations quantitatives ("relation" dans le sens philosophique) les plus générales du monde réel (Engels).

Dans ces conditions, il est impressionnant de constater que les chercheurs et les enseignants de divers pays arrivent à des conclusions très proches sur les questions primordiales.

Tout d'abord, on s'accorde, avec plus ou moins de résolution, à rejeter les limitations imposées aux mathématiques scolaires par le cadre des mathématiques dites "élémentaires". Celles-ci comprennent, comme on le sait, des thèmes tels que l'étude approfondie des méthodes arithmétiques de solution de problèmes algébriques (sans se servir explicitement d'équations), les constructions géométriques avec des moyens limités (compas et règle sans graduations, compas seul, règle seule, etc.), géométrie du triangle (et du tetraèdre), transformation d'expressions à l'usage des calculs logarithmiques, équations logarithmiques, exponentielles et trigonométriques, étude des variations d'une fonction et représentation graphique (sans utilisation de dérivées), calcul des aires et des volumes (sans utilisation d'intégrales), etc. On voit ainsi que dans la majorité des cas il s'agit de résoudre un problème d'un intérêt certain sans se servir des moyens les plus naturels, qui sont, en général, beaucoup plus efficaces. On peut donc qualifier les mathématiques traditionnelles comme étant, dans une certaine mesure, les mathématiques des limitations artificielles, les mathématiques de toutes sortes de tabous, tabous qui ont depuis longtemps perdu leur signification, quoique leur portée historique soit bien claire. Pour ne pas être injuste, il faut tout de même remarquer que certains de ces thèmes ont joué un rôle considérable dans le développement de la science et ont enrichi les mathématiques par des idées fécondes. A titre d'exemple il suffit de mentionner l'histoire des constructions à l'aide de la règle et du compas. Néanmoins il est clair que aujourd'hui il n'y aucune raison de bâtir le cours de mathématiques s'adressant à la totalité des élèves, avec des matériaux de ce genre.

Voici donc la première partie générale du programme de presque tous les scientifiques et enseignants qui s'occupent de la rénovation de l'enseignement des mathématiques. Elle a, pour ainsi dire, un caractère négatif, car elle montre ce qu'il faut restreindre ou totalement éliminer dans le cours scolaire. Evidemment, les propositions de ce genre ne sont pas nouvelles. Dans leur essence, elles étaient déjà presentées au début de notre siècle par F. Klein et ses collaborateurs. Néanmoins, les positions des mathématiques élémentaires traditionnelles restaient fortes dans un grand nombre d'écoles. Ceci est le cas, par exemple, pour l'enseignement mathématique à l'école soviétique. Mais, sans doute, on peut constater le même état de choses dans les écoles d'autres pays.

De toute façon J. Dieudonné, dans la préface de son livre *Algèbre linéaire et géometrie élémentaire*, ne cesse de s'indigner que les lycées en France accordent une place importante à des sujets tels que:

(1) La construction "à la règle et au compas".

(2) Les propriétés des "figures" traditionnelles, telles que le triangle, toutes sortes de quadrilatères, cercles et systèmes de cercles, sections coniques.

(3) Les "formules trigonométriques" et leurs transformations kaléido-

scopiques, qui donnent la "solution" de "problèmes" qui se rapportent aux triangles, au cas échéant même à l'aide de "calculs logarithmiques".

C'est à F. Klein que remonte également la partie positive du programme du renouveau, partie qui stipule ce qu'il faut inclure dans le cours scolaire de mathématiques. Mais si le programme de Klein se limitait aux seuls noms de Descartes, Leibniz et Newton et se rapportait donc au 17ième siècle (éléments de géométrie analytique et d'analyse), la liste des mathématiciens d'il y a trois siècles se complète alors par les noms de Pascal et de Jacob Bernoulli (éléments de la théorie des probabilités) et d'autre part – ce qui est essentiel – il s'y ajoute des noms du siècle dernier: Grassman et Hamilton (vecteurs) et G. Cantor (ensembles). Du 20ième siècle on ne garde que le point de vue général, en dépendance plus ou moins étroite de l'esprit et de la lettre du traité de Bourbaki. Par ailleurs, le nouveau programme de mathématiques à l'école soviétique, grâce à l'initiative du président de l'académie des sciences de l'URSS M. V. Keldyš, comprend l'étude des principes directeurs des machines électroniques, ce produit typique du milieu du 20ième siècle.

3. L'insuffisance des principes généraux mentionnés plus haut pour la résolution concrète des problèmes du contenu et de la structure du cours scolaire apparaît clairement si l'on examine le cours de géométrie. Il s'agit là d'un problème des plus aigus et des plus difficiles. Dans son contexte se trouvent concentrés, comme dans le foyer d'une loupe, les difficultés des interrelations entre les données de l'expérience physique et les propositions abstraites, entre l'intuition et la logique, entre la science classique et moderne.

Une vieille légende bien connue raconte comment Euclide niait l'existence d'un "chemin royal" en géométrie, chemin qui mènerait à la connaissance des mathématiques plus rapidement et plus facilement que le chemin proposé par ses *Éléments*. Clairaut et Legendre au 18ième siècle firent un essai fructueux pour rendre plus facilement abordable aux enfants cette route éclairée par la tradition. Mais ce n'est qu'avec F. Klein et son "programme d'Erlangen" qu'une nouvelle route de l'étude géométrique est devenue possible, route qui ouvre de larges perspectives nouvelles et amène une révalorisation du contenu de la géométrie. De ce nouveau point de vue, les objets principaux considérés en géométrie ne sont plus telles ou telles figures, remarquables par la simplicité de leur structure, comme c'était le cas chez Euclide, mais ce sont les transformations géométriques.

D. Hilbert dans ses *Fondements de la géométrie* perfectionna d'une façon définitive l'idée d'Euclide et par son système d'axiomes parvint à convaincre les professeurs de mathématiques qu'un cours bâti à partir de cette base axiomatique était trop complexe et donc inutile à l'école.

En même temps, l'axiomatique d'Euclide-Hilbert, basée sur les concepts de longueur, d'angle et de triangle "cache parfaitement", comme l'exprime G. Choquet, "la structure vectorielle de l'espace". Dans son essence, cette structure vectorielle peut être retrouvée dans l'interprétation arithmétique de la géométrie proposée par Hilbert lui-même. Mais elle a été mise en valeur explicitement tout d'abord, semble-t-il, par H. Weyl. C'est justement dans la découverte de la structure vectorielle de l'espace euclidien, dans les notions d'espace vectoriel et de produit scalaire que Choquet, dans son livre *L'enseignement de la géométrie* voit la "route royale" en géométrie. Mais il croit que ces concepts "ne peuvent être 'parachutées' sans préparation", et par conséquent, il commence par les axiomes d'incidence et d'ordre, étudie ensuite les axiomes de structure affine, puis de structure métrique pour introduire le produit scalaire.

C'est sur le chemin, proposé par Choquet (ses premières propositions remontent à 1959), que s'engagea avec enthousiasme et une conviction passionnée le talentueux mathématicien et pédagogue belge G. Papy. Papy considère le concept d'espace linéaire vectoriel comme concept fondamental du cours scolaire de mathématique dans sa totalité et propose déjà en classe de 3ième (numération française) la définition générale de la dimension d'un espace vectoriel. J. Dieudonné, souvent cité par Papy, est à la fois plus radical et plus modéré.

Radical lorsqu'il considère, tout en admirant l'ingéniosité et le bel esprit de Choquet, que le système d'axiomes de celui-ci, étant un compromis entre "l'échafaudage" élevé par Euclide et Hilbert et l'axiomatique nue de l'algèbre linéaire, reste "parfaitement inutile et même nuisible". Il remarque que des disciplines telles que la "géométrie pure", la "géométrie analytique", la "trigonométrie", la "géométrie projective", etc., ne sont que des masques sur le visage d'une même science – l'algèbre linéaire, et c'est celle-ci qu'il veut voir couronner le cours de mathématique à l'école. De ce point de vue son axiomatisation de l'espace euclidien de dimensions 2 et 3 se présente comme celle d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (soit 13 axiomes en tout, y compris l'axiome qui détermine la dimension).

La modération de Dieudonné se manifeste avant tout lorsqu'il trace la ligne de démarcation entre l'école et l'université au niveau de l'espace à trois dimensions. D'autre part, il ne rapporte ses propositions qu'au deux ou trois dernières années du lycée. En ce qui concerne le cours dans les classes moyennes (à partir de la 6ième en numération française), il propose d'y faire connaître les idées et les faits géométriques au niveau de la "géométrie physique" et d'étudier quelques enchaînements déductifs relativement courts, sans chercher à ramener toutes les idées et les faits à un petit nombre de positions fondamentales. Ce genre d'étude doit préparer l'étude de l'algèbre linéaire. Ces considérations nous semblent convaincantes. Nous n'aurions aucune objection aux idées du célèbre auteur s'il n'adressait son cours qu'aux futurs mathématiciens. Mais il souligne avec force que l'étude des mathématiques dans le second cycle ne poursuit pas le but de former des futurs mathématiciens: ni même des futurs professeurs de mathématiques. Le malheur, c'est que l'auteur est forcé d'admettre que son livre (qui ne contient, d'ailleurs, aucun croquis) n'est accessible qu'à un bachelier sur mille. Nous sommes donc encore très loin de la solution du problème dans cette direction.

4. Je voudrais consacrer cette partie de ma communication à quelques problèmes du contenu du cours de mathématiques scolaires en URSS. Je suppose qu'un congrès sur l'enseignement tel que le nôtre n'a pas tellement pour but la recherche d'une solution unique valable pour tous les pays: mais avant tout la possibilité de se convaincre en toute objectivité du droit d'existence de différents points de vues et de solutions diverses. De nos jours il se passe dans l'enseignement quelque chose d'analogue à ce qui se passait en mathématiques au milieu du siècle dernier, lorsqu'on a progressivement compris qu'il ne doit pas rejeter catégoriquement des systèmes géométriques différents de celui d'Euclide et que la science se trouve enrichie par le remplacement du mot "géométrie" au singulier par le mot "géométries" au pluriel. Néanmoins, contrairement aux géométries fixées d'Euclide, de Lobačevsky-Bolyai ou de Riemann, qui s'écroulent si l'on modifie les axiomes à leur base, les points de départ et les postulats à la base de l'éducation dans un pays déterminé ou dans un groupe de pays peuvent changer et évoluer, permettant ainsi le progrès des systèmes scolaires. Un des moyens les plus efficaces pour stimuler ce progrès est l'échange d'expériences entre pays. Voilà pourquoi un tel échange a une importance non seulement théorique, mais aussi pratique; voilà pourquoi il est nécessaire, même en discutant une question aussi spéciale que l'enseignement des mathématiques, de pendre en considération les conditions générales sous-jacentes à la solution du problème dans le pays en question.

En Union Soviétique les nouveaux programmes pour toutes les matières du cours scolaire ont été élaborées à partir de décembre 1964 par une grande commission qui s'occupait du contenu de l'enseignement et qui groupait plus de 500 chercheurs, personnalités culturelles, et enseignants. Cette commission, qui travaillait sous ma présidence, devait réévaluer le contenu de l'enseignement scolaire en prenant en considération l'introduction dans le pays entier de l'éducation secondaire complète obligatoire de 7 à 17 ans. Une attention spéciale était accordée à la correspondance entre l'enseignement scolaire et les progrès de la science, de la technique et de la culture.

Cette position du problème impliquait une grande responsabilité et des difficultés énormes. Dans la richesse des idées et des faits, il s'agissait de choisir ce qui est nécessaire à chaque individu participant au développement social, indépendamment de sa profession, mais tel qu'il suffit pour que l'élève, ayant quitté l'école, soit capable, dans le délai le plus bref, de s'initier à une des professions de masse ou bien de continuer ses études au niveau supérieur.

Pour ne pas créér des difficultés supplémentaires à l'introduction de l'éducation secondaire obligatoire complète, la commission décida de conserver la durée de scolarisation à son niveau actuel, c'est-à-dire 10 ans (de l'âge de 7 à 17 ans).

Pour comparer notre école aux écoles occidentales, par exemple à l'école française de 12 ans, où les études commencent à 6 ans, il faut prendre en considération le fait que nous avons 6, et non pas 5, jours de classe hebdomadaires. Par conséquent notre écolier a, grosso modo, le même nombre de jours de classe que l'écolier français en 12 ans, bien qu'il quitte l'école un an plus tôt.

Se basant sur les recherches entreprises depuis de nombreuses années par les psychologues et les pédagogues, la commission a proposé de réduire la durée de l'école primaire de 4 à 3 ans, en regroupant d'une manière correspondante les matières du programme et en conservant le niveau terminal de l'école primaire. Cette réduction de durée ouvre les portes de la quatrième (les enfants de 10 ans) au professeur diplômé (d'études supérieures pédagogiques, en particulier d'études supérieures mathématiques).

Avec la durée totale invariante de 10 ans, les matières enseignées après l'école primaire pendant 6 ans (de la 5ième à la 10ième) se répartissent maintenant sur un intervalle de 7 ans (de la 4ième à la 10ième).

Il en résulte que certaines matières se trouvent déplacées de la classe supérieure à la classe inférieure, déplacement parfois d'un an et demi. Par exemple, les nombres négatifs qui faisaient jusqu'à présent leur apparition au second semestre de la 6ième, vont être introduits au premier semestre de la 5ième. Il est bien entendu que de tels déplacements ne s'effectuent pas d'une manière mécanique, ils sont accompagnés par les changements nécessaires dans le système et le style d'exposition. Restant fidèle à l'idéal de l'éducation générale, la commission n'a pas cru possible d'établir des classes specialisées telles que cycles "arts et lettres" ou "sciences naturelles et mathématiques", mais elle a élaboré un seul programme obligatoire pour tous les élèves, portant sur les disciplines humaines, les sciences naturelles et les mathématiques.

En même temps, pour favoriser l'éveil et le développement des intérêts individuels et des capacités particulières des élèves, le nouveau programme propose, dans toutes les classes, à partir de la 7ième (14 ans), des cours facultatifs supplémentaires au choix. Ces cours, ainsi que toute une tradition de formes d'études scolaires et extra-scolaires variées, permettent de réaliser une certaine différentiation dans l'enseignement. Il est néanmoins nécessaire de souligner ici au moins trois considérations qui font contraster cette forme de différentiation avec les formes de différentiation rencontrées couramment dans les écoles du pays de l'Ouest.

Premièrement, les élèves qui ont choisi des cours facultatifs différents, continuent leurs études dans une même classe, de sorte que les jeunes mathématiciens et physiciens, chimistes et biologistes, littéraires et historiens, peintres et techniciens travaillent tous ensemble pendant les cours obligatoires pour tous.

Deuxièmement, les cours facultatifs, même dans les deux dernières classes, où 6 heures hebdomadaires leur sont consacrées, n'occupent pas plus de 20% du volume total des cours communs à tous les élèves.

Troisièmement, les connaissances requises aux examens d'entrée en faculté se basent seulement sur les connaissances et les mécanismes enseignés dans le programme obligatoire de l'école secondaire. Mais il est naturel que ceux parmi les élèves, qui, pendant plusieurs années, suivant leur vocation, ont travaillé les mathématiques en cours facultatifs, auront un avantage de fait aux examens d'entrée, disons en faculté physico-mathématique des universités.

Il reste à ajouter, que toutes les propositions de la commission, le nouvel emploi du temps scolaire, les projets de nouveaux programmes pour toutes classes et toutes les matières ont étés acceptés – après de longues discussions dans les milieux scientifiques et pédagogiques, ainsi que dans la presse spécialisée et dans la grande presse – avec des rectifications, des amendements et additifs nécessaires, puis sanctionnés, par le ministère de l'éducation de l'URSS.

Au fur et à mesure de la préparation des manuels et des livres spéciaux pour les enseignants, ces programmes seront mis en vigueur dans les écoles. Le processus de passage aux nouveaux programmes doit prendre fin en 1975.

Tout le travail relatif à la rédaction des programmes de mathématiques et à l'étude des nouveaux manuels est effectué par une sous-commission présidée par l'académicien A. Kolmogorov. Je voudrais m'arrêter plus spécialement à quelques traits essentiels en liaison étroite avec les particularités de l'école soviétique d'aujourd'hui mentionnée tout à l'heure.

Tout d'abord il faut souligner la place importante que notre école consacre aux cours de mathématiques. Ces cours ont lieu une fois par jour pendant 10 ans (à l'exception des deux classes terminales, où un jour par semaine est libre de cours obligatoires en mathématiques). En ce qui concerne le choix des matières enseignés, les auteurs du programme ont accordé leur préférence aux questions les plus générales, qui contribuent à universaliser la culture et dont l'étude aide à la formation d'une philosophie scientifique et permet de comprendre le rôle des mathématiques dans le système des sciences et dans l'activité pratique de l'homme. C'est pour cette raison que dans les classes terminales, par exemple, les éléments d'analyse et les vecteurs occupent une place prépondérante. Malheureusement, les éléments de la théorie des probabilités n'ont pas trouvé une place dans le programme des cours obligatoires et ont été renvoyés aux cours facultatifs. Les éléments d'analyse combinatoire étudiés en classe de 9ième en forment la base nécessaire.

Je voudrais attirer votre attention à l'introduction assez précoce des éléments d'analyse – à partir de la 9ième (élèves de 15 à 16 ans), rendue possible par le déplacement de certaines matières de la façon déjà expliquée.

Nos programmes ne contiennent pas de thèmes qui se rapportent explicitement aux notions générales de la théorie des ensembles, à la logique mathématique et à l'algèbre. Ceci ne veut pas dire que nous n'y accordons pas d'importance, mais seulement que nous ne croyons pas nécessaire d'inclure ces notions dans le cadre des examens. Dans les nouveaux manuels ces notions sont introduites progressivement, en quantité assez restreinte, il est vrai. Ces limitations se rapportent tout aussi bien au symbolisme. Nous ne croyons pas que le symbolisme mathématique moderne, important pour le spécialiste, soit nécessaire à la culture générale de l'individu. L'expérience montre que cette langue est rapidement et facilement assimilée par ceux qui choisissent de faire des mathématiques leur profession. Il n'est donc pas nécessaire de commencer son étude à un âge trop jeune, lorsque la vocation et les intérêts de l'enfant ne se sont pas encore manifestés.

Comme exemple de concepts généraux de la théorie des ensembles et de la logique, notons, dans le nouveau manuel de la classe de 4ième (pour les enfants de 10 ans), les notions d'ensemble, d'élément, de sous-ensemble, d'ensemble vide, de relation d'appartenance et d'inclusion, d'opérations de réunion et d'intersection, avec les symboles correspondants. En même temps les notions de proposition ouverte et fermée sont explicitées. A partir de la classe de 6ième on emploie, en algèbre et en géométrie, les symboles d'implication ($\Rightarrow$) et d'équivalence logique ($\Leftrightarrow$); la négation d'une proposition est également symbolisée. Dans cette même classe de 6ième le cours de géométrie familiarise les enfants avec certaines propositions admises sans démonstration et avec le rôle des axiomes, des définitions et des théorèmes dans la structure logique des mathématiques. Dans son projet de manuel de géométrie pour les classes de 6ième–8ième, l'éminent géomètre soviétique

A. Pogorelov a dressé une liste de 12 axiomes pour la géométrie plane, dont deux axiomes pour la mesure des segments et des angles.

Les auteurs des nouveaux programmes se sont servis, avec beaucoup d'égards, de l'expérience d'un demi-siècle d'enseignement mathématique à l'école soviétique, enseignement qui a permis d'obtenir des résultats satisfaisants sur une grande échelle. Suivant une tradition qui s'est avérée payante, nous continuons à insister sur l'assimilation complète des techniques essentielles, sur la capacité d'effectuer sans erreurs les calculs arithmétiques et algébriques, sur le développement de l'imagination spatiale. Pour atteindre ces buts, un entraînement systématique et prolongé des élèves à la résolution de problèmes et d'exercices judicieusement choisis est nécessaire.

Le programme prend en considération les liaisons variées de la mathématique avec la physique, la chimie, la géographie physique, le dessin industriel, la formation professionnelle. Nous croyons fermement que certaines notions mathématiques doivent être préalablement considérées dans les leçons de physique (les vecteurs, ou la dérivée considérée tout d'abord comme vitesse d'un mouvement rectiligne quelconque) et que certains problèmes physiques doivent être traités en cours de mathématiques (par exemple, les oscillations harmoniques). Une place considérable du programme est réservée au développement de la rationalisation de la technique des calculs, jusqu'à la compréhension des principes de l'usage des ordinateurs. À la fin de 10ième l'étude des systèmes d'équations et d'inégalités permet la démonstration, sur quelques exemples, de la solution de certains problèmes économiques qui se rapportent à la programmation linéaire.

5. En conclusion, quelques mots sur un des aspects de l'enseignement mathématique auquel les mathématiciens n'accordent généralement pas l'attention qu'il mérite. Ces dernières années un grand nombre de personnalités du monde culturel, tout en accusant les jeunes de manque d'intérêt pour les plus nobles activités de l'esprit telles que les arts et la poésie, expliquent cette situation par l'influence néfaste des sciences exactes et de la technique moderne, qui détruisent, disent-ils, ce qu'il y a d'humain chez l'homme.

J'ai dû, à l'époque, consacrer pas mal d'efforts à réfuter cette critique que je considère profondément injuste, particulièrement en ce qui concerne les mathématiques et les sciences exactes.

Mes adversaires ont cité, parmi leurs arguments, l'exemple des élèves d'une de nos écoles formant de futurs spécialistes de la programmation des calculatrices électroniques. Ces sympathiques enfants avaient écrit au-dessus de l'entrée de leur école le mot d'ordre suivant: "Nous voulons être non seulement des mathématiciens, mais aussi des hommes". Evidemment, ce vœu est digne d'égards et d'approbation; sans doute est-il partagé par tout le monde dans cette salle. Mais pourquoi, peut-on se demander, des mots d'ordre analogues ne doivent-ils pas apparaître sur les frontons des écoles artistiques? Pourquoi les élèves d'une école musicale n'expriment-ils pas leur désir d'être non seulement des musiciens, mais aussi des hommes? Est-ce que l'étude même des arts ou l'éducation à orientation artistique est-elle une garantie certaine du développement des meilleurs aspects de la personnalité? Les écoles artistiques n'ont-elles pas donné naissance, parmi les jeunes, à la bohème, avec ses traits sympathiques (bien entendu sur la scène) et moins sympathiques? Non, dans toutes ces tendances qui cherchent dans le développement des sciences exactes une menace pour l'idéal humanitaire, je vois une recrudescence des préjugés séculaires qui nous viennent encore de l'époque de la Renaissance. Doit-on conclure que nous autres mathématiciens ne soient responsables que de l'intellect et n'avons rien à faire avec les émotions, l'imagination, l'idéal social et la morale des jeunes que nous formons? Non, certainement non! Je suis convaincu que l'étude judicieusement organisée des sciences naturelles et des mathématiques est capable d'avoir sur la formation de la personnalité des jeunes, une influence bien plus grande que celle que l'on observe dans la plupart des cas. Les mathématiciens peuvent aider par leurs propres moyens à l'épanouissement de la nature humaine.

Et il ne s'agit pas, surtout ou seulement, de développer les qualités de l'esprit, de caractère, la capacité de travail et d'appréciation critique des résultats de son travail. L'étude des mathématiques et des sciences naturelles peut développer les émotions humaines, le désir de servir ses prochains. Toute science véritable est la création du génie de l'homme, création à laquelle ont participé les peuples du monde entier. Et nous n'aurons accompli notre devoir envers la jeune génération que lorsque nous aurons fait comprendre aux enfants, par nos leçons, que la science est une recherche infinie pour une vie meilleure de l'humanité, recherche qui demande une grande opiniâtreté, un travail et une énergie héroïque; ce devoir sera rempli lorsque nous leur aurons fait ressentir quel courage sans limites, quel amour envers les hommes, quels sacrifices se cachent sous les lignes laconiques des principes des sciences, des formules et des théorèmes.

Moscou

E. FISCHBEIN

ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE ET DÉVELOPPEMENT INTELLECTUEL

I. LE DÉVELOPPEMENT INTELLECTUEL

Une idée presque communément admise dans la psycho-pédagogie contemporaine est que l'évolution psychique de l'enfant a un caractère stadial. Cela signifie que:

(1) L'évolution se réalise par paliers successifs et chaque étape est caractérisée par une organisation spécifique relativement stable, devenant labile aux extrémités.

(2) L'évolution a un caractère sequentiel. Même si, au point du vue chronologique, on peut constater certains décalages, l'ordre de succession des stades est le même chez tous les enfants.

(3) Le passage au stade supérieur ne signifie pas l'abandon des acquisitions précédentes et non plus une simple adjonction de nouveaux aspects. Chaque étape commence par la revalorisation des acquisitions précédentes avec les moyens caractéristiques de la nouvelle étape, après quoi devient possible la valorisation complète des ressources offertes par les nouveaux moyens.

Jean Piaget est celui qui nous a offert la théorie la plus consistante de l'évolution stadiale, résultat de recherches poursuivies pendant presque cinq décennies.

Rappelons brièvement ces stades:

Après la première étape de l'intelligence psycho-motrice et après celle de la pensée préconceptuelle, se développe entre 4–7 ans la *pensée intuitive.* Elle apparaît comme une pensée en images, qui se sert de configurations d'ensemble et non plus de collections syncrétiques comme celles du niveau précédent. La coordination des informations se soumet à certains rudiments de logique, mais c'est une coordination instable, incomplète, que les informations perceptives immédiates, peuvent, toujours, désorganiser (Piaget, 1967, p. 139–149).

L'âge de 7–12 ans représente le stade des *opérations concrètes.* L'enfant arrive à une coordination mobile et réversible de l'activité mentale, mais qui fonctionne seulement par rapport à la réalité concrète des choses.

La confrontation cohérente des points de vue à ce stade, rend possible la compréhension des rapports spatiaux et temporels objectifs. La synthèse opératoire entre déplacement (l'invariance de l'étalon y comprise) et partition rend possible l'apparition du concept de mesure (des longueurs, des surfaces, des volumes) (Piaget et Inhelder, 1948a, b).

Le stade des opérations concrètes correspond à la possibilité d'inclusion hiérarchique des classes, de sériation, de même que de synthèse, dans une action unique de la classification et de la sériation – ce qui permet la formation du concept de nombre (Piaget et Szeminska, 1940).

Après l'âge de 11–12 ans on assiste au développement des *opérations formelles*. La pensée devient capable de se dérouler dans le domaine du possible, en effectuant des opérations sur des opérations par l'intermédiaire d'un système propositionnel. La pensée formelle est donc capable de procéder de manière hypothético-déductive, en passant du possible au réel. Contrairement à la pensée concrète qui ne dépasse le concret que de proche en proche, la pensée formelle est capable d'inventorier et de comprendre l'ensemble des possibilités offertes par les conditions en cause (Piaget et Inhelder, 1955).

Nous venons d'esquisser, très brièvement, l'évolution mentale de l'enfant, telle qu'elle est vue par Piaget. Cette théorie constitue aujourd'hui le principal système de référence pour les psycho-généticiens même si elle suscite certains désacords.

II. DÉVELOPPEMENT ET APPRENTISSAGE

Tels sont les traits généraux de l'évolution stadiale. Quel pourrait-être l'apport de l'apprentissage?

Au premier abord, la réponse paraît simple: l'apprentissage facilite, accélère le développement. Mais une analyse plus poussée montre que les choses sont plus compliquées.

En réalité, l'apprentissage ne se réduit pas à une simple absorption d'informations et à la formation de mécanismes mentaux sur un terrain neutre. L'apprentissage implique un processus actif de reconstruction, avec des moyens intellectuels propres, des données fournies. Ce qui signifie qu'il doit exister, en premier lieu, un tel système de moyens qui permette la reconstruction et l'assimilation des connaissances. Nous sommes, tout au moins en apparence, en plein cercle vicieux: le développement dépend de l'apprentissage, mais les effets de l'apprentissage dépendent, à leur tour, du niveau de développement des moyens intellectuels.

Il y deux catégories de réponses à ce problème.

(a) Le point de vue de Piaget et de ses collaborateurs. En se rapportant au progrès intellectuel on doit distinguer le développement des structures mentales fondamentales des différentes acquisitions particulières ou empiriques (voir aussi la profonde analyse de Gréco, 1959). Les structures fondamentales ne peuvent pas être acquises par un simple exercice, comme c'est le cas pour les acquisitions empiriques. Les structures dérivent des structures. Leur progrès ne peut être accéléré ou dévié que dans des limites très étroites. Citant les résultats expérimentaux de Inhelder *et al.* (1967), de Laurendeau, etc., Piaget conclut: "Le principal enseignement de ces expériences est que le succès de l'apprentissage est nettement subordoné au niveau de développement" (Piaget, 1968, p. 291). Autrement dit, tout ce que la pédagogie peut faire est d'étudier les traits de chaque étape pour mettre en valeur, le mieux possible, ses disponibilités. Les données plus récentes obtenues par les collaborateurs de Piaget les ont menés à la conclusion que l'apprentissage opératoire est, dans une certaine mesure, efficient, dans les phases de transition, accélérant le passage au stade ultérieur (Inhelder, 1966, p. 183).

(b) La seconde tendance, opposée à celle-ci, considère que le rapport de subordination est en réalité inverse. L'exercice, l'apprentissage, jouent le rôle fondamental. "We begin with the hypothesis that any subject can be taught effectively in some intellectually honest form to any child at any stage of development" (Bruner, 1965, p. 32). C'est la fameuse affirmation de Bruner qui a déclenché tant de controverses et qui exprime au fond un changement d'optique quant au rôle et aux possibilités du processus pédagogique. Les expériences de Bruner (voir surtout Bruner *et al.*, 1966) l'ont mené à la conclusion qu'un apprentissage réalisé par des moyens appropriés est capable d'accélérer la construction des structures intellectuelles fondamentales.

Dans la conception de Bruner l'ambiance sociale joue un rôle essentiel dans le développement intellectuel. Il y a, selon Bruner, trois modalités principales pour représenter le monde dans la culture d'une société: (a) la modalité *enactive*, c'est-à-dire la représentation par action (à prédominance motrice), (b) la modalité *iconique*, c'est-à-dire la représentation par images et (c) la modalité *symbolique* représentée, surtout, par le langage.

Le développement intellectuel de l'individu humain se réalise "par un processus d'intériorisation des procédés d'action, imagination et symbolisation qui existent dans la culture de la société" (Bruner *et al.*, 1966, p. 321). Les trois modalités se succèdent dans le développement intellectuel de l'individu, non pas comme des procédés exclusifs, mais bien dans le sens qu'elles acquièrent successivement un rôle dominant. Quand l'adolescent arrive à pouvoir utiliser systématiquement la modalité symbolique dans ses raisonnements, il ne cesse pas, naturellement, de se servir d'actions motrices et d'images.

Le processus de développement est vu par Bruner en dépendance directe du système de valeurs de la société, de l'action des facteurs éducatifs, des méthodes d'enseignement utilisées. Le concept de *readiness* perd complètement le caractère absolu qui résulte de la théorie de Piaget: "Readiness for learning" devient, dans la vision de Bruner, un paramètre relatif, dépendant du processus d'instruction. Il ne faut pas attendre passivement l'apparition de certaines structures intellectuelles. Le processus d'instruction peut influencer activement, peut accélérer l'apparition des structures correspondantes, si l'on utilise des méthodes adéquates (Bruner, 1966, p. 28). *Chaque système de connaissances doit être préparé* – avant de pouvoir être enseigné dans une forme complète – par son anticipation dans les stades antérieurs, en utilisant des procédés appropriés à ces stades: "Puisque la plupart des thèmes peuvent être transposés en formes qui mettent l'accent soit sur l'action, soit sur une représentation imaginative adéquate, soit sur la coordination symbolique verbale, il est souvent possible que le résultat final, qu'on se propose de réaliser en enseignant, soit présenté dans une forme plus simple, plus facile à manœuvrer, afin que l'enfant puisse progresser avec plus de facilité et de solidité vers la maîtrise complète des connaissances" (Bruner, 1966, p. 10).

Piaget a amené, récemment, un nouvel élément dans cette controverse: "... pour chaque sujet la vitesse de passage d'un stade au suivant correspond sans doute à un optimum, ni trop lent, ni trop rapide, la solidité, et même la fécondité d'une organisation (ou structuration) nouvelle dépendant de connexions qui ne peuvent être ni instantanées ni indéfiniment retardées, sous peine de laisser échapper leur pouvoir de combinaisons internes" (Piaget, 1968, p. 290).

C'est une hypothèse séduisante, mais qui ne tranche pas la dispute fondamentale. Cette hypothèse de l'optimum peut concorder tout aussi bien avec la conception de Piaget qu'avec celle de Bruner. Un "optimum" peut avoir un caractère absolu, dépendant exclusivement des caractéristiques individuelles (tel qu'il est dans la conception de Piaget) ou peut être variable, dépendant à son tour des conditions extérieures de développement, de l'ambiance, de l'éducation. On revient ainsi au point de départ. Il y a probablement un *rythme optimum* de développement intellectuel de l'individu, ou d'acquisition d'un corps déterminé de connaissances. Mais ce rythme n'est-il pas dépendant des moyens didactiques utilisés, de la motivation, des systèmes d'intérêts que le processus instructif peut construire? Or, la réponse de Bruner est affirmative.

La difficulté de trancher le problème tient aussi à des raisons méthodologiques: (a) il est difficile pour l'expérimentateur de se rendre compte si une réponse apprise exprime seulement une acquisition locale, empirique (plus ou moins conformiste) ou une conviction réelle, une restructuration de fond, (b) il est difficile de délimiter les obstacles soulevés par l'incompréhension du langage (l'enfant ne comprend pas exactement ce qu'on lui demande). (Voir sur ces discussions: Laurendeau et Pinard, 1966, p. 191–209; Inhelder *et al.*, 1967; Vinh Bang, 1967, etc.) Kohnstamm a critiqué les techniques d'apprentissage utilisées par l'école piagétienne pour leur caractère artificiel (Kohnstamm, 1966). Patrick Suppes de Stanford – qui s'occupe depuis plusieurs années de la réalisation d'un modèle structural pour l'interprétation de l'apprentissage des mathématiques – fait la remarque suivante: les théories cognitives actuelles ne sont pas suffisamment spécifiques pour permettre la prévision des résultats de l'apprentissage dans un domaine déterminé – en espèce, les mathématiques. (Suppes *et al.*, 1967, p. 162).

Nous pensons qu'une solution théorique, à larges implications pratiques, peut être cherchée dans la direction suivante:

Du moment qu'il s'agit de paliers successifs, de structures psychiques caractérisées par une organisation hiérarchique et par un ensemble de dépendances intérieures, le passage d'un stade à l'autre ne peut pas avoir lieu par fragments. La nouvelle structure peut remplacer la précédente seulement au moment de la constitution, dans le cadre du stade précédent, d'un ensemble de moyens intellectuels dépendant les uns des autres, se conditionnant et s'engrenant réciproquement. Certains décalages, certains retards isolés peuvent, bien sûr, se produire, mais un concept ou un procédé mental dépendant d'une structure ne peut devenir vraiment efficient avant que l'ensemble ait été constitué. On ne peut pas dissocier le concept de nécessité de celui de généralité et les deux d'une certaine capacité d'abstraction. Un raisonnement déductif n'a pas de sens en dehors de ces modalités.

Un apprentissage des structures intellectuelles est donc irréductible à l'apprentissage empirique. Mais ceci ne signifie pas qu'il serait impossible. Si l'instruction se propose de favoriser le passage à une stade supérieur, elle doit avancer sur un front large, en agissant simultanément sur tous les aspects importants. Il est possible que dans de telles conditions l'optimum dont parle Piaget puisse être réellement modifié.

En discutant de l'évolution des structures psychiques il faut tenir compte aussi d'un autre aspect. Les composantes de l'intellect ne présentent pas toutes une évolution ascendante. (En dehors de toute préparation spéciale un enfant de 12 ans est plus apte à comprendre, disons, le principe d'Archimède ou le concept de proportionnalité qu'un enfant de 8 ans. C'est le cas commun.) Il y a d'autres aspects qui ne se développent pas en dehors d'un apparentissage spécial. On peut déceler des aspects stagnants, ou même des involutions.

Je citerai deux exemples de nos travaux:

(a) Nous avons constaté à l'occasion de recherches concernant l'initiation en géométrie que les enfants de 11 ans ne sont supérieurs que de quelques pourcents, négligeables du point de vue statistique aux enfants de 8 ans, en ce qui concerne la capacité d'opérer avec des images mentales (déroulement et génération des figures géométriques) (Fischbein *et al.*, 1964, 1967a).

La question est sans doute d'un grand intérêt pratique. La géométrie, la physique, la géographie, etc., font appel à une capacité imaginative que personne ne cultive à l'école d'une manière systématique. Beaucoup de difficultés pourraient être expliquéees par ce fait.

(b) A l'occasion de recherches consacrées à l'intuition probabiliste chez l'enfant nous avons constaté que ce sont les petits (les préscolaires) qui apprécient mieux les chances que les plus âgés (13–14 ans) dans des situations à probabilités objectivement égales.

Nous avons expliqué ce fait par la tendance des plus âgés de rechercher partout des liaisons strictement déterminées, permettant une prévision univoque. On peut supposer que cette tendance à des prévisions univoques – cultivée sans doute par l'école – représentera un obstacle à l'apprentissage du calcul des probabilités.

III. FACTEURS DYNAMISANTS DE L'ÉVOLUTION INTELLECTUELLE

Quels sont donc, les moyens pédagogiques qui peuvent être proposés pour favoriser ou accélérer l'acquisition des structures aux différents paliers de l'évolutions intellectuelle?

A. *L'enseignement structural*

Pour contribuer à l'élaboration des structures mentales, l'enseignement doit être lui-même structural. L'enseignement doit mettre l'accent sur les concepts fondamentaux, sur les idées directrices, sur les techniques essentielles de découverte, d'organisation, d'interprétation des faits dans un domaine de connaissances.

Or, l'esprit des mathématiques modernes se prête merveilleusement à cette conception didactique.

"Le faisceau divergent est regroupé. Les mathématiques utilisent les mêmes concepts, le même langage dans toutes les branches: il est légitime de parler non plus des mathématiques, mais de la mathématique" (Revuz, 1965, p. 49). En apprenant les mathématiques d'une manière moderne (et non pas simplement les concepts modernes des mathématiques) l'élève apprend tout d'abord à découvrir au délà de la variété apparente, les relations fondamentales et leurs propriétés, les modes fondamentaux d'organisation des entités mathématiques et surtout la dynamique vivante de ces relations et classifications.

A quel âge l'assimilation de certaines notions de la théorie des ensembles est-elle possible? Les résultats des expériences psycho-pédagogiques indiquent l'âge de 6–7 ans. Nous mentionnons à cet égard les expériences concluantes décrites par Picard (1966), Sulbout (1965), Hug (1968), etc. Des données de Sulbout résulte l'accélération déterminée par l'enseignement dans l'assimilation des concepts et des opérations respective (l'appartenance à un ensemble, l'intersection etc.). Tous les auteurs relèvent l'intérêt particulier des enfants pour ce genre d'activités, l'action stimulative exercée sur leur capacité d'invention (voir surtout Hug, 1968, p. 227–239).

Assimiler une connaissance fondamentale c'est gagner un nouvel instrument d'action. Apprendre ce que c'est une relation d'équivalence ne signifie pas purement et simplement apprendre une définition de plus, mais encore à acquérir un ensemble de techniques mentales qui nous permettent de saisir la parenté profonde entre entités, en apparence différentes, de généraliser un procédé, une solution, etc. "Une espèce de structure", écrit Revuz, "correspond à un mode de pensée et chaque structure particulière a des possibilités d'action sur les ensembles qui en sont munis. La pensée qui a pris conscience de ces structures est obligatoirement active et spontanément agressive à l'égard des problèmes à résoudre. Dans ce contexte, un théorème n'est plus l'énoncé d'une vérité conservée dans un ciel platonicien mais l'assurance de pouvoir agir d'une certaine manière, dans des conditions données" (Revuz, 1965, p. 49–59).

Une pareille vision dynamique de l'organisation des mathématiques nous protège d'un danger auquel on doit faire attention. Selon l'opinion de G. Polya les manuels modernes se limitent fréquemment à des problèmes de routine – mais d'un autre type que ceux des manuels traditionnels, notamment à ceux de terminologie (cf. Krygowska, 1966, p. 308). Hypnotisés par cet édifice grandiose de la mathématique contemporaine, il existe le risque qu'on réduise l'apprentissage des mathématiques à la mémorisation d'une nomenclature. Je pense que c'est surtout contre une telle description de type anatomique, contre un pareil mode statique et descriptif de présenter la mathématique moderne qu'a protesté Louis Couffignal (1964). En procédant ainsi on va exactement contre le sens profond des mathématiques contemporaines.

Dire que tel ensemble est un groupe ne doit pas signifier, tout simplement, coller une étiquette. Invoquant ce concept nous mettons en évidence certaines parentés fondamentales, certaines modalités d'organisation, certaines filiations virtuelles. Or, c'est justement cette dynamique que l'enfant doit apprendre.

Ces structures, pour être réellement efficientes, doivent être distillées de l'expérience pratique, la plus élémentaire de l'enfant. Il nous semble absurde de parler de l'associativité ou de la commutativité de l'addition avant que l'enfant ait eu l'occasion d'additionner, en groupant des billes ou des boutons, avant qu'il eût l'occasion d'expérimenter et de découvrir lui-même ces propriétés.

"On s'efforce de partir du premier niveau, celui de notions abstraites ou même de niveaux plus élevés. Ce qui devrait être le point de départ, apparaît après coup sous le titre d'applications. On fait un dessert non digérable de ce qui aurait été bon comme hors d'œuvre" (Freudenthal, 1963, p. 36).

Affirmer que l'enseignement traditionnel des mathématiques se réduit à des techniques de calcul, à une comptabilité prosaïque, pendant que la mathématique moderne peut être enseignée seulement au niveau olympien des raisonnements purs, c'est être injuste envers l'un comme envers l'autre. L'enseignement traditionnel armait l'élève de bonnes règles de calcul (dont il aura toujours besoin non pas simplement pour la vie courante, mais comme ingénieur, économiste etc.). Mais en même temps l'élève trouvait des modalités pour exercer et assouplir sa pensée mathématique en résolvant des problèmes, trouvant des démonstrations, inventant des artifices originaux, etc. Ce sont, sans doute, des activités mathématiques.

D'un autre côté ce serait une illusion de s'imaginer que l'élève puisse assimiler la structure moderne des mathématiques sans un fondement algorithmique étendu et solide. Cette opposition entre algorithme et invention, entre habitude et raisonnement est absolument fausse. La souplesse et l'efficience d'un raisonnement supposent, sans doute, l'automatisation des chaînons dont il se sert. Pour assurer une liberté complète de mouvement à la pensée, dans ses démarches créatrices, il faut lui assurer un réseau souple mais très solide d'habitudes mentales, un édifice bien consolidé de symboles permettant de véhiculer et d'engrener les concepts et les relations en structures variées.

Si ces choses sont bien comprises il nous semble qu'on peut alors trouver des voies efficientes pour dépasser certaines difficultés actuelles dans l'enseignement mathématique. La mathématique moderne conçue – comme nous le disions – non par comme un édifice inerte, mais dans sa dynamique intrinsèque, n'exclut pas, mais par contre, implique une bonne maîtrise de certains automatismes – depuis le calcul élémentaire jusqu'aux opérations plus difficiles exigées, disons, par le calcul différentiel.

Il n'est pas permis – comme se plaignent quelquefois les maîtres – que l'élève sorti de l'école élémentaire ne sache pas parfaitement la table de multiplication sous prétexte qu'il a appris ce que c'est un ensemble, une réunion et une intersection d'ensembles, un élément neutre, etc. Il n'y a pas de raisons pour négliger l'automatisation des techniques de calcul et l'apprentissage de certains schèmes courants de résolution seulement par ce qu'on désire que les élèves apprennent les propriétés de certaines structures mathématiques.

Nous revenons au rôle de l'enseignement mathématique dans le développement intellectuel de l'élève. L'accélération du passage à un stade intellectuel supérieur suppose la possibilité d'un enseignement structural, c'est-à-dire la possibilité de l'assimilation par exercice de certains schèmes intellectuels fondamentaux concernant la lecture de l'expérience, la conceptualisation, le raisonnement, etc. Il s'agit, évidemment d'une assimilation organique, c'est-à-dire de l'intégration du fait nouvellement appris dans la hiérarchie d'ensemble de l'intellect. Une telle intégration, même si elle a quelquefois en apparence un caractère explosif (ce que la psychologie de la Gestalt appelle "Einsicht"), suppose toujours une élaboration préliminaire, minutieuse et systématique. Les concepts fondamentaux de la mathématique moderne pourront contribuer effectivement au progrès intellectuel de l'élève s'ils vont engrener et entraîner un ensemble d'automatismes intellectuels – parfaitement compatibles avec les techniques traditionnelles de calcul. Dans le cas contraire il ne s'agira que d'un verbiage vide accompagné ou non par toute sorte de figures, diagrammes, flèches, etc.

B. *Préfiguration des structures*

Une seconde modalité pour favoriser le passage aux caractéristiques d'un stade intellectuel supérieur consiste dans *la préfiguration de ces caractéristiques par les moyens du stade précédent.*

Nous voudrions relater une de nos expériences à ce sujet (Fischbein *et al.*, 1969). Pour pouvoir enseigner avec succès le calcul des probabilités au lycée il faut que l'instruction se fasse d'une manière échelonnée et qu'elle commence le plus tôt possible. Le calcul des probabilités n'est pas simplement un chapitre quelconque de la mathématique, mais un mode de penser qui ne peut se constituer que par l'inclusion dans sa structure d'intuitions et d'habitudes mentales spécifiques. Conformément à la théorie (Piaget et Inhelder, 1951), la synthèse entre l'aléatoire et le nécessaire – fondamentale pour le concept de probabilité – ne peut avoir lieu avant le passage aux opérations formelles. Bien plus: la comparaison des probabilités ne pourrait être réalisée au niveau des opérations concrètes puisqu'il s'agit de la comparaison de deux rapports, donc d'une double comparaison pensée simultanément – action que seulement l'adolescent pourrait accomplir.

Nos expériences ont été effectuées avec des préscolaires, des élèves de 9–10 ans et 12–13 ans, en utilisant dans ce but deux boîtes en plastique, contenant chacune des billes de deux couleurs. Les sujets devaient indiquer, en tenant compte du rapport des billes blanches et noires, laquelle des deux boîtes est la plus favorable au tirage par hasard d'une bille d'une certaine couleur. Les réponses spontanées ont confirmé la thèse de Piaget et Inhelder. Mais nous avons recours à une instruction simple consistant en essence dans l'indication d'une technique de groupement, par laquelle on pouvait mettre en évidence, d'une manière figurale, le rapport considéré. (Par exemple, s'il s'agissait de comparer 6B/2N:10B/5N, on devait grouper les billes de la manière suivante: dans la première boîte, deux groupes constitués par 3B/1N et dans la seconde boîte 5 groupes constitués par 2B/1N.)

Ce qui est essentiel, c'est le fait que l'enfant de 9–10 ans ne reste pas simplement à la constatation de la proportionnalité ou de la non-proportionnalité figurale. Il construit un raisonnement explicite, verbal, de la forme suivante: "C'est plus facile de tirer une bille blanche dans la première boîte, parce qu'il y a 3 billes blanches pour une bille noire, tandis que dans l'autre il n'y en a que deux blanches pour une noire."

Ce qui signifie que, malgré les moyens utilisés au cours de l'exercice correspondant au niveau des opérations concrètes, le sujet dégage la structure formelle des opérations et se rapproche du niveau des opérations formelles.

Un second exemple, toujours tiré de nos recherches (en collaboration avec I. Pampu et I. Mînzat) non encore publiées. Selon Piaget et Inhelder (1955, p. 222, 287) ce n'est qu'au niveau des opérations formelles que l'enfant peut mobiliser des disponibilités intellectuelles suffisantes pour pouvoir envisager l'ensemble des possibilités et des combinaisons possibles dans une situation donnée.

Cependant nous avons réussi, en utilisant des diagrammes arborescents, à apprendre à l'enfant de 10 ans à construire un "espace des épreuves" correspondant à une expérience stochastique déterminée: par exemple, le nombre d'arrangements possibles (avec répétition) qui peuvent s'obtenir avec deux éléments pris 3 par 3, 4 par 4, etc.). La preuve qu'il ne s'agissait pas simplement d'un enregistrement mécanique, mais d'une assimilation structurale a été fournie par le fait que les acquisitions respectives ont été susceptibles de transfert: non pas uniquement le transfert de 3 à 4 éléments, mais aussi le transfert relativement éloigné du procédé d'arrangements aux permutations. (Ce résultat a été obtenu sur 80% des enfants.) La "combinatoire" a pu donc être construite au niveau des opérations concrètes en utilisant des moyens figuraux (le diagramme arborescent), mais le schéma a pu être dégagé par l'enfant et pensé d'une manière généralisée avec des moyens correspondants au niveau des opérations formelles.

Cette préfiguration se trouve réalisée dans la pratique didactique de différentes manières. De l'avis de Dienes (1966) pour qu'on réalise un bon enseignement mathématique, l'activité constructive de l'enfant doit précèder l'analyse, l'explicitation des règles et des concepts. Mais afin qu'une structure mathématique puisse être dégagée, abstraite, il faut, tout d'abord, que le matériel utilisé soit varié aussi bien du point de vue perceptif que mathématique. Il est indiqué, par exemple, que la numération ne se limite pas exclusivement au système décimal. Il faut utiliser des bases différentes pour mettre en évidence ce qui du point de vue mathématique est commun et essentiel. Ce qui nous semble véritablement nouveau dans la conception et la technique de

Dienes c'est justement le procédé que l'appellerai "travesti ludique". Il ne s'agit pas simplement d'abstraire les concepts mathématiques d'un matériel concret. Dans la technique de Dienes le concret est inclus dans un jeu et il faut manœuvrer savamment différents types de jeux afin que la structure mathématique soit dégagée: jeux manipulatifs, représentatifs et jeux à règles ("rule-bound play") (Dienes, 1963, p. 21–32).

La technique de Dienes soulève à mon avis, deux problèmes essentiels: (1) Sommes-nous toujours sûrs que le jeu est, pour les enfants, le porteur effectif de la structure mathématique envisagée par le maître? N'y a-t-il pas là le risque d'une erreur de perspective? Est-ce qu'on ne risque pas une contamination ou même une restructuration totale déterminée par le système conceptuel (ou mieux, intuitif-conceptuel) de l'enfant? (2) N'y a-t-il pas le risque qu'en projetant des jeux didactiques pour enseigner certains concepts (systèmes numériques, structures algébriques etc.) on tienne compte (en ce qui concerne l'ordre et la systématisation des concepts enseignés) plutôt de la logique des jeux que de la logique de l'édifice mathématique?

Ces réserves n'expriment pas du tout un désacord avec les idées du professeur Dienes. Nous désirons seulement rappeler la complexité des phénomènes et suggérer la nécéssité d'expérimenter sur un front très étendu pour pouvoir dégager une ligne de conduite ferme.

Un autre procédé pour préfigurer le formel est la représentation graphique. C'est une technique utilisée couramment pour jalonner et stimuler les raisonnements abstraits et qui a une large application dans la pédagogie des mathématiques – souvent comme étape intermédiaire entre la manipulation concrète et le plan conceptuel. Le professeur Papy (1964) dans ses leçons et ses travaux a utilisé une grande variété de telles images graphiques – diversement colorées pour suggérer les relations entre des ensembles et les opérations avec ceux-ci. Dans ce cas aussi comme dans celui du jeu se pose, en premier lieu, un problème de perspective. Pour l'adulte, pour le professeur le graphe est l'image d'une abstraction élaborée déjà. Pour l'enfant l'image graphique représente une étape intermédiaire entre la diversité du concret matériel et l'abstraction conceptuelle. Les fonctions sont donc différentes. Il y a là aussi, le risque que le professeur commette des erreurs en manœuvrant la technique des graphes à cause de cette différence de perspective. L'image, identique perceptivement pour le professeur et l'élève, peut acquérir dans les deux réseaux conceptuels, des significations différentes.

Il y a, d'un autre côté, le risque qu'une trop grande charge intuitive devienne déroutante, qu'elle dévie l'attention de l'enfant envers des aspects frappants pour lui mais non essentiels du point de vue mathématique. "L'emploi des couleurs peut donc être aussi périlleux qu'il est commode; et il oblige à expliquer que l'espace euclidien est incolore" (Leray, 1966, p. 238).

P. I. Galperin a élaboré, il y a quelques années, une théorie "des actions mentales" concernant l'assimilation des concepts. D'après la conception de Galperin le processus se réalise avec le maximum d'efficacité si on parcourt les étapes suivantes: (a) La présentation explicite des faits considérés (par ex. les phrases qui définissent le concept). (b) L'accomplissement de certaines opérations concrètes, matérielles se rapportant au concept étudié. (c) La description verbale par le sujet des actions effectuées. (d) L'intériorisation de l'action: celui qui apprend résoud les problèmes sans explicitation verbale. (e) L'automatisation des actions mentales intériorisées (Galperin, 1959).

Dans la conception de Galperin le dégagement de la structure conceptuelle d'opérations concrètes – à l'aide du langage – est utile à tous les âges et n'appartient pas nécessairement à un stade déterminé du développement intellectuel.

En réalité il y a toute une dialectique de l'image et de l'abstraction dans l'apprentissage dont les caractéristiques dependent sans doute du niveau d'âge. L'image n'est pas seulement le premier échelon de la compréhension. L'image revient aux différents niveaux de la compréhension, mais chaque fois plus subtile, plus raffinée, plus apte a être insérée dans la dynamique d'un raisonnement abstrait (Fischbein, 1963).

C. *La pédagogie de l'invention*

Quelle place occupe la méthode d'apprentissage par découverte dans notre discussion?

Même si la méthode expositive est plus économique et détermine initialement une mémorisation plus rapide, elle reste inférieure à l'apprentissage par découverte, si on se rapporte au critère essentiel qui est la capacité de transfert. C'est un fait fondamental pour notre discussion. Si l'élève est mis dans la situation de découvrir lui même le concept, la règle, le principe etc. – par une présentation appropriée d'exemples et de matériel didactique – il sera capable de les utiliser indépendamment, en situations nouvelles. Bien plus: découvrir la règle par ses propres efforts facilité également ce qu'on appelle le "transfert éloigné", c'est-à-dire la découverte indépendante d'une règle seulement apparentée à la première (voir: Shulman and Keisler 1966; Guthrie, 1967; Roughead and Scandura, 1968; Worther, 1968).

Tout ceci signifie qu'en utilisant la découverte comme méthode d'apprentissage on obtient plus que ce que Piaget appelait un apprentissage empirique, strictement localisé aux faits considérés. Les structures elles-mêmes sont affectées dans leur organisation hiérarchique. L'enfant ne peut pas découvrir tout, évidemment. C'est pourquoi on parle *de découverte dirigée.* L'enfant est mis dans la situation de découvrir les solutions des problèmes par séquences limitées, dont l'ordre est établi par le maître. Nous pensons qu'il est possible de passer d'une instruction programmée – telle qu'elle est utilisée aujourd'hui – et dans laquelle l'information précède la réponse laissant trop peu de place à la créativité de l'élève – à *une instruction par découverte programmée* (expérimentée déjà par nous dans le cas des diagrammes arborescents). Ce qui est essentiel c'est le fait *qu'une solution découverte par l'élève lui-meme tende à se généraliser mieux qu'une solution indiquée.* Une solution que l'on découvre par ses propres efforts tend à s'intégrer d'une manière organique, dans l'activité intellectuelle et à influencer tout l'édifice des procédés mentaux dans leur organisation hiérarchique.

Durant la dernière décennie on a accordé une attention particulière à la description des stratégies heuristiques. Une stratégie heuristique sélectionne seulement quelques tracés imaginables, dans la résolution d'un problème, selon des critères d'économie, de plausibilité, d'association, de structure de symètrie, d'analogie etc. Une stratégie heuristique quoiqu'elle prenne en considération certaines règles, se distingue toutefois d'un algorithme puisque les pas ne sont pas intégralement programmés. C'est un schéma souple ou une hiérarchie de schémas qui guide l'investigation dans un contexte donné.

Peut-on dégager de telles règles heuristiques, les décrire et les faire apprendre pour faciliter les efforts créateurs de l'élève dans la résolution indépendante de problèmes?

Les faits recueillis ces dernières années nous permettent une réponse affirmative. Nous pensons en premier lieu, à la possibilité – aujourd'hui démontrée – d'incorporer des règles heuristiques dans les programmes des ordinateurs (Newell *et al.*, 1964).

Avec un programme heuristique adéquat une machine peut trouver la solution d'un problème nouveau – ce qui est tout autre chose que la programmation à base d'algorithmes dans laquelle tous les pas sont rigidement prévus.

Or, si une machine peut bénéficier d'une programmation heuristique ne serait-il pas possible que l'élève profite lui-même des règles heuristiques méthodiquement enseignées?

On connaît dans la littérature psychologique différentes tentatives de ce genre. On communiquait d'avance aux élèves une série de règles de conduite qu'ils devaient appliquer ensuite à la résolution des problèmes. Quoique les auteurs soutiennent, en général, que les résultats furent positifs, le procédé n'a pas été généralisé.

A notre avis, l'apprentissage verbal de règles heuristiques n'est pas utile. L'activité d'investigation du sujet qui résoud un problème – comme toute activité créatrice – est consciente dans son orientation d'ensemble, mais pas dans ses mécanismes. Les détails de ce processus de génération et sélection d'hypothèses se réalisent en grande mesure par un engrenage extrêmement complexe d'automatismes intellectuels. En essayant de contrôler consciemment les chaînons de ce mécanisme nous ne faisons pas autre chose que de le dérégler ou même de le bloquer. Si on essayait, pendant la résolution d'un problème de mathématique, d'appliquer un "règlement", on obtiendrait sans doute un effet contraire à celui escompté. Dès le début, notre pensée serait gênée par ces immixtions artificielles. Notre attention serait écartée de son objectif principal, la résolution du problème, et orientée vers la liste des règles.

Nous ne nions, pourtant, pas, l'utilité des règles heuristiques. Il nous semble, à cet égard, que la stratégie didactique doit être la suivante: les règles heuristiques ne doivent pas être assimilées seulement d'une manière verbale. Elle doivent être incorporées par des exercices systématiques, prolongées dans la structure hiérarchique de nos habitudes intellectuelles, de manière qu'elles y participent non pas du dehors – comme des facteurs hétérogènes – mais par engrenage automatisé dans le flux de l'action.

On peut envisager aussi au moins deux situations dans lesquelles l'appel lucide à des règles heuristiques peut être profitable:

(a) L'étape préparatoire dans la résolution d'un problème. Dans cette phase on fait appel moins à l'inspiration qu'à une exploration systématique. Dans cette étape nous pouvons nous servir avec succès de l'application délibérée de certaines règles de conduite apprises. (b) Au cours de l'effort de résolution apparaissent quelquefois des moments de déroute, de désorientation. Toutes les voies semblent fermées. Dans une situation pareille on revient à la reconsidération intégrale des conditions, on reprend les faits dans une nouvelle perspective, on pèse et on confronte les arguments, on évalue les erreurs commises, etc. Tout ceci peut bénéficier de l'appel lucide aux règles heuristiques.

Mais revenons-en au problème du développement.

Un stade déterminé dans le développement intellectuel ne se caractérise pas par un clavier de réactions singulières programmées d'une manière univoque. Ce qui est essentiel, c'est l'organisation hiérarchique, souple de schémas de comportement – irréductible à un assemblage d'algorithmes – puisque l'enfant doit être préparé à tenir tête à des circonstances variées, partiellement imprévisibles.

L'enfant, décrit par Piaget, arrivé au stade des opérations formelles est capable d'inventorier d'une façon exhaustive les possibilités dans une circonstance donnée, de tirer une conclusion logique correcte à partir des prémisses données objectivement. Mais cet enfant ne possède pas l'équipement intellectuel nécessaire pour résoudre de manière indépendante et créatrice un problème puisque l'intelligence décrite par Piaget n'inclut dans son programme que des stratégies complètes et non pas aussi, des stratégies heuristiques.

Or, l'évolution des structures intellectuelles – si l'on admet que l'intelligence signifie la capacité d'inventer une solution dans une situation nouvelle – suppose également la constitution évolutive de certaines stratégies heuristiques, plus ou moins générales, organisées hiérarchiquement, incluses dans l'engrenage mental de chaque stade. En réalité nous savons très peu de choses aujourd'hui sur l'aspect didactique de ce problème.

"Malheureusement, la question très importante de l'enseignement des stratégies dans la résolution des problèmes n'a pas été suffisamment développée", affirme à juste titre A. Z. Krygowska (1966, p. 319).

Le problème peut donc être formulé de la manière suivante: quels sont les moyens didactiques les plus appropriés à faciliter l'évolution des structures intellectuelles par l'intégration des procédés heuristiques dans l'activité cognitive de l'enfant?

Hans Freudenthal (1963, p. 31) faisait cette affirmation pertinente: "Si l'on adopte l'idée de l'apprentissage de l'invention, la matière qui doit être analysée, avant qu'on ne construise un système d'enseignement, n'est plus la matière à enseigner, mais le processus d'invention de cette matière".

La préoccupation du développement, par une instruction adéquate, des capacités créatrices en mathematiques (et, évidemment dans toutes les matières), doit conduire à une pédagogie de l'invention, qui prenne en considération tous les élèves et non pas uniquement ceux qui sont doués. Al. Roşca (1969, p. 23) a constaté cette chose très importante pour notre discussion: seulement 20% des mathématiciens qu'il a interrogé, ont montré un intérêt constant pour les mathématiques à l'école secondaire.

IV. CONCLUSIONS

Admettant l'hypothèse qu'un apprentissage structurel est possible (ou, ce qui est la même chose, que l'évolution des structures intellectuelles peut être accélérée), nous proposons qu'on envisage les stratégies didactiques suivantes: (1) L'enseignement doit être structurel. La systématisation moderne des mathématiques se prête très bien à une telle stratégie, à deux conditions: (a) ne pas oublier le côté dynamique des relations conceptuelles en cause, (b) ne pas oublier qu'un raisonnement éfficace n'est pas possible sans un échafaudage d'automatismes. (2) Les connaissances et les habitudes mentales correspondant à un certain niveau intellectuel, peuvent être assimilées plus vite et d'une manière plus durable si elles sont préfigurées dans le stade précédent avec les moyens spécifiques à ce dernier. (3) L'enseignement par découverte facilite le transfert et la généralisation hiérarchique des procédés acquis. Un enseignement qui vise les structures – et non seulement un simple conditionnement –, doit donc susciter les efforts investigateurs de l'enfant.

Un enseignement des stratégies heuristiques est possible et utile à condition qu'elles soient effectivement integrées, par des exercices systématiques dans les automatismes sous-jacents des raisonnements mathématiques.

Institut de Psychologie, Bucarest, Roumanie

BIBLIOGRAPHIE

Bang, Vinh: 1967, 'Méthode d'apprentissage des structures opératoires', *Revue Suisse de Psychologie* **26**, nr. 2.

Bruner, J. S.: 1965, *The Process of Education*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Bruner, J. S.: 1966, *Toward a Theory of Instruction*, The Belknap Press of Harvard Univer sity Press, Cambridge, Mass.

Bruner, J. S., Oliver, R. R., et Greenfield, M. P.: 1966, *Studies in Cognitive Growth*, Wiley, New York-London-Sidney.

Couffignal, L.: 1964, 'L'utilisation des mathématiques', dans *L'Enseignement des mathématiques, Études de pédagogie expérimentale*, Paris, P.U.F., p. 1–38.

Dienes, Z. P.: 1963, *An Experimental Study of Mathematics Learning*, Hutchinson, London.

Dienes, Z. P.: 1966, *Construction des mathématiques*, Paris, P.U.F.

Fischbein E.: 1963, *Conceptele figurale (Les concepts figuraux)*, Edit. Academiei, Bucuresti.

Fischbein, E., Livezeanu, M., Radu, V., et Mînzat, I.: 1964, 'Recherches sur l'initiation en géométrie', *Revue Roumaine des Sciences Sociales. Série de Psychologie* **8**, 185–198.

Fischbein, E., Livezeanu, M., Popescu, I., et Mînzat, I.: 1967a, 'La capacité imaginative et les opérations intellectuelles chez les enfants', *Revue Roumaine des Sciences Sociales. Série de Psychologie* **11**, 189–190.

Fischbein, E., Pampu, I., et Mînzat, I.: 1967, 'L'intuition probabiliste chez l'enfant', *Enfance* **2**, 193–208.

Fischbein, E., Pampu, I., et Mînzat, I.: 1969, 'Compararea rapoartelor şi ideea de şansà la copii' [La comparaison des rapports et l'idée ce chance chez les enfants], *Revista de Psihologie* **1**, 5–19.

Freudenthal, H.: 1963, 'Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?', *L'Enseignement Mathématique* **9**, 28–44.

Gréco, P.: 1959, 'Induction, déduction et apprentissage', dans *La logique des apprentissages*, P.U.F., Paris.

Guthrie, T. J.: 1967, 'Expository instruction versus a discovery method', *Journ. of Educ. Psychol.* **58**, 45–49.

Hug, C.: 1968, *L'enfant et la mathématique moderne. Expérience originale de rénovation de l'enseignement mathématique à l'ecole primaire*. Bordas-Mouton, Paris.

Inhelder, B.: 1966, Développement, régulation et apprentissage', dans *Psychologie et épistémologie génétique. Thèmes piagétiens*, Dunod, Paris.

Inhelder, B., Bovet, M., et Sinclair, H.: 1967, 'Développement et apprentissage', *Revue Suisse de Psychologie* **26**, 1–23.

Kohnstamm, G. A.: 1966, 'Teaching piagetian thought operations to preoperational children,' International Congress of Psychology, Moscow 1966, *Symposium* **32**, p. 93–97.

Krygowska, A. Z.: 1969, 'Développement de l'activité mathématique des élèves et rôle des problèmes dans ce développement,' *L'Enseignement Mathématique* **12**, 293–320.

Laurendeau, M. et Pinard, A.: 1966, 'Reflexions sur l'apprentissage des structures logiques' dans le vol. *Psychologie et épistémologie génétique. Thèmes piagétiens*, Dunod, Paris.

Leray, J: 1966, 'L'initiation aux mathématiques', *L'Enseignement mathématique* **12**, 235–241.

Newell, A., Shaw, J. C., et Simon, H. A.: 1964, 'The process of creative thinking', dans *Contemporary approaches to creative thinking*, The Atherton Press, New York.
Papy: 1964, *Mathématique moderne*, Didier, Bruxelles-Paris.
Piaget, J.: 1967, *La psychologie de l'intelligence*, Armand Colin, Paris (ed. 7).
Piaget, J.: 1968, 'Le point de vue de Piaget', *International Journal of Psychology* **3**, 273–280.
Piaget, J. et Inhelder, B.: 1948a, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, P.U.F., Paris.
Piaget, J. et Inhelder, B.: 1948b, *La géométrie spontanée de l'enfant*, P.U.F., Paris.
Piaget, J. et Inhelder, B.: 1951, *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, P.U.F., Paris.
Piaget, J. et Inhelder, B.: 1955, *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, P.U.F., Paris.
Piaget, J. et Szeminska, A.: 1940, *La genèse du nombre chez l'enfant*, Neuchâtel et Paris, Delachaux, Niestlé.
Picard, N.: 1966, 'Une éxpérience d'enseignement de la mathématique au cours élémentaire', *Le Courrier de la recherche pédagogique*, 12–75.
Revuz, A.: 1965, *Mathématique moderne, mathématique vivante*, OCDL, Paris.
Roughead, W. G. et Scandura, J. M.: 1968, '"What is learned" in mathematical discovery', *Journal of Educ. Psych.* **59**, 283–289.
Roşca, Al.: 1969, 'La détection et la formation des chercheurs en mathématique', *Revue Internationale de Psychologie Appliquée* **18**, 21–31.
Shulman, L. S. et Keislar, E. R. (eds.): 1966, *Learning by Discovery. A Critical Apraisal*, Rand Mc. Nally Company, Chicago.
Sulbout, J.: 1965, *La nouvelle pédagogie des mathématiques*, Librairie Universitaire, Louvain.
Suppes, P., Lester, H., et Jerman, M.: 1967, 'Linear Structural Models for Response and Latency Performance in Arithmetic on Computer-Controlled Terminal', in J. P. Hill (ed.), *Minnesota Symposia on Child Psychology*, Minneapolis, Minn, p. 160–200.
Worther, R. B.: 1968, 'Discovery and expository task presentation in elementary mathematics', *Journal of Educ. Psych.* **59**, 1 (2).

EMMA CASTELNUOVO

DIFFÉRENTES REPRÉSENTATIONS UTILISANT LA NOTION DE BARYCENTRE

Mon exposé est, tout simplement, le compte rendu d'une expérience que je viens de faire dans mon école à Rome, je dirais mieux que je viens de vivre avec mes élèves de 13–14 ans, tellement le sujet nous a passionnés.

Permettez-moi, tout d'abord, de vous présenter brièvement l'organisation de l'enseignement secondaire en Italie, et de situer mon école et mes élèves. L'enseignement secondaire couvre chez nous huit ans: trois ans pour le premier cycle qui est le même pour tous les enfants (âgés de 11 à 14 ans) et cinq ans pour le second cycle. Je suis professeur dans le premier cycle et j'ai conduit mon expérience pendant trois mois dans les deux classes de troisième année, chacune d'une trentaine d'élèves (garçons et filles) âgés de 13–14 ans. Les enfants appartiennent à tous les milieux sociaux. Je vous dis tout cela car vous vous trouverez dans un moment en plein cours et il est bon que vous sachiez d'où viennent les observations, les discussions, enfin toute cette vivacité.

Encore une précision, avant de commencer: ces enfants ne connaissent presque rien du calcul littéral. Ce manque de culture a été fort significatif car, pour surmonter des difficultés d'ordre algébrique, ils ont été obligés, bien souvent, d'avoir recours à l'intuition géométrique ou physique, et ce 'plongement' dans le concret nous a fait revivre quelquefois les voies de la pensée.

Le titre que j'ai donné à cet exposé est, sans doute, fort sibyllin. Je vais m'expliquer: bien de fois, dans les années précédentes, j'avais remarqué combien la notion de barycentre est formative: l'intuition géométrique dans des sujets de mécanique conduit fort souvent à des erreurs, car il y a le poids, la masse qu'on doit considérer et qu'on néglige lorsqu'on est 'pris' par la vision géométrique. Cette année j'ai voulu pousser l'étude jusqu'au calcul barycentrique de Möbius dans le but de donner une idée des applications modernes de ce calcul. Je dois dire que c'est la lecture d'un fort joli livre de M. Freudenthal, *La mathématique dans la science et dans la vie*, qui m'a suggéré ce sujet: dans un des chapitres M. Freudenthal traite, justement, le calcul barycentrique et son application à la programmation linéaire. Or, il s'agissait de mettre tout cela à la portée des enfants.

J'ai divisé le sujet en deux parties:

(a) le calcul barycentrique;
(b) quelques applications.

A. LE CALCUL BARYCENTRIQUE

1. *La loi d'équilibre du levier*

Je dirai tout d'abord que bien souvent j'ai utilisé la notion de poids au lieu de la notion de masse dans le but de mieux exciter la sensibilité des enfants.

On a pris une petite barre 'sans poids', on l'a pendue en utilisant un petit anneau dans lequel la barre peut glisser (Figure 5) et on a écrit la condition d'équilibre que les enfants avaient déjà rencontrée à propos de la proportionalité inverse:

$$m_1 \cdot b_1 = m_2 \cdot b_2,$$

m_1, m_2 désignent les poids appliqués aux extrémités de la barre A_1A_2 (Figure 1) et b_1, b_2 représentent les bras. Le point P autour duquel la barre s'équilibre est le *barycentre* du système. En P est concentré le poids $m = m_1 + m_2$.

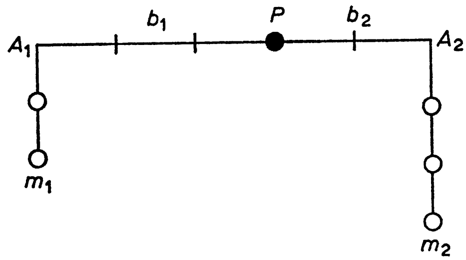


Fig. 1.

On a introduit, d'une façon naturelle, le symbolisme

$$m_1 A + m_2 A = mP,$$

c'est-à-dire *une masse multipliée par un point* pour indiquer la masse concentrée dans ce point.

Par exemple, le barycentre du système $2A_1$ et $3A_2$ est un point P où est concentré un poids 5; brièvement, on écrit:

$$2A_1 + 3A_2 = 5P.$$

La position de P est vite trouvée: il suffit de partager A_1A_2 en 5 parties égales et d'en prendre 3 à partir de A_1 (et donc 2 à partir de A_2).

Il est évident que l'équilibre n'est pas altéré si l'on double en même temps les deux poids m_1, m_2, ou si l'on les multiplie par un nombre quelconque. Donc, en général, à tout point P d'un segment A_1A_2 on peut faire correspondre une infinité de couples équivalents. Pour fixer un couple on fait la convention de choisir m_1, m_2 de façon que leur somme soit égale à 1:

$$(1) \qquad m_1 + m_2 = 1.$$

m_1, m_2 avec la condition (1) sont *les coordonnées barycentriques du point P.* Les coordonnées barycentriques d'un point sont donc des poids.

Dans le cas précédent les coordonnées barycentriques de P sont $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{5}$.

Or, tout cela, qui pour un adulte ne pose pas de problèmes, a suscité un tas de questions de la part des élèves. En effet – et il suffit de rappeler les recherches de Jean Piaget à propos de l'équilibre du levier – cette loi marque le passage de la logique de l'enfant à celle de l'adolescent, et concerne donc l'âge des nos élèves. Les enfants, en effet, sont amenés *à substituer à la loi additive (poids plus bras) la loi multiplicative.* Dès qu'ils arrivent à se rendre compte que c'est la loi multiplicative qui donne l'équilibre, ils sentent le besoin de comprendre le pourquoi par des moyens qui ne sont pas seulement expérimentaux: "d'autant plus – remarquent certains – que si l'on voyage vers la lune le poids n'a aucune signification". En regardant encore le levier en équilibre ils sont conduits à remplacer la sensation physique par la vision géométrique: ils 'voient' des rectangles pendus ayant la même surface (Figure 2).

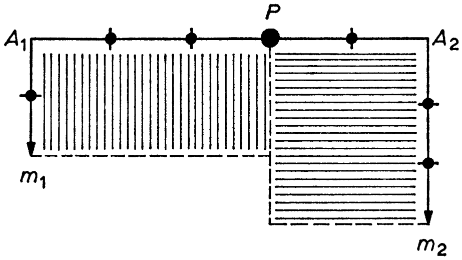


Fig. 2.

2. *Le triangle barycentrique*

On est vite passé de la droite au plan: de la barre à un triangle 'sans poids', réalisé avec un filet à mailles serrées (Figure 6). On a appliqué des poids aux trois sommets et on a suspendu le triangle. On a vu que si les poids sont égaux, par exemple égaux à 1, le barycentre se trouve dans une position particulière qu'on a établi en se basant deux fois sur la loi du levier (Figure 3): si le triangle est ABC on determine le barycentre $2D$ entre $1A$ et $1B$, et puis le barycentre $3P$ entre $2D$ et $1C$.

Les enfants connaissaient déjà la propriété du point d'intersection des médianes: on l'avait obtenue à partir de considérations géométriques sur le *triangle équilatéral,* et on l'avait généralisée à un triangle quelconque en se basant sur les propriétés de l'affinité. Maintenant, en s'appuyant sur la loi du levier, chaque point P du triangle (Figure 4) – et nous prenons un triangle équilatéral, bien que toutes les considérations qu'on va faire soient valables pour un triangle quelconque – reste caractérisé comme barycentre de trois poids convenables m_1, m_2, m_3 appliqués aux sommets. C'est-à-dire que, pour tout triplet m_1, m_2, m_3, il existe un point et un seul (car on peut démontrer que si, pour la determination du barycentre, on suit une autre voie on tombe toujours sur le même point) tel que le triangle suspendu par P est en équilibre.

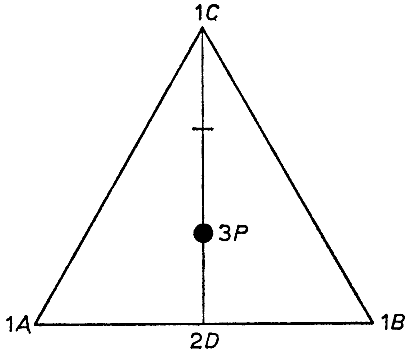


Fig. 3.

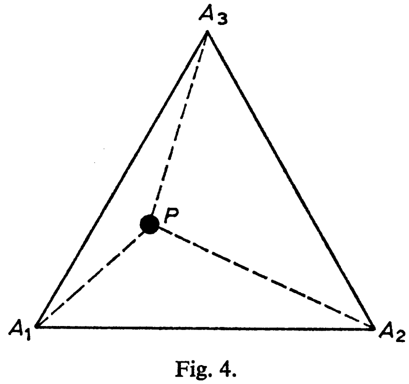


Fig. 4.

Afin d'établir une correspondence bi-univoque entre chaque point du triangle et un triplet m_1, m_2, m_3 on fait la convention:

$$(1) \qquad m_1 + m_2 + m_3 = 1\,.$$

m_1, m_2, m_3 avec la condition (1) sont *les coordonnées barycentriques d'un point P du triangle.* Les coordonnées barycentriques d'un point sont donc des poids. Or, exactement comme cela s'était passé pour la barre-levier, les enfants ne sont pas satisfaits de la seule signification physique. Tous soutiennent que les coordonnées barycentriques doivent être liées aux distances

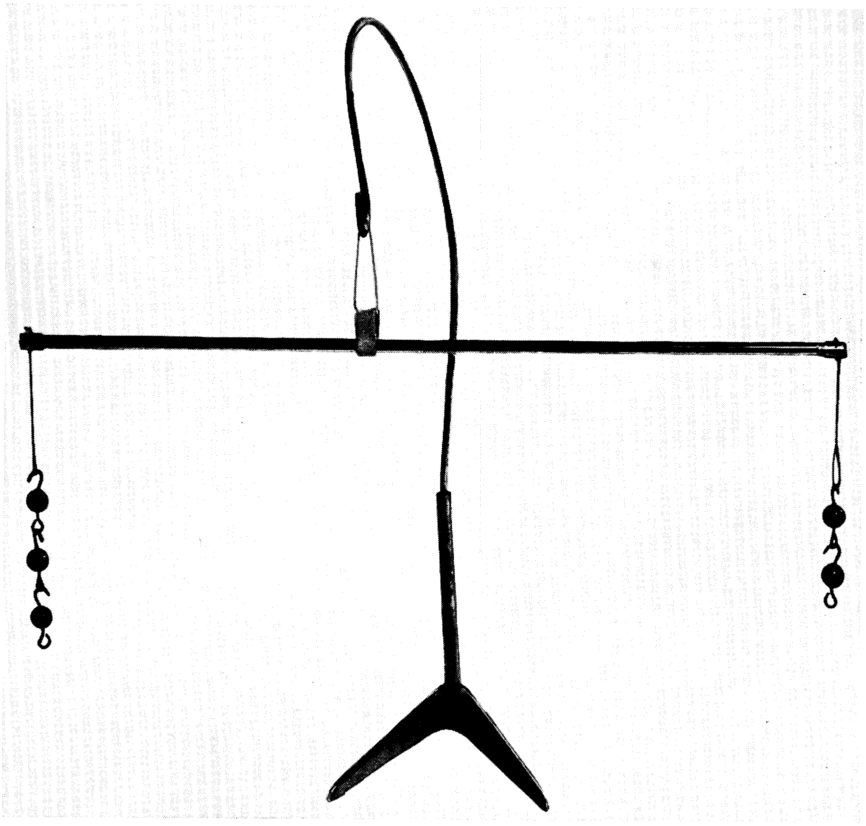


Fig. 5.

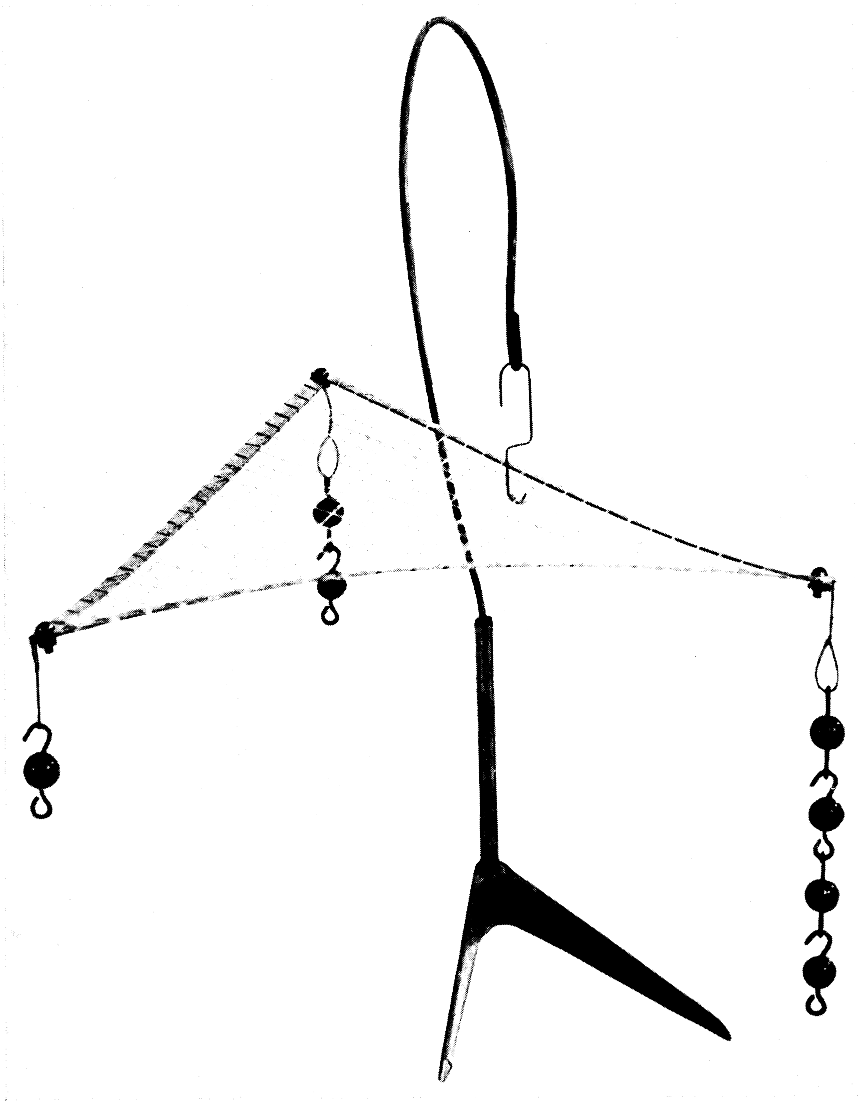


Fig. 6.

PA_1, PA_2, PA_3: "Si le poids m_1 est plus grand, la distance PA_1 est plus petite". L'idée d'une proportionnalité inverse surgit. "Mais non – dit quelqu'un – il n'y a pas un rapport constant car si l'on réduit m_1 à la moitié, tout en gardant égale la somme des trois poids, il n'est pas vrai que la distance PA_1 devienne le double." Alors on pense au levier, mais, en raisonnant mal par analogie, on tombe encore une fois dans l'erreur. Une fillette dit: "Je vois trois rectangles pendus qui ont pour base la distance de P à chaque sommet et pour hauteur les poids 'stylisés' en vecteurs". On donne des valeurs aux poids, on applique le théorème de Pythagore pour déterminer les longueurs PA_1, PA_2, PA_3, mais, hélas! ... les surfaces qui en résultent ne sont pas égales.

Pendant ces discussions auxquelles tout le monde participait avec – dirais-je – 'éxubérance', un garçon avait fait le dessin de la Figure 7. Ce dessin suggère deux solutions. L'un dit: "Voilà, nous sommes dans l'espace; il ne

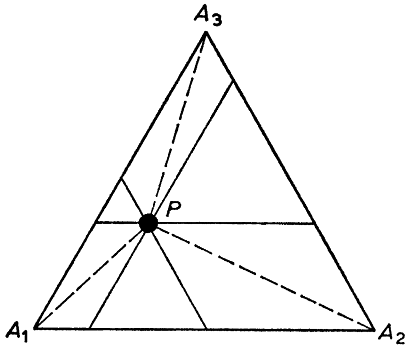


Fig. 7.

peut pas s'agir de surfaces égales mais de volumes". Et il vérifie par le dessin de la Figure 8 que les volumes des trois *parallélépipèdes* ayant pour bases les parallélogrammes de diagonales PA_1, PA_2, PA_3, et pour hauteurs les vecteurs représentant des poids appliqués respectivement à A_1, A_2, A_3 sont égaux.

Le même dessin suggère à d'autres camarades une interprétation physique (Figure 9): "C'est comme si le point A_1 était tiré par une corde en direction A_2 avec une force égale à 1, et par une corde ayant la direction A_3 avec une force égale à 2". On a donc été conduit à étudier la composition des forces, des vecteurs. Un élève a réalisé le dispositif que vous voyez dans la Figure 13; il s'agit de ceci: trois fils liés par un nœud portent à l'extrémité des poids. En superposant cet arrangement à un triangle rigide tenu horizontalement, de sorte que les fils descendent des trois sommets, on observe que le nœud

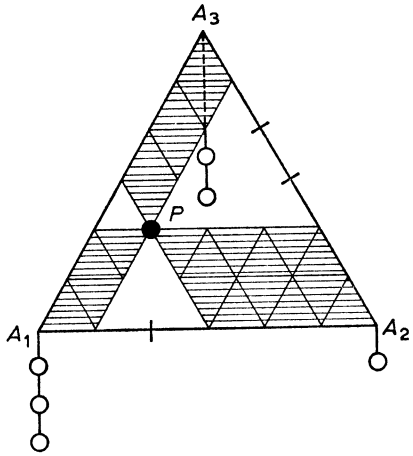


Fig. 8.

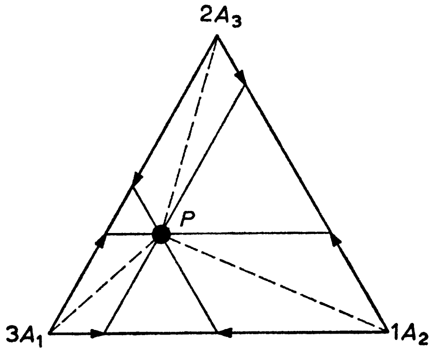


Fig. 9.

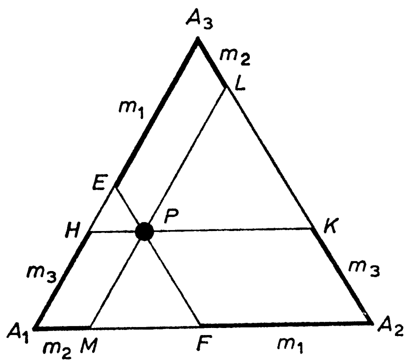


Fig. 10.

se deplace ici et là selon les poids appliqués. En particulier, il prend la position du centre du triangle si les trois poids sont égaux. Ce dispositif montre la *composition des forces* et, en même temps, caractérise chaque point du triangle comme barycentre de poids convenables.

C'est toujours le même dessin qui a suggéré une autre observation. Un élève a mis en évidence que les segments (Figure 10) A_3E, A_2F, A_1M, A_3L, A_1H, A_2K indiquent graphiquement la valeur des poids m_1, m_2, m_3. Voilà l'interprétation classique de la signification géométrique des coordonnées barycentriques.

3. *L'équation d'une droite*

La signification géométrique des coordonnées barycentriques conduit tout naturellement à donner un 'nom', c'est-à-dire une équation aux droites parallèles aux côtés du triangle: par exemple (Figure 11) la droite qui 'dé-

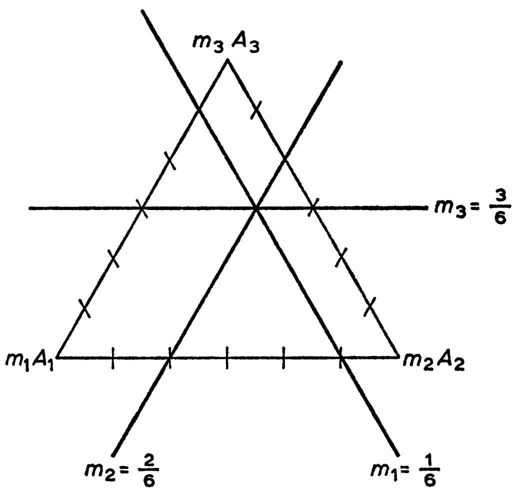


Fig. 11.

tache' un segment $m_1 = \frac{1}{6}$ à partir du côté opposé à A_1 aura l'équation $m_1 = \frac{1}{6}$; celle qui détache un segment $m_2 = \frac{2}{6}$ à partir du côté opposé à A_2 aura l'équation $m_2 = \frac{2}{6}$; et l'autre aura l'équation $m_3 = \frac{3}{6}$. On comprend donc que les droites parallèles à A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 ont respectivement pour équation

$$m_1 = k, \quad m_2 = k, \quad m_3 = k.$$

On pourrait aussi trouver l'équation de ces droites en exprimant la condition d'équilibre d'un triangle matériel qui 'se balance' sur un axe, comme s'il s'agissait d'une lame de couteau. Dans la Figure 14 vous voyez un triangle en bois qui est en équilibre sur une planchette très mince. Voilà le raisonnement qui vient tout spontanément: si le triangle doit être en équilibre sur une droite, par exemple sur la droite r de la Figure 12, une partie m_1' du

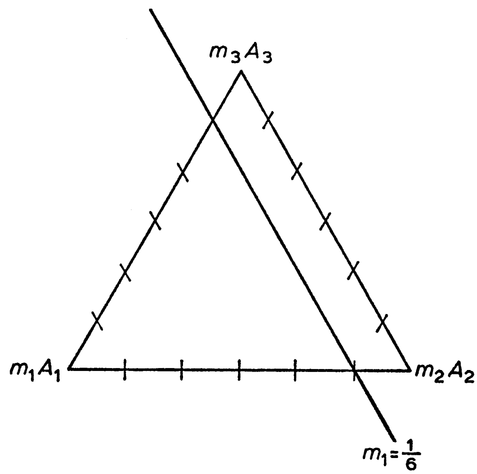


Fig. 12.

poids m_1 doit équilibrer le poids m_2, tandis que l'autre partie m_1'' doit équilibrer le poids m_3. C'est comme s'il y avait deux leviers A_1A_2 et A_1A_3. Les conditions d'équilibre

$$m_1' \cdot 5 = m_2 \cdot 1$$
$$m_1'' \cdot 5 = m_3 \cdot 1$$

donnent, par addition, l'équation de la droite r

$$(1) \qquad 5m_1 = m_2 + m_3 .$$

De cette équation, qui a un aspect plus significatif du point de vue physique, on peut passer à la forme

$$m_1 = \tfrac{1}{6},$$

qu'on avait trouvé tout à l'heure, en se rappelant que $m_1 + m_2 + m_3 = 1$.

C'est toujours la même méthode, voir la division d'un poids en deux, qui nous a conduit à écrire l'équation d'une droite quelconque. Par exemple, pour trouver l'équation de la droite s dessinée dans la Figure 15 on a par-

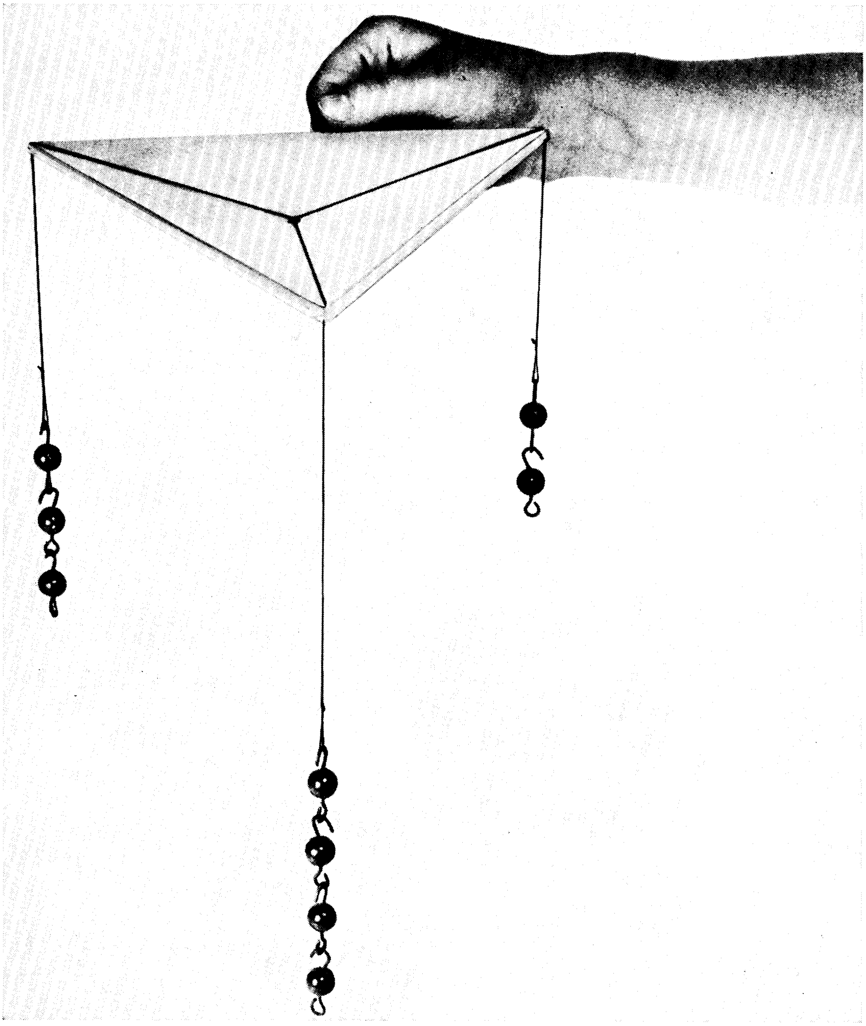


Fig. 13.

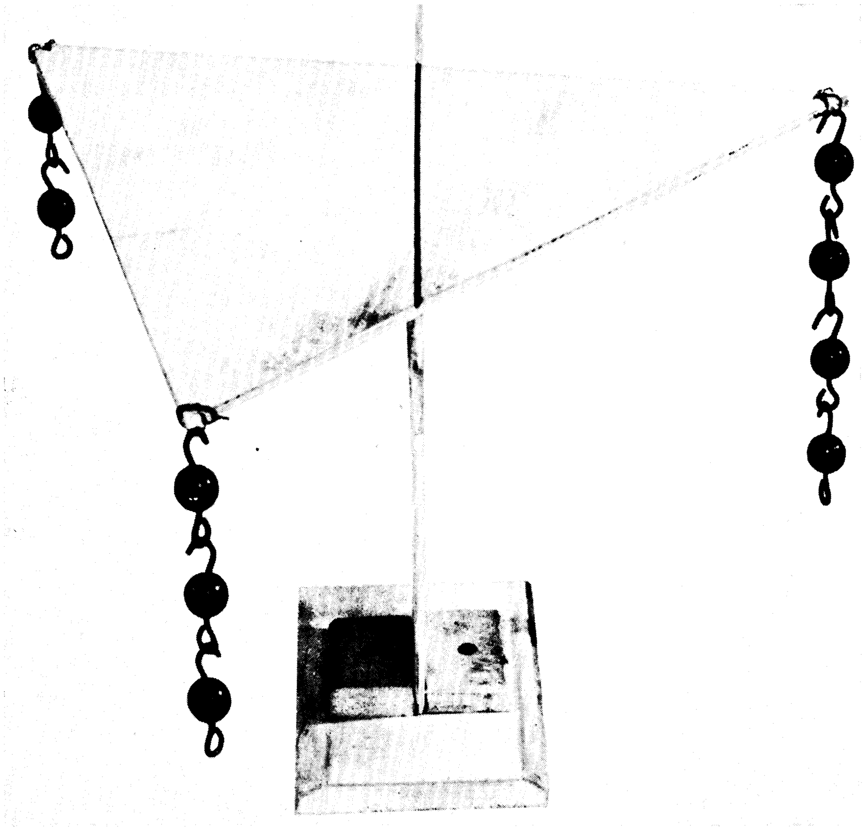


Fig. 14.

tagé le poids m_3 en deux parties, l'une m_3' équilibrant le poids m_1, et l'autre m_3'' équilibrant le poids m_2. En additionnant les deux conditions d'équilibre on trouve l'équation

$$6m_3 = 9m_1 + 2m_2\,.$$

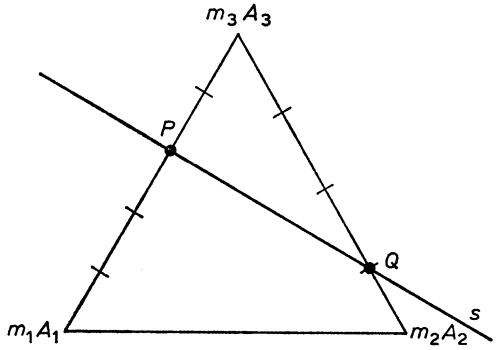


Fig. 15.

Il faut remarquer que pour établir l'équation d'une droite on pouvait aussi se baser sur la notion de *moment axial*, en 'se libérant' ensuite de cette notion métrique par des considérations sur la similitude des triangles, considérations qui permettent de remplacer les distances des trois sommets de la droite considérée par les segments determinés par cette droite sur les côtés. De cette façon, au lieu de partager un poids, on est conduit à 'altérer' les bras: dans l'exemple précédent on reduit les bras A_3P et A_3Q de m_3 au même nombre de parties: 6 (Figure 16). Les bras de m_1 et m_2 deviendront évidemment composés de 9 et 2 parties. On peut alors écrire tout de suite la condition

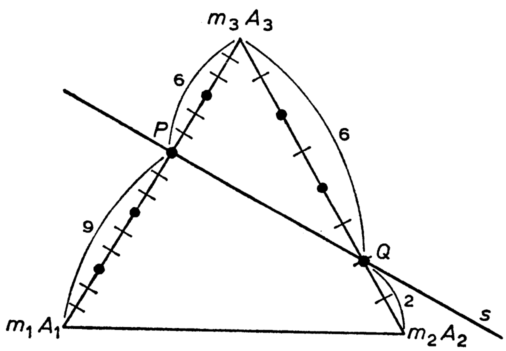


Fig. 16.

d'équilibre qui est l'équation de notre droite s:

$$m_3 \cdot 6 = m_1 \cdot 9 + m_2 \cdot 2 .$$

4. *Droites parallèles*

On avait remarqué avec les enfants à propos des droites parallèles aux côtés que la forme non homogène de l'équation indique si deux droites sont parallèles: par exemple les droites $m_3 = \frac{1}{4}$ et $m_3 = \frac{3}{4}$ sont parallèles; l'équation diffère seulement par le terme connu. La même chose arrive pour une droite quelconque. Par exemple la droite d'équation

$$6m_3 = 9m_1 + 2m_2$$

peut s'écrire, par élimination de m_3 (étant donné que $m_1 + m_2 + m_3 = 1$), comme ceci:

$$15m_1 + 8m_2 = 6 .$$

Le terme '6' a une signification géométrique: il distingue les droites d'un faisceau de droites parallèles. On peut, de cette façon, écrire l'équation de la parallèle à cette droite passant par n'importe quel point: par exemple, les parallèles passant par A_1, A_2, A_3 (Figure 17) auront pour équations

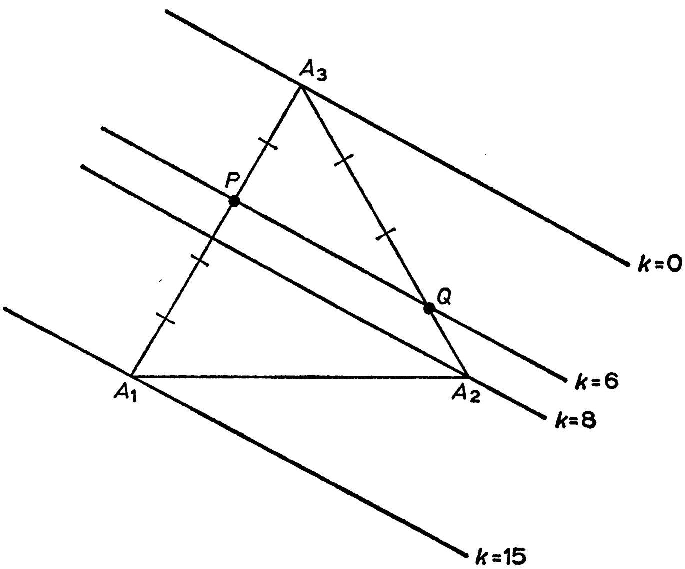


Fig. 17.

respectives:

$$15m_1 + 8m_2 = 15$$
$$15m_1 + 8m_2 = 8$$
$$15m_1 + 8m_2 = 0.$$

De manière générale, l'équation d'une droite parallèle à la droite issue de A_3 et d'équation:

$$am_1 + bm_2 = 0$$

est la suivante:

$$am_1 + bm_2 = k.$$

5. *Inéquations et demi-plans*

Pendant notre travail sur les droites on avait trouvé qu'une droite passant par un sommet du triangle a une équation bien simple. Par exemple, la

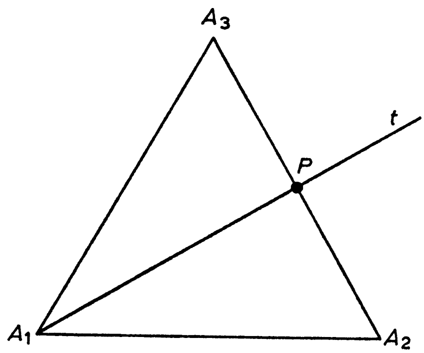


Fig. 18.

droite t (Figure 18) passant par A_1 et le milieu P de A_2A_3 a l'équation

$$m_2 = m_3,$$

car c'est justement là la condition d'équilibre du triangle sur 'la lame de couteau' t.

Il est évident que si l'on a l'inéquation

$$m_2 > m_3$$

le triangle penche du côté de A_2.

L'inéquation

$$m_2 < m_3$$

caractérisera le demi-plan contenant A_3.

Ces considérations d'ordre physique sont valables évidemment aussi pour une droite quelconque. Par exemple, la droite v (Figure 19) d'équation

$$2m_1 = 3m_2 + 5m_3$$

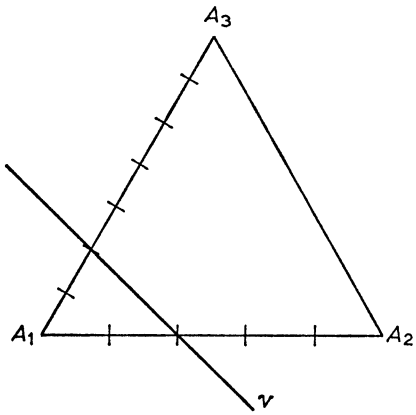


Fig. 19.

partage le plan en deux demi-plans à chacun desquels correspond une inéquation, et précisement: l'inéquation

$$2m_1 > 3m_2 + 5m_3$$

caractérise le demi-plan contenant A_1 car le triangle, si cette inéquation est valable, penche *du côté* de A_1; tandis que

$$2m_1 < 3m_2 + 5m_3$$

caractérise le demi-plan contenant A_2 et A_3.

B. QUELQUES APPLICATIONS

La première partie de mon expérience à l'école a pris plus de temps que je n'avais pensé à cause des questions si variées qui se présentaient à tout moment à l'esprit des enfants: la signification physique et la signification géométrique se superposaient quelquefois, d'autres fois semblaient être en contradiction, d'autres fois encore se clarifiaient l'une par l'autre, mais dans tous les cas faisaient ressortir les différentes sensibilités et aptitudes des élèves.

La seconde partie a été consacrée aux applications: probabilité; programmation linéaire; colorimétrie. Elle a passionné les enfants comme je ne l'avais encore jamais vu, et si la fin officielle des cours n'y avait mis un terme, je serais encore en train de l'étudier avec mes élèves!

1. *Probabilité*

J'ai commencé par donner quelques exemples de probabilité (la probabilité pour que, en jetant un dé, il présente telle ou telle face; que la somme des nombres qu'on obtient en jetant deux dés soit égale à une certaine valeur; ...) dans le but d'amener les enfants à concevoir la probabilité comme rapport entre le nombre des cas favorables et le nombre des cas possibles. Ensuite, par quelques exemples, je suis passée à la notion de probabilité statistique.

Tout ceci assez brièvement: je n'avais pas le temps et je voulais arriver à résoudre quelques questions à l'aide du calcul barycentrique.

J'ai posé le problème: on a une baguette d'un matériel fragile; on sait que lorsqu'elle tombe, elle se casse toujours en trois morceaux, et que tout point est 'équi-cassable'. Les trois pièces peuvent donc être d'une longueur quelconque. On demande: quelle est la probabilité avec ces trois pièces de pouvoir construire un triangle? Les enfants, tout en connaissant l'inégalité triangulaire, répondent d'un ton assuré: "Oh, c'est très probable!" Mais, comment calculer cette probabilité? L'idée de faire appel au calcul barycentrique vient tout de suite dès que je dis: les trois pièces, on ne les connaît pas, elles seront plus ou moins longues; indiquons-les par m_1, m_2, m_3 (Figure 20). On a observé: "On pourrait dire que m_1, m_2, m_3 représentent aussi les poids si la baguette est homogène, et alors on peut les mettre aux sommets d'un triangle barycentrique!"

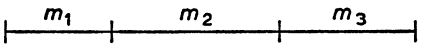


Fig. 20.

C'est tout ce que j'ai obtenu de la part des élèves. J'espérais la suite; mais plus tard, je me suis rendue compte qu'il s'agissait d'une énorme abstraction. C'est donc moi qui ai continué le discours en disant que, par conséquent, à chaque point de notre triangle barycentrique venait correspondre une certaine subdivision de la baguette. Un point signifiait donc une subdivision, c'est-à-dire un événement. J'ai eu pour quelques instants l'impression d'avoir 'franchi' le seuil des possibilités d'abstraction des enfants: quelques instants, en effet, d'un silence absolu. Puis, un garçon a dit: "Alors le centre du triangle va représenter la division de la baguette en trois parties égales". Tout d'un coup la classe a saisi: il y en a qui se sont précipités au tableau noir comme si, en marquant à la craie quelques points du triangle, ils pouvaient confirmer à eux-mêmes cette chose extraordinaire: un point représentait telle ou telle situation.

A ce moment-là je n'ai eu qu'à rappeler notre problème: nous ne nous intéressons pas, dis-je, qu'aux points qui représentent une subdivision qui permette de construire un triangle. Ce sont les élèves qui les découvrent: il s'agira de trois longueurs m_1, m_2, m_3 telles que (il suffit de regarder la baguette)

$$m_1 \leqslant \tfrac{1}{2}, \quad m_2 \leqslant \tfrac{1}{2}, \quad m_3 \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Or, chaque inéquation caractérise un demi-plan sur notre modèle (Figure 21).

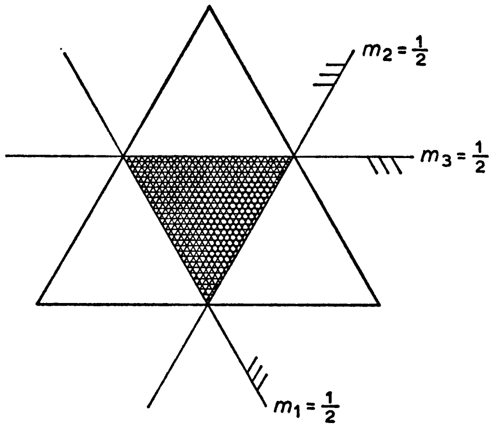


Fig. 21.

Et le modèle parle tout seul: les cas favorables sont renfermés dans un triangle qui est $\frac{1}{4}$ de tout le triangle, c'est-à-dire de tous les cas possibles. Interprétant les rapports d'aire comme des probabilités on peut dire que la probabilité d'obtenir un triangle est seulement égale à $\frac{1}{4}$.

On a suivi ici le genre de démonstration synthétique utilisée par le probabiliste Bruno de Finetti à propos de distributions au hasard; cela signifie, dans le modèle, qu'il y a une densité de probabilité uniforme dans tout le triangle barycentrique. La probabilité est, dans ce cas, la mesure (ici la surface) de l'ensemble des points satisfaisant aux conditions fixées.

Il est inutile de vous dire combien les enfants ont été impressionnés d'avoir résolu par des moyens si élémentaires un problème qui apparaissait fort mystérieux. J'ai entendu un élève qui disait: "J'ai compris, c'est ça la mathématique: c'est d'imaginer!"

J'ai cherché à donner des exemples dans le but de mettre en relief la portée de cette méthode pour la détermination de la probabilité dans le cas d'une distribution au hasard: on peut trouver des exemples en physique comme la prévision des désintégrations d'une particule en trois particules d'énergies différentes selon la direction des forces qui la bombardent (phénomène connu comme Dalitz Plot).

2. *Programmation linéaire*

L'application qui a frappé davantage les enfants a été l'application relative à la programmation linéaire. Le terme 'programmation' n'était pas nouveau pour les élèves: en effet à la télévision et à la radio on parle bien souvent de programmer le plan de telle ou telle industrie ou entreprise, mais ils n'avaient pas du tout d'idées sur ce travail.

Nous avons considéré une fabrication particulière, celle du chocolat. J'ai pris cet exemple dans l'article de M. Freudenthal. La fabrication du chocolat intéresse particulièrement les enfants.

Les composants fondamentaux du chocolat sont: cacao, sucre et lait. Ces composants entrent dans des quantités différentes m_1, m_2, m_3 selon la qualité du chocolat. Ce sont les élèves qui, maintenant, poursuivent le discours. Ils représentent les trois composants comme sommets C, S, L d'un triangle (Figure 22) et donnent, eux-mêmes, l'interprétation: à chaque point du triangle correspond un mélange de cacao, sucre et lait; les chocolats plus

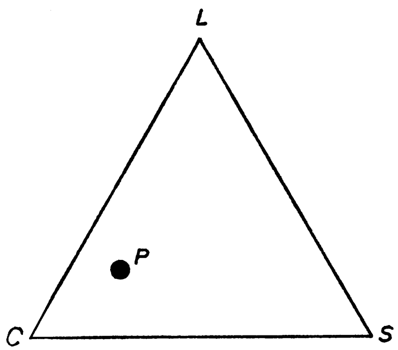


Fig. 22.

amers se trouvent vers le sommet C, les plus sucrés vers S et les chocolats 'plus au lait' se trouvent vers le sommet L. Quand-même – dis-je – il faut faire attention: il est vrai qu'à tout point du triangle correspond un certain mélange, mais certains mélanges sont trop liquides ou trop sucrés ou, encore, ne correspondent pas à la demande du marché. Bref, il y a des conditions auxquelles doivent satisfaire les quantités m_1, m_2, m_3.

Soient, par exemple, les conditions suivantes:

$$(1) \qquad \begin{cases} m_3 \leqslant \frac{1}{2} \\ m_2 \leqslant 3m_1 \\ m_2 \leqslant 3m_3 \\ m_1 \leqslant m_3 + 3m_2 . \end{cases}$$

Chaque inéquation caractérise un demi-plan, et il est facile pour les enfants de déterminer la zone définie par ces inéquations (Figure 23). Le diagramme nous dit qu'il y a un cas, représenté par le point R, dans lequel interviennent seulement deux composants: cacao et lait; c'est le chocolat pour les diabétiques!

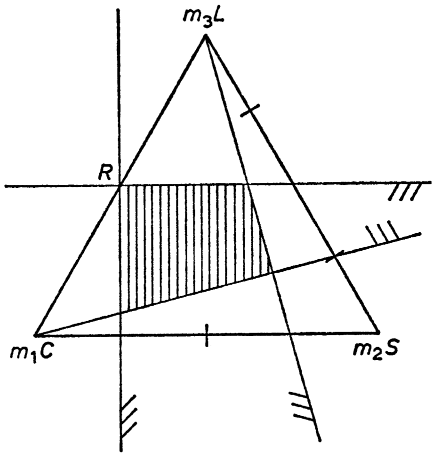


Fig. 23.

C'est maintenant que commence la partie la plus intéressante: celle qui concerne le prix des différents genres de chocolat. Si l'on suppose que les prix unitaires p_1, p_2, p_3 du cacao, sucre et lait soient dans le rapport

$$p_1 : p_2 : p_3 = 4 : 2 : 1 ,$$

le prix total de la matière première pour un chocolat contenant des quantités m_1, m_2, m_3 de cacao, sucre et lait sera:

$$(2) \qquad p = 4m_1 + 2m_2 + 1m_3 .$$

La (2) est l'équation des prix de notre mélange: à tout triplet (m_1, m_2, m_3), c'est-à-dire à tout point du triangle, la (2) fait correspondre un prix. Ce prix doit être considéré dans la zone où l'on peut fabriquer le chocolat. Or, la (2) est une droite et nous savons que lorsque le terme connu p change, la droite se déplace parallèlement à elle-même. Pour avoir la direction de cette droite il suffira de donner à p une valeur quelconque, par exemple la valeur zéro, bien que cela n'ait aucun sens dans un problème de prix. La droite d'équation

$$4m_1 + 2m_2 + 1m_3 = 0$$

est, évidemment, 'hors' du triangle. Pour la dessiner il suffit de trouver les points d'intersection avec deux côtés, par exemple CS et SL. On a:

$$2m_1 = -1m_2 \quad \text{et} \quad 2m_2 = -1m_3 .$$

Ces valeurs négatives n'étonnent pas les élèves car on avait déjà rencontré ce cas à propos du levier. Ils sont donc à même de dessiner la droite des prix dans le cas $p=0$ (Figure 24).

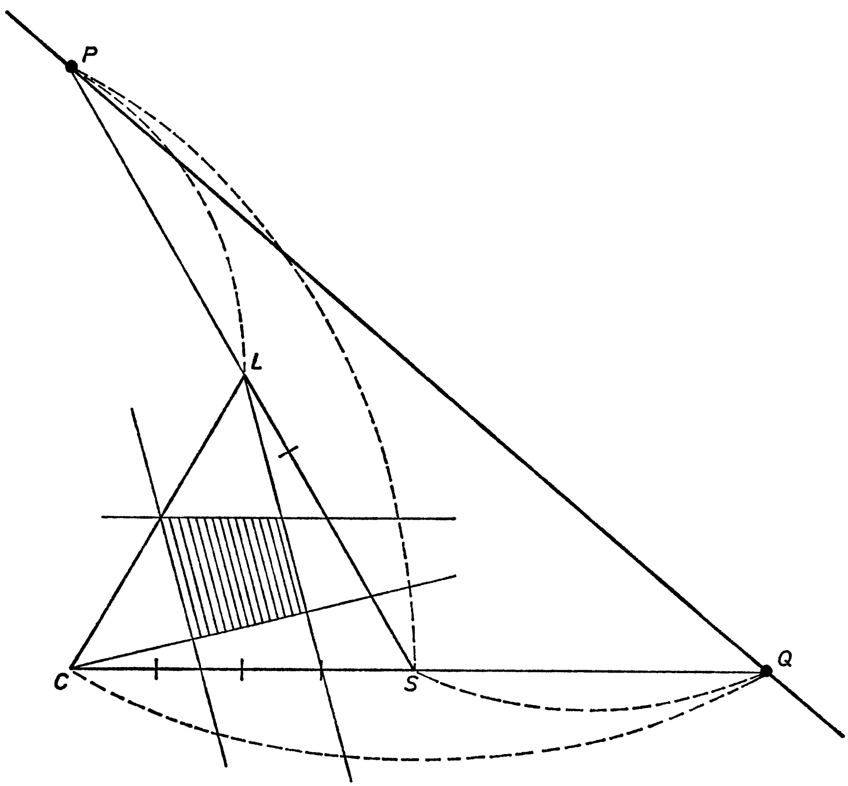


Fig. 24.

En faisant déplacer la droite parallèlement à elle-même on se rend compte graphiquement du prix de chaque sorte de chocolat (Figure 25). Lorsque la droite passe par L le prix est évidemment 1 car c'est le prix du lait. Puis, la droite traverse le triangle et à un moment donné arrive à la zone de production: nous sommes en A. "Quel est le prix du chocolat A?" demandent les enfants. Il faut connaître premièrement la composition du chocolat A (on trouve $m_1=\frac{1}{8}$, $m_2=\frac{3}{8}$, $m_3=\frac{4}{8}$), et ensuite il est facile d'établir le prix (on trouve $p=\frac{7}{4}$; il s'agit du prix minimum.

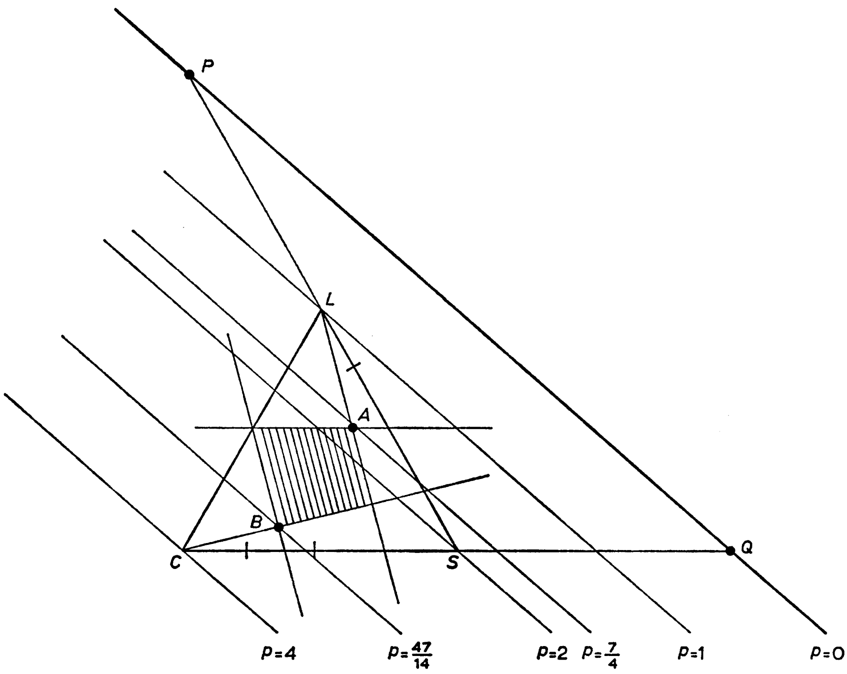


Fig. 25.

La droite continue à se déplacer et passe par S: dans ce cas le prix est 2, comme pour le sucre.

On arrive au point B, avant de sortir de la zone intéressée: on a ici le prix maximum (on peut vérifier que la composition du chocolat B est $m_1=\frac{10}{14}$, $m_2=\frac{3}{14}$, $m_3=\frac{1}{14}$, et le prix correspondant est $\frac{47}{14}$).

Tous les prix sont donc compris entre $\frac{7}{4}=\frac{49}{28}$ et $\frac{47}{14}=\frac{94}{28}$, c'est-à-dire entre 49 et 94. Ce qui frappe l'attention c'est qu'il y a différents genres de chocolat qui, sans avoir la même composition, ont un prix de revient égal pour le fabricant: ils correspondent à des points qui se trouvent sur la même droite de prix.

On a considéré bien d'autres problèmes de programmation: de la fabrication de produits zootechniques aux problèmes de transport, de la production des engrais à celle des alliages ternaires .... Un jour, j'entre en classe et on me dit tout de suite: "Avez-vous entendu le télé-journal hier soir? On a dit qu'a la Chambre des Députés, ils sont en train de mettre au point un plan régional; on a dit qu'il s'agit d'un problème de programmation linéaire avec trois paramètres: la surface de la région, le nombre des habitants et le revenu régional. Pourquoi ne pas leur proposer de nous faire faire ce travail?" Je vous dis tout cela car j'ai eu l'impression de développer une mathématique sociale: le cours de mathématiques avait fait prendre conscience du pays, des ses problèmes plus graves et, donc, plus intéressants.

3. *La colorimétrie*

J'ai voulu terminer en beauté, par un sujet esthétique: la couleur. Un sujet qui apparaît aux enfants comme très loin de la mathématique. Ils ont été fort frappés en apprenant que trois couleurs 'indépendantes' sont suffisantes pour produire n'importe quelle couleur, et que la composition des couleurs a été mathématisée il y a un siècle par H. Grassmann. Cette théorie vient d'être précisée récemment, mais il y a encore bien de choses obscures du point de vue physiologique. Nous avons dit 'trois couleurs indépendantes', mais si nous voulons obtenir toutes (ou presque toutes) les nuances de couleur par synthèse additive il vaut mieux prendre comme système de référence le rouge, le vert et le bleu, définis par certaines longueurs d'onde de façon que le mélange des trois unités de chaque couleur donne le blanc (c'est la Convention International de 1931).

Le fait que chaque couleur peut s'obtenir par synthèse additive à partir de ces trois couleurs fondamentales suggère tout naturellement le modèle du triangle barycentrique où les sommets représentent le rouge, le vert et le bleu (Figure 26). Les différentes quantités m_1, m_2, m_3 avec lesquelles ces

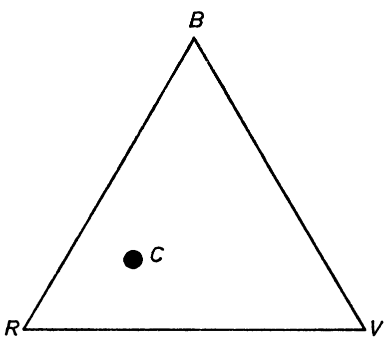


Fig. 26.

couleurs interviennent dans un mélange caractérisent la couleur composée C comme ceci:

$$C = m_1R + m_2V + m_3B.$$

Si $m_1 = m_2 = m_3 = \frac{1}{3}$ on a le blanc, car on a justement choisi les longueurs d'ondes de façon que le mélange des trois quantités égales soit le blanc. Le blanc se trouve donc dans le centre O du triangle (Figure 27). Les points qui se trouvent sur les côtés sont les mélanges de deux couleurs: par exemple le milieu du côté RV est le jaune (un certain jaune); le milieu de BV est le bleu-paon; le milieu de RB est le cramoisi. Il est fort intéressant de remarquer que

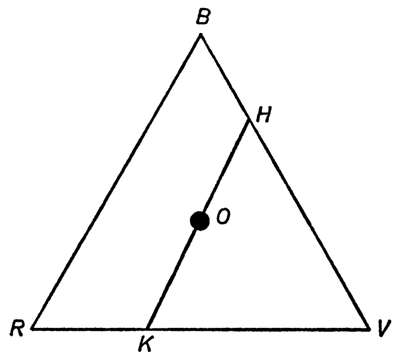


Fig. 27.

le complémentaire d'une couleur représentée par un point H d'un côté est le point K intersection de la droite HO avec un autre côté du triangle; autrement dit: tout segment passant par le centre de figure O relie des couleurs complémentaires représentées par deux points du contour. On constate ainsi, en particulier, que le jaune est complémentaire du bleu; le cramoisi du vert; ....

On a rendu cette théorie encore plus vivante en réalisant l'expérience grâce à trois lampes illuminant des verres respectivement rouge, vert et bleu.

Le problème des couleurs donne lieu à des questions qui sortent de la physique pour atteindre la physiologie de l'œil, et – comme on l'a dit – c'est justement ici que bien des questions sont loin d'être résolues. Par exemple, on est arrivé à établir que des distributions différentes de lumières, c'est-à-dire des triplets différents m_1, m_2, m_3, peuvent donner la même sensation de couleur. Ces triplets se trouveraient sur des lignes. On a donc un phénomène analogue à celui qu'on a rencontré dans la programmation linéaire: dans la programmation il y a différents mélanges alignés sur des droites qui correspondent au même prix; ici il y auraient des lignes 'iso-couleur'.

C'est ainsi que j'ai terminé notre 'promenade' dans le monde des couleurs: en faisant toucher, d'une part, des problèmes qui sont encore loin d'être résolus, et en mettant en relief, d'autre part, la grande importance qu'a aujourd'hui la synthèse additive pour ce qui concerne la télévision en couleurs.

Il est temps, maintenant, de mettre fin aussi à cet exposé. Je vous invite à réfléchir sur les réactions des enfants.

Après le premier moment d'étonnement, les enfants se sont très vite faits à l'idée de donner aux points les interprétations les plus variées: un point est un mélange, un événement, une couleur. Ils se sont habitués à concevoir le point précédé d'un coefficient comme un tout unique: c'était le point-masse, et le coefficient pouvait signifier un poids, une longueur, une quantité quelconque. Les lignes représentaient quelques fois des produits de prix égal, d'autres fois la même sensation de couleur. Les demi-plans indiquaient des zones de production ou l'ensemble des événements favorables, ou les couleurs d'une certaine tonalité.

Ils se sont habitués à additionner les points-masse, à les multiplier par un nombre, à les diviser en parties, ...; et, ici et là, ils ont eu l'impression (mais il ne s'agissait pas seulement d'une impression) que ces points doués d'un coefficient 'tiraient' comme s'ils étaient des forces: ils étaient comme des vecteurs et il se conduisaient comme des vecteurs. Le plan où l'on travaillait, était donc muni de vecteurs; ce plan se colorait tantôt d'une signification physique comme le poids, si on était dans un champ gravitationnel, tantôt retenait seulement la signification géométrique; d'autres fois il acquérait une valeur économique (la production et le prix), ou indiquait une probabilité en suggérant une prévision sur un phénomène physique ou chimique; d'autres fois, enfin, il se colorait vraiment de toute la gamme de couleurs et nous conduisait dans le vif des recherches actuelles sur la télévision en couleurs ou sur la physiologie de l'œil. Notre plan était donc tel: on l'avait rendu riche de tant d'interprétations seulement en lui donnant trois points et la loi d'équilibre du levier. Tel était aussi le plan que A. F. Möbius avait conçu en 1827 dans le but d'étudier 'de tout près' la géométrie projective, en créant ce calcul barycentrique jugé d'importance douteuse par quelques-uns de ses grands contemporains. Les enfants ont compris quel formidable outil constitue aujourd'hui cette création d'il y a un siècle et demi.

J'aimerais terminer en précisant la véritable finalité didactique: plusieurs parmi vous connaissent mes idées sur des questions de pédagogie mathématique. Permettez-moi de les répéter: je ne crois pas que pour arriver à une systématisation axiomatique on doive énoncer axiomes et définitions préalables, qui resteront toujours des choses froides pour l'esprit des enfants bien qu'on essaie de les illustrer par des exemples concrets. Les enfants âgés de 11 à 14 ans ne sont pas à même de goûter tout cela, et il y a le grand danger que l'axiomatique la plus moderne et la plus belle puisse dégénerer dans le formalisme et le dogmatisme le plus absurde. On peut aller très loin dans l'abstraction – et on vient de le voir – mais en faisant toujours naître les idées du concret, du réel. C'est ainsi que les enfants seront actifs au point de créer la théorie avec vous. Cette première phase, née du concret, sera la base naturelle sur quoi, dans un second cycle, on pourra bâtir une *axiomatique.*

J'ai voulu cette année-ci réaliser une autre expérience dans ce sens, et j'ai pensé vous en parler: mon problème était de construire une base concrète pour les espaces vectoriels. Prenez ce que je viens de dire dans cet exposé pour ce que c'est: un travail fait en collaboration avec mes élèves de 13 ans.

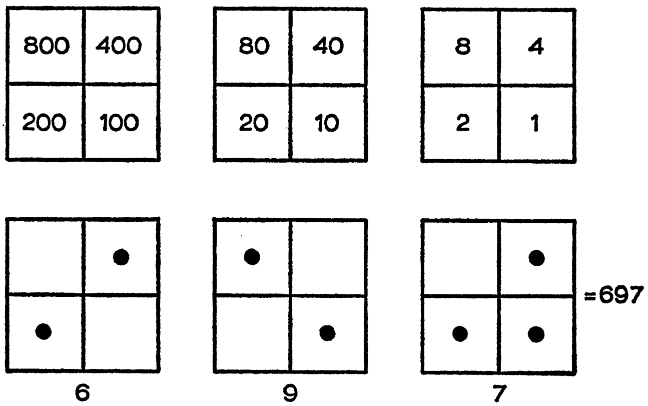
Rome, le 12 juin 1969

FRÉDÉRIQUE PAPY

MINICOMPUTER

La méthode que nous avons utilisée pour initier l'enfant de six ans au calcul numérique mécanique ou mental utilise les avantages décisifs du binaire sur tout autre système de position, tout en tenant compte du contexte décimal dans lequel nous sommes plongés. Il nous a été possible d'atteindre ce résultat grâce à MINICOMPUTER de Papy.

Inspiré par certains travaux de Monseigneur Lemaître, ce genre d'abaque bidimensionnel utilise harmonieusement le binaire à l'intérieur de plaques organisées décimalement [L] et [Mi].[1]



Les couleurs rappellent la gamme des rouges de CUISENAIRE qui facilite l'accès aux quatre règles de la machine.

---

2 octobre 1967

FRÉDÉRIQUE suspend au tableau une plaque de MINICOMPUTER mural.

marron	*mauve*
rouge	*blanc*

– OH! CE SONT NOS COULEURS! dit Jean-Jacques, en montrant une réglette blanche, une rouge, une mauve et une réglette de couleur marron.

– *Tu as raison!*

Nous allons jouer tous ensemble, vous avec vos réglettes, moi avec cette grande plaque et ces pions.

FRÉDÉRIQUE pose deux pions noirs sur la case blanche.

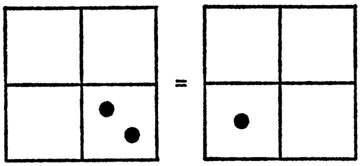
– OH ! ILS TIENNENT TOUT SEULS ! dit un enfant émerveillé.

– *Accrochez deux wagons blancs.*

– C'EST COMME UN ROUGE !

– *Un train blanc-blanc a même longueur qu'un wagon rouge.*

FRÉDÉRIQUE retire les deux pions noirs de la case blanche et en pose un sur la case rouge.



– *Deux pions sur la case blanche égale un pion sur la rouge.*

Les enfants adoptent bien vite l'amusant raccourci

"un rouge" pour "un pion sur la case rouge".

D'où le slogan

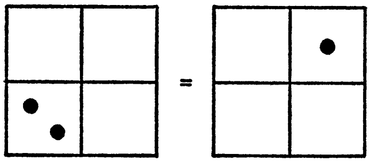
"deux blancs égale un rouge".

– *Poursuivons le jeu !*

FRÉDÉRIQUE pose deux pions noirs sur la case rouge; les enfants accrochent deux wagons rouges.

– C'EST COMME UN WAGON MAUVE !

FRÉDÉRIQUE retire les deux pions de la case rouge et en pose un sur la case mauve.



– DEUX ROUGES ÉGALE UN MAUVE.

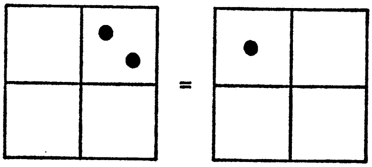
Jean-Jacques brûle d'envie de manipuler les pions aimantés et implore

– MADAME ! JE PEUX JOUER ?

FRÉDÉRIQUE acquiesce et Jean-Jacques enlève le pion noir de la case mauve et y place deux pions verts.

– OH ! C'EST BEAU !
– *Accrochez deux wagons mauves.*
– C'EST COMME UN WAGON MARRON.

FRÉDÉRIQUE enlève les pions verts de la case mauve et en pose un sur la case marron.



– DEUX MAUVES ÉGALE UN MARRON.

(La leçon continue…)

---

5 octobre 1967

– *Nouveau jeu !*

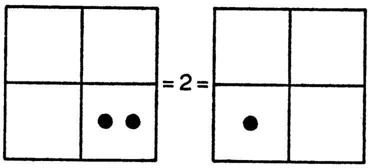
FRÉDÉRIQUE pose un pion sur la case blanche.

– 1

Elle pose un deuxième pion sur la case blanche.

– 2

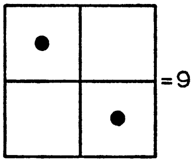
– JE PEUX JOUER AUTREMENT ! dit Carine. Elle enlève les 2 pions de la case blanche et en pose un sur la rouge.



– *Ajoutons* 1 *au nombre* 2, propose FRÉDÉRIQUE en posant un nouveau pion sur la case blanche.
– C'EST 3.
– COMME AVEC LES RÉGLETTES, ROUGE-BLANC.
– OU VERT CLAIR.
– *Ajoutons* 1 *au nombre* 3, poursuit FRÉDÉRIQUE en posant un nouveau pion sur la case blanche.
– C'EST 4.
– JE PEUX JOUER AUTREMENT, dit Sylvie qui retire les deux pions de la case blanche et en place un sur la rouge.
– ENCORE AUTREMENT, affirme Jean-Philippe en remplaçant les deux pions de la case rouge par un pion sur la mauve.

– *Continuons d'ajouter* 1 ...

La litanie se poursuit et les nombres 5, 6, 7, 8, 9 apparaissent sur MINICOMPUTER.



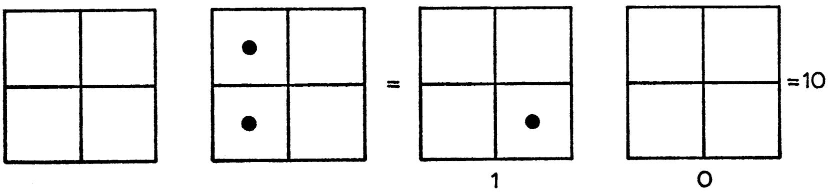
– *Ajoutons* 1 *au nombre* 9

Un enfant pose un pion sur la case blanche.

– C'EST 10.
– JE LE JOUE AUTREMENT, dit Anita en remplaçant les deux pions de la case blanche par un pion sur la rouge.
– C'EST LE TRAIN ROUGE-MARRON.
– LA RÉGLETTE ORANGE.
– C'EST 10.

FRÉDÉRIQUE suspend au tableau une deuxième plaque de MINICOMPUTER, à gauche de la première. Elle remplace le pion de la case rouge et celui de la case marron par un pion sur la case blanche de la nouvelle plaque, en disant simplement:

– *Et voici encore* 10.



– HOP ! SUR LA DEUXIÈME PLAQUE, commente Jean-Jacques nullement étonné.

(La leçon continue...)

Ainsi armés, nos élèves sont capables de représenter sur MINICOMPUTER le nombre d'éléments d'un ensemble de pions placés sur la case 1. L'application régressive des quatre règles fondamentales permet de conserver le contact concret avec un nombre écrit ou représenté sur la machine.

---

13 octobre 1967

Deux petites plaques de MINICOMPUTER et une boîte de pions sur le pupitre de chaque enfant.

– *Combien de pions dans votre boîte?*
– 29 ... 32 ... 18 ... 26 ... 35 ...

Les boîtes des enfants sont inégalement remplies!

– *Placez la boîte de pions sur la case blanche de la première plaque. Jouez ... puis écrivez le résultat.*

Premier long travail individuel sur MINICOMPUTER: concentration, gestes précis et rapides; certains enfants parviennent au but sans erreur.
Maladresses techniques, pions renversés, fausses manœuvres; il faut aider les autres.

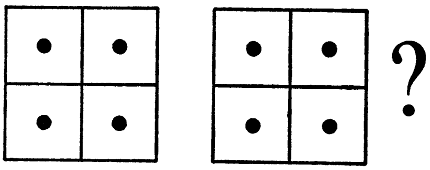
La deuxième partie de la leçon se joue sur MINICOMPUTER mural.
On part du nombre 25 formé sur la machine. On ramène tous les pions dans la case blanche de la première plaque et on les compte: confirmation!

Après 15 jours, la pression de la classe m'oblige à introduire une troisième plaque et à accepter des nombres plus grands que 100.

---

13 octobre 1967

– SI JE METS UN PION SUR CHACUNE DES CASES DE LA MACHINE, AI-JE MARQUÉ LE NOMBRE 100, demande Didier pour lequel MINICOMPUTER est encore une machine à deux plaques.



FRÉDÉRIQUE ne répond pas. Elle pressent que le problème sera reposé, sous une forme nouvelle et préfère laisser la pensée de l'enfant suivre son cheminement spontané.

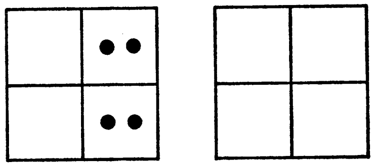
---

24 octobre 1967

Didier revient à la charge.

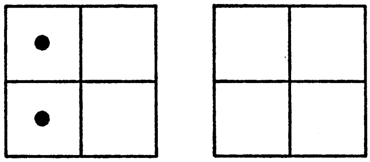
– JE VEUX MARQUER 100 SUR LA MACHINE.
– *Eh bien... tire ton plan!*

– 100, C'EST DEUX FOIS 50, poursuit Didier, qui marque

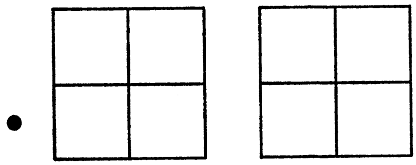


– JE PEUX JOUER !

Il remplace les deux pions de la case blanche par un pion sur la rouge et les deux pions de la case mauve par un pion sur la case marron.



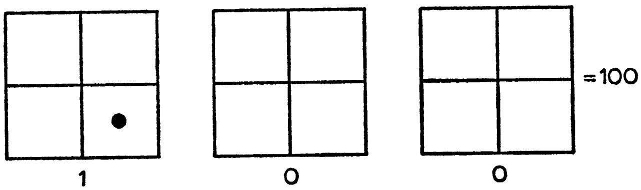
– JE VEUX ENCORE JOUER ! dit-il en retirant le pion de la case rouge et celui de la case marron et en plaçant un pion à gauche de la deuxième plaque.



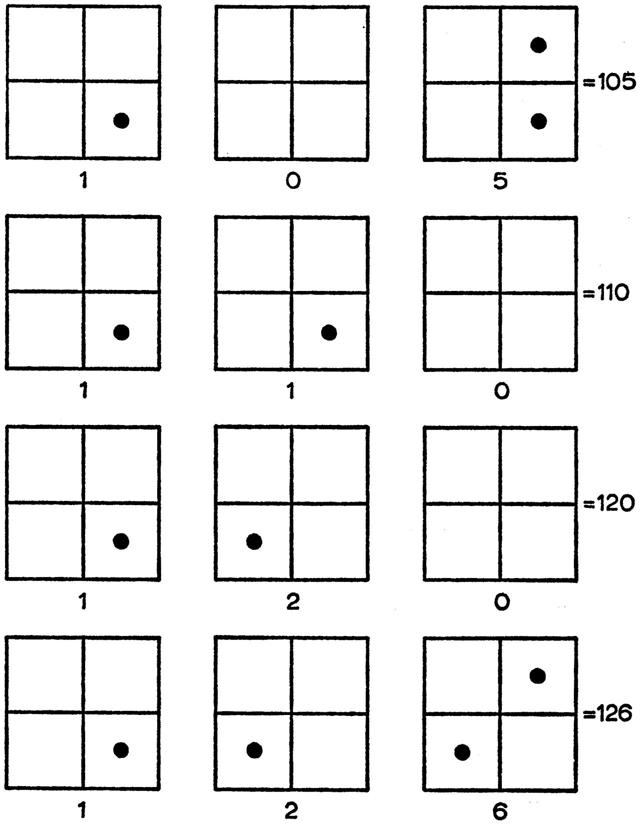
Et Didier revendique.

– MADAME ! IL ME FAUT UNE NOUVELLE PLAQUE !

FRÉDÉRIQUE la lui donne. Triomphant, Didier forme le nombre 100.



Surexcité, il clame des nombres en les formant sur la machine.



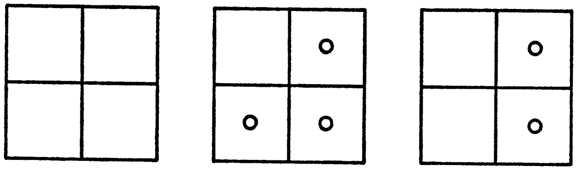
La classe impressionnée a participé à la découverte

L'addition d'entiers naturels s'effectue de manière automatique en "jouant" sur la machine. Il en est de même de l'opération *doubler*, une des notions primitives chez l'enfant et fondamentale dans MINICOMPUTER.

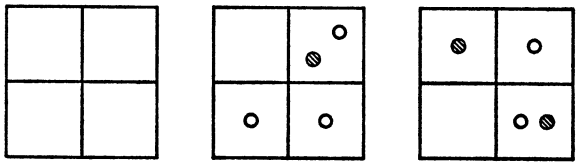
La part de mémoire arbitraire si souvent rebutante dans l'apprentissage du calcul est réduite au minimum. L'addition des petits nombres eux-mêmes est effectuée selon des règles intelligibles : le système binaire pur lorsque la somme est inférieure à 9 et un système mixte décimal-binaire dans les autres cas. Les enfants sont ainsi initiés dès le début à un système de numération de position.

– *Dans ce parking, j'ai compté* 75 *Volkswagen et* 49 *Mercédès. Combien d'automobiles en tout?*

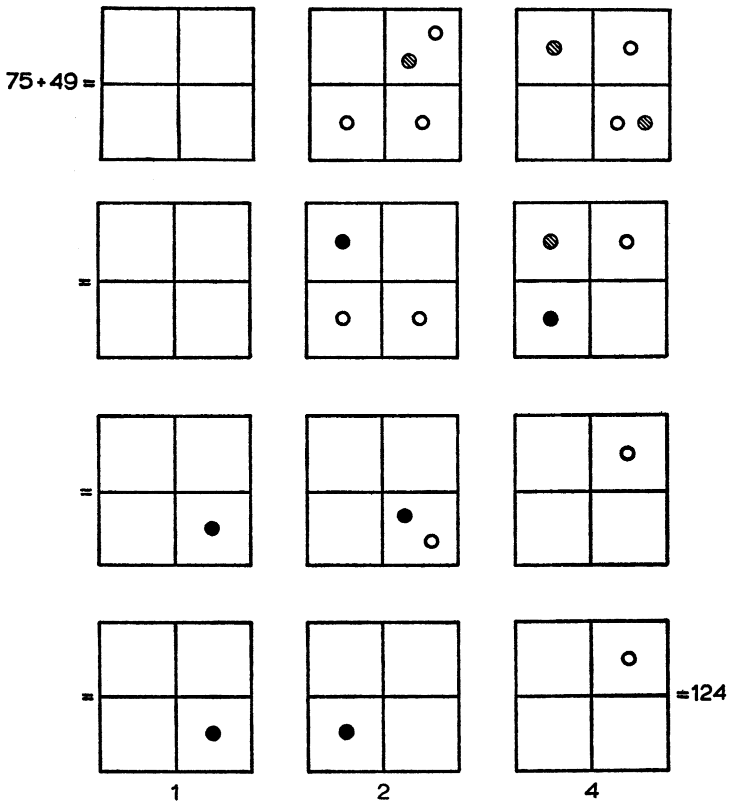
– MARQUONS 75 EN ROUGE[2] !



– ET 49 EN VERT[3] !



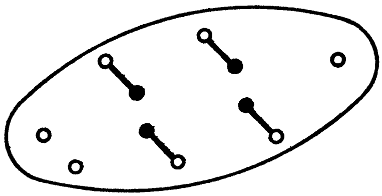
– JE PEUX JOUER, MADAME?



ENTIERS NÉGATIFS

Chaque matin, les enfants notent la température en degrés centigrades (Celsius). A Bruxelles, au début de l'année scolaire, uniquement des nombres naturels; les mois d'hiver imposent les négatifs. *Au sixième mois*, les entiers négatifs se trouvent dans la connaissance commune des élèves avec le statut de nombres authentiques servant à "mesurer" une "grandeur" bien sensible.

La notation des résultats d'une suite de parties de dés, jouées par deux enfants, utilise des nombres rouges[4] et bleus[5], aux effets antagonistes, puisque tout point gagné par l'un des joueurs tue un point gagné par l'autre. Il s'en suit une addition de nombres rouges et bleus. A la notation près, les élèves accèdent au groupe additif des entiers rationnels.



7+4=3

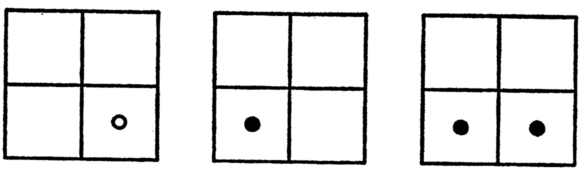
Ultérieurement, on simplifie l'écriture: tous les nombres sont écrits en noir, les anciens bleus étant surmontés d'une petite barre. Cette fois, nous avons effectivement le groupe Z, +, à une toute petite variante près, $\bar{3}$ étant mis pour -3. On a reconnu depuis longtemps les avantages que présente pour les débutants la notation $\bar{3}$, couramment utilisée dans les calculs logarithmiques de jadis.

Tout au début, nous notons le résultat de chaque partie en plaçant des pions, rouges et bleus, sur un plateau. Une bataille d'extermination fournit le score final. Spontanément les élèves transfèrent le procédé à MINICOMPUTER.

– *Un calcul pour grands:* 100+23

Excitation sur tous les bancs!

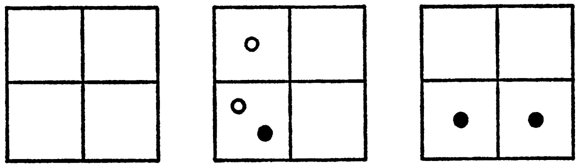
– *Sur la machine!*



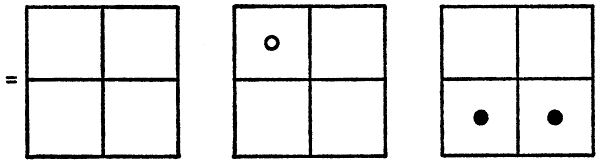
– *Vainqueur?*

– ROUGE!

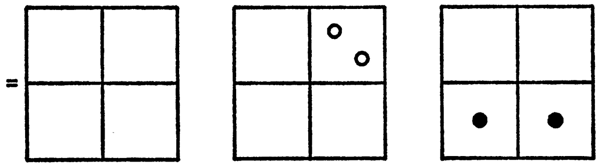
– *Soldats rouges, attaquez les bleus!*



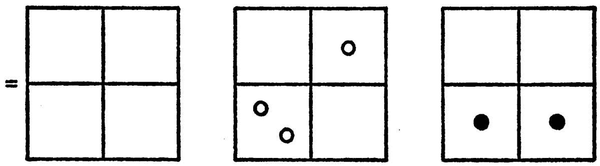
Match nul !



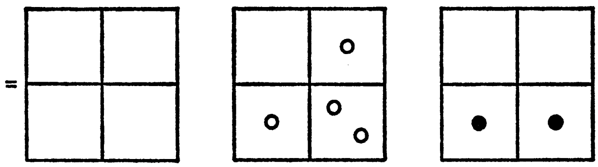
A l'assaut des bleus !



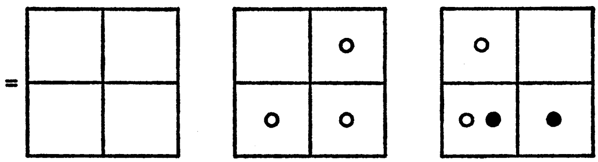
A l'assaut des bleus !



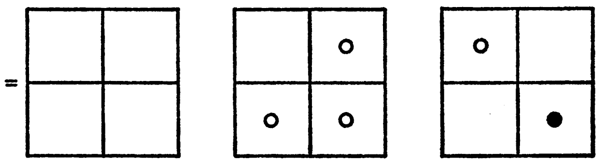
A l'assaut des bleus !



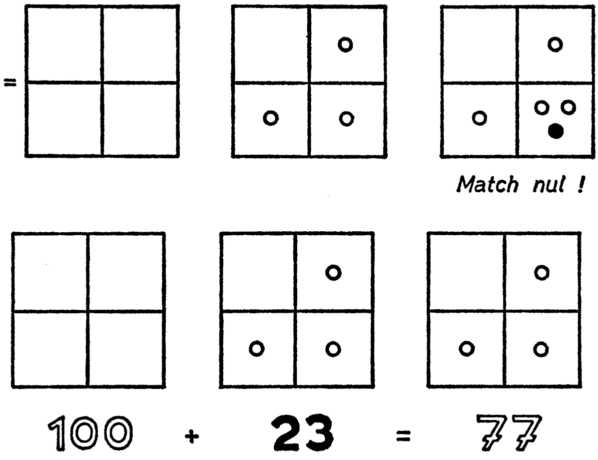
A l'assaut des bleus !



Match nul ! Deux morts !

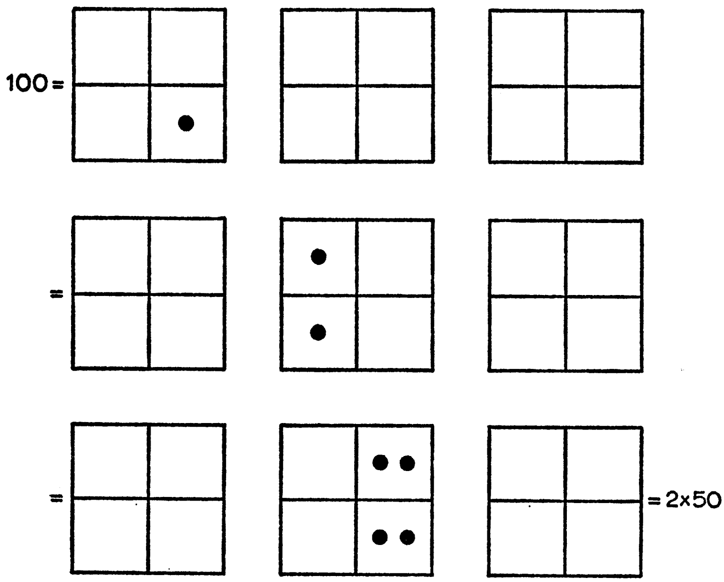


etc...



Dans notre enseignement, la fonction *demi* apparaît comme la réciproque de la fonction *double* qui est une transformation de Z, c'est-à-dire une fonction de Z dans Z. Mais il existe des nombres qui ne sont pas le double d'un entier rationnel. Ils n'ont pas d'entier rationnel comme demi.

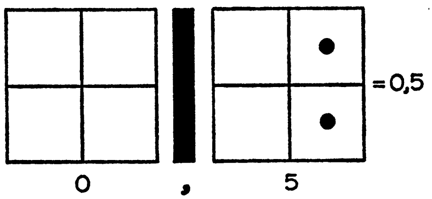
Un bâton de chocolat peut équitablement se casser en deux. Un billet de 100 F s'échange contre deux billets de 50 F. Il est vrai que 100 est un nombre pair. Mais 1 F s'échange aussi équitablement contre deux pièces de 50 cmes



qui heureusement intéressent toujours les enfants de 6 ans. Il leur semble dès lors très naturel de rechercher un demi de 1 sur la machine.

C'est en voulant écrire 100, comme double de 50, que les élèves m'avaient littéralement obligée à leur donner la troisième plaque. A présent, nous mettons 100 sur la machine et nous observons la technique qui permet d'en trouver la moitié. De même avec le nombre 10.

Comment appliquer la même règle pour calculer le demi de 1? Les enfants demandent une nouvelle plaque, à droite, et la baptisent aussitôt "plaque des minuscules". Comment se rappeler qu'il s'agit d'une "plaque de minuscules"? En mettant une barrière sous forme de ligne verte[6]: la future virgule. Ainsi calculons-nous le demi de 1 que nous écrivons 0,5.



Le problème du partage équitable de 100 F entre trois enfants introduit une situation prodigieusement intéressante. La première idée de nombre décimal illimité perce dans cette remarque d'enfant: "On sera encore ici demain matin ..."

L'intérêt que manifestent les enfants de 6 ans pour les nombres assez grands impose qu'on leur soumette également des calculs non motivés présentés comme des sortes de défi. Grâce a MINICOMPUTER, nos élèves additionnent et soustraient des nombres de trois chiffres et les multiplient par des fractions simples. Ce travail est très formatif parce qu'il exige une grande concentration pour découvrir chaque fois les bonnes stratégies. Ces exercices contribuent à créer une harmonieuse symbiose entre l'être humain intelligent et l'authentique machine que MINICOMPUTER constitue aux yeux des élèves.

Bruxelles

BIBLIOGRAPHIE

[L] Lemaître, G., 'Comment calculer?', *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique – Classe des Sciences*, Bruxelles, 1954.
Lemaître, G., 'Pourquoi de nouveaux chiffres?', *Revue des Questions scientifiques*, 20 juillet 1955.
Lemaître, G., 'Le Calcul élémentaire', *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique –* Classe des Sciences, Bruxelles, 1956.

Lemaître, G., *Calculons sans fatigue*, E. Nauwelaerts, Louvain, 1954.
[Mi] Papy, *MINICOMPUTER*, Bruxelles, IVAC, 1968.
[MM1] Papy, *Mathématique Moderne 1*, Bruxelles-Paris-Montréal, Didier, 1963. Traduction anglaise: Mcmillan, New-York, London.
[EG] Papy et Frédérique, *L'Enfant et les Graphes*, Bruxelles-Montréal-Paris, Didier, 1968. Traduction anglaise: Algonquin, Montreal.
[EM] Frédérique, *Les Enfants et la Mathématique*, vol. 1, Bruxelles-Montréal-Paris, Didier, 1970. Traduction anglaise: Algonquin, Montreal.

Les comptes-rendus de leçons de cet article sont extraits de [EM] et ont pu être reproduits par courtoisie de l'Éditeur.

NOTES

[1] Les crochets renvoient à la bibliographie placée en fin d'article.
[2] Cercles clairs.
[3] Cercles hachés.
[4] Cercles clairs.
[5] Cercles noirs.
[6] Noire.

BRYAN THWAITES

THE ROLE OF THE COMPUTER IN SCHOOL MATHEMATICS*

I. INTRODUCTION

To begin with, it is not irrelevant to make a brief remark about the sociological and psychological effects which the discovery and application of the electronic computer are creating in our human society.

Most people in the well-developed countries of the Western World are now aware of the computer – they are aware of the fact that the traffic lights in their cities are probably controlled by computer; they see their airline reservations being instantly and magically made under their very eyes; their bank accounts are processed and printed out by computer; and they are aware of the truly stupendous achievements in real-time computing which are implicit in the Space Programme. They are aware, in other words, of the fact that the computer is becoming the all-pervading power by which the machine, which is our modern society, is made to work.

This very awareness is, without doubt, leading to a suspicion, a resentment, an antipathy, even a fear, of the computer in the mind of the ordinary man in the street. He sees the computer as a potential threat to his own essential humanity; at the back of his mind are science-fiction horrors of computers taking change of things (in some sense) and propagating themselves as a new species of beings.

Young people[1], especially the more intelligent ones, are particularly conscious of the trends in our human society which seem to be subjugating the individual and his humanity beneath remote and inhuman influences. This consciousness is surely one component in the present wave of "student unrest". Far from being thrilled and stimulated by the power which lies at their hands, these young people dismiss it as irrelevant to their existential purpose in life – though, of course, few can formulate any comprehensible vision of an alternative structure for the mechanisms of society.

This brief excursion into sociology is necessarily cast in very general terms, and it has emphasised only those attitudes which inhibit a constructive understanding of the computer's role in society; yet these attitudes will have a profound effect on the way in which teachers introduce computers in our curricula. A good teacher adjusts his teaching methods to the attitudes of his pupils; the best teacher succeeds in turning any and every attitude to the advantage of the teaching process. But these attitudes towards the computer pose new problems for educational methodology and we must recognise them frankly.

II. THE PROFESSIONAL MATHEMATICIAN

One cannot help feeling that many of the antipathies outlined above are shared by the professional mathematician or mathematical teacher. Too often one seems able to discern an ostrich-like conservatism which seems to prevent many mathematicians even from finding out how their own studies may profit from the latest techniques.[2]

Lest one is too hard on the ostriches, it may be admitted that there appear to be at least two good historical reasons for their claim that they are not ostriches. First, there is much in the argument that mathematics is unique amongst intellectual disciplines in being a pyramidal edifice of inexorable conclusions based on unchallengeable postulates, and that, as a consequence, it evolves in an essentially gradual and systematic manner. Looking backwards over the last three thousand years, we can barely discern any discontinuities in this evolution. The obvious candidate is the calculus, but even the work of Newton and Leibniz could be described as a renaissance, in that applications of the infinitesimal had already been anticipated successfully by ancient mathematicians such as Pythagoras. From this, it might be argued, discontinuities in the future are unlikely.

But this is much too cautious an extrapolation. Well within the next century, we shall be wearing computers of huge power on our wrists and instantaneous translation devices round our necks, and fantastic problems will be solved by laser-communication on vast computers in permanent earth-orbits. Analytic continuation is a little difficult in the neighbourhood of such singularities.

The second ostrich argument is even simpler. It is that the computer is only the latest member of a whole sequence of inventions – the abacus, the compass and protractor, the slide rule, the hand-calculating machine – and that while these have helped mathematicians, they certainly do not possess inherent potential for mathematical creativity. This is often reinforced by the observation that the ratio of mathematical to non-mathematical work – or of numerical to non-numerical – being done by the world's computers is rapidly tending to zero. Thus the computer can no longer be regarded as a mathematical device at all.

It seems to me, therefore, that it will be useful in this paper to indicate some of the ways in which computers will soon be radically affecting the evolution of mathematics, and to encourage teachers of mathematics – not only in schools but also in universities – towards the view that teaching syllabuses must soon be orientated towards the computer. It is necessary to set the general scene, and only a brief reference will be made to the kind of research and activity in the classroom which might take place in the next few years.

In contrast, no consideration is given to the need for instruction in general computer appreciation (that need certainly exists, but it is not necessarily the mathematician's job to satisfy it), nor to what is becoming known as Computer-Aided Instruction whereby the actual teaching process is conducted through the medium of the computer; nor, finally, to the application of primitive devices such as hand-calculating machines.

In my thesis that the computer has a significant role in the actual practice of mathematics itself, there are two main lines of thought. First, it will be argued that the ultimate objective of mathematical investigations into deterministic physical systems is the production of numbers and that, soon, computers will be able to produce whatever numbers are required far more effectively than our conventional theoretical methods. Second, it will be argued (and much more significantly) that the analytical apparatus in our mathematical tool-kit is, in fact, extremely primitive, and that the computer offers us a power of technique which will transcend all our present capabilities.

III. THE SCOPE OF THE COMPUTER IN APPLIED MATHEMATICS

The first line of thought can be conveniently exemplified from that branch of knowledge which, in England, is called 'applied mathematics' and of which the English are quite inordinately proud. It is a tradition which derives from the fact that Newton happened to choose parents who were English! Let us consider an extremely simple example of how the computer helps the study of classical Newtonian problems.

Consider, therefore, a boundary-value problem posed on one of the very simplest differential equations, the two-dimensional Laplace equation. Despite the intensive theoretical treatment to which this has been subjected over the last century (and the emphasis laid on it in undergraduate courses), the class of boundary shapes which yield explicit solutions in closed form is highly restricted.

Figure 1 shows a shape falling outside this class, that of the front-half of a submarine. The broken line shows the fluid velocity on its surface as calculated by a standard method, and this is to be compared with the experimental points shewn as triangle dots. We notice that the theoretical method is in fact so crude that it entirely smoothes out the effects of a surface bump even as gentle as this one. In contrast to this, a straightforward computer calculation based on discrete source-rings in the surface produces a velocity

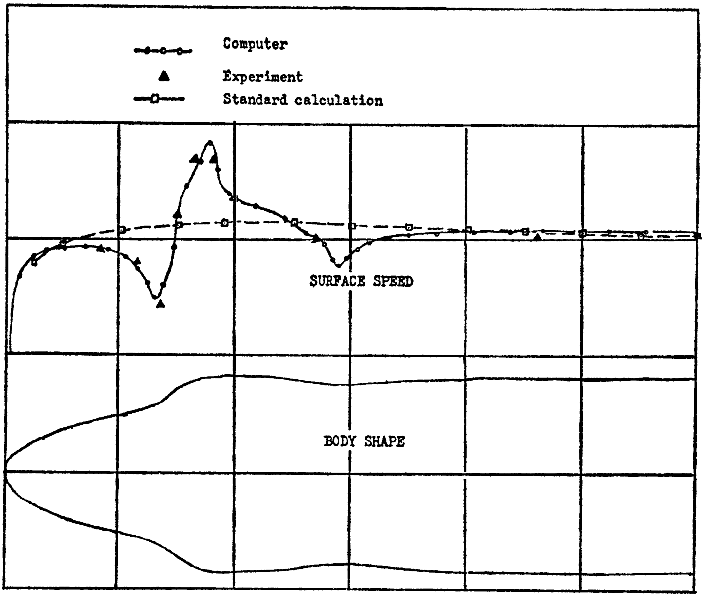


Fig. 1. The computer obtains solutions for a wider class of physical problems than can be solved by classical methods, as is illustrated by this comparison of three attempts to find the fluid speed on the surface of a body of revolution submerged in a stream parallel to its axis.

distribution which clearly reflects the details of geometrical shape and, incidentally, is in close agreement with experiment. Such a computerized method of solution therefore is, in effect, a definitive method applicable to a generality of surface incomparably wider than can be successfully tackled by other methods; it renders obsolete analytical procedures for solving Laplace's equation for such a class of problem.

The next example indicates one of the ways in which the sheer speed of the computer makes possible new ways of examining physical situations. It relates to the Bénard problem, that is to the motion of a heat-conducting fluid which is heated from below. Let us consider the two-dimensional case of fluid contained between two horizontal strips, the lower of which is maintained at a temperature higher than that of the upper. The fluid will clearly not stay at rest. The heated lower layers become buoyant and feel the urge to rise; thus rising spouts of hotter fluid form and elsewhere downdraughts of cooler fluid. The character of the flow depends on the Rayleigh number R which may be interpreted as the ratio of the destabilising buoyancy to the stabilising viscous forces. For low values of R, a regular pattern of cellular motion establishes itself, and the problem can be treated in a linear fashion by traditional analytical methods. For high values of R, the flow is unstable; the analysis then becomes non-linear and untreatable. However, solutions of this unstable time-dependent situation can be computed, and Figure 2 shows the streamlines at a certain time for two values of R which were plotted by direct computer output on a cathode-ray tube. If, then, each such display is photographed to be used as a frame for a film, the whole can be run through a film projector. Future advances in output techniques will, of course, enable such a 'film' to be shown direct from the computer without the intervention of a celluloid film.

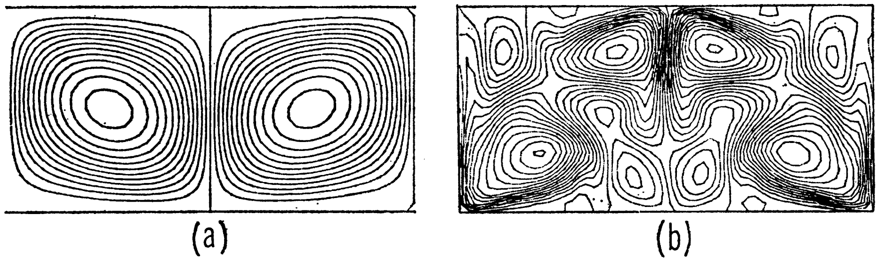


Fig. 2. (a) Conventional analysis could yield the steady-state streamline pattern in a Bénard problem for $R = 3 \times 10^4$. (b) Only the computer could reveal the details of the unsteady flow at $R = 3 \times 10^6$, of which this is typical streamline pattern. Both figures were plotted by computer.

In the whole film, which was shown at the Congress, there were more than 10^3 frames, each representing a solution involving up to 10^2 iterations in a mesh of some 10^3 points. It therefore represented some 10^8 pivotable calculations and so is as far beyond the reach of human calculation as is the non-linear solution beyond the reach of mathematical analysis.

The visual impact of the film was almost as physically suggestive as the direct observation of a real flow; indeed the possibility that such solutions can display fine details, such as small separated regions, in a way that conventional experimental techniques cannot, suggests that computer solutions of this kind will be most valuable adjuncts to, if not substitutes for, laboratory experiments.

It needs emphasising that, in solutions such as these, the complete differential equations are being solved, with no simplifying approximations made. If, therefore, we are also confident – as we are in these cases – that the basic equations do indeed give a complete description of the physical situation, then the computer is doing what mathematical analysis cannot do, namely produce definitive solutions for very general classes of problems.

What is more, the computer is relatively insensitive to complications introduced into the original equation (in this case $\partial^2\phi/\partial x^2+\partial^2\phi/\partial y^2=0$) whereas mathematical techniques are highly sensitive. Thus if the computer method involves some kind of iteration over the domain, the solution of the non-linear equation $f(\phi; x, y)\,\partial^2\phi/\partial x^2+\partial^2\phi/\partial y^2=0$ would probably be no more complicated (at least when $f>0$), whereas there are no practical methods of conventional analysis for solving that equation for arbitrary boundary conditions.

One is led, in fact, to ask why the highly idealised Laplace equation occupies such a central place in mathematical teaching. The answer surely is twofold: (i) its linearity enables the very powerful method of linear combination of independent canonical solutions to be used, and (ii) such canonical solutions have been derived in terms of very simple functions, notably the exponential and trigonometrical functions, which can be easily tabulated in numerical form. Computer solutions, however, render these devices unnecessary, and therefore, in universities, we should review our teaching of idealised equations such as Laplace's.

IV. THE CONTINUOUS AND THE DISCRETE

These glimpses of what computers can do in strictly deterministic situations, which are governed by differential equations, suggest a conjecture which may have profound implications for the teaching of mathematics in schools. It is, I believe, a highly profitable question to ask what course mathematics would have taken if Newton or Leibniz had had a computer. It is ironic that differential equations which are derived in the first instance by taking the limit of finite-difference formulations are now recast in finite-difference form. In these circumstances, what is the role of the differential equation? Is differentiability a concept which will be as significant in the future as over the last two hundred years? Would the great structure of special functions and the associated functional analysis ever have been built if the computer had existed in the sixteenth century? To be quite specific, how much conventional mathematical analysis could be rewritten in discrete rather than in continuous terms?[3]

In this context it is interesting that one of the characteristics of 'modern mathematics' curricula in schools is that they lay stress on finite sets, and on operations defined on finite sets. Problems which are modelled by Venn diagrams, or geometrical situations involving symmetry groups, or iterative procedures leading to an approximate solution of equations, or the graphing of a function by a finite number of points – all these are dealing essentially with finite sets of discrete objects.

Here, the concept of continuity, let alone that of differentiability, is not particularly relevant, and in any case is difficult to treat at any but the most intuitive level. Or again, it is worth seriously considering whether it is necessary at school to use the concept of irrational numbers – most of school mathematics can be treated within the set of rationals. After all, it is remarkable how many results ancient mathematicians such as Pythagoras obtained by discrete methods for which we would now naturally use continuous methods.

To give one or two very simple examples of the correspondence between the continuous and the discrete, one might first note a result such as

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n} + \cdots + O(1).$$

This fails in elegance to the extent of the existence of the non-zero remainder; more satisfactory is the result that

$$\int_0^1 f \,\mathrm{d}x = [\tfrac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \cdots f_{n-1} + \tfrac{1}{2}f_n]\,\frac{1}{n}$$

which is *exactly* true not only when f is linear, but also in more general cases (which the reader is invited to discover). Or again, Green's theorem for linear differential operators,

$$\int [uDv - vD^*u]\,\mathrm{d}V = 0,$$

where the the asterisk denotes the adjoint operator, has the precise algebraic analogue in terms of matrices, that

$$u'Dv - v'D'u = (0)$$

where the dash denotes the transpose. This is a truly elementary result which enables the linear algebraic equations $Du = f$ to be solved in the form $u = vf$ where v can be regarded as a Green's function.

Incidentally, students sometimes ask whether there is a discrete analogue to the solution of $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x = f(x)$, i.e. $D\phi = f$, in the form $\phi = \int_0^x f(x) + k$, i.e. $\phi = D^{-1}f$. Perhaps the reader may be interested to consider whether there is a flaw in the following method for apparently obtaining an explicit solution to a general set of simultaneous algebraic equations:

$$\begin{aligned} Du &= f, \\ D'Du &= D'f, \\ u &= (D'D)^{-1}\,D'f\,. \end{aligned}$$

V. THE SCOPE OF THE COMPUTER IN PURE MATHEMATICS

Let us now look at the possibilities for the computer in pure mathematics. And first we may state the following axiom: that any human intellectual activity which has a structure of strict logic can be simulated on a computer. Thus the computer can certainly be programmed to 'do' abstract mathematics – that is, to carry out operations within an abstract algebra whose axioms and operations are well-defined. The question is: to what extent can it do constructive mathematics.[4]

For example, it appears at first sight to be an attractive idea to generate statements within a system almost at random in the expectation that some, at least, will be of significance. But there are difficulties. One is the identification of equivalent nodes in the graph which is continually being generated, though programmes can now be written to successfully seek a path between two specified nodes of a specified graph. Possibly of greater interest is the role of the theorem. What characterises a theorem, lemma or just a plain result? From the point of view of the directed graph, the three are not discriminated; all are nodes. So in using these words, is one making an objective mathematical distinction or a subjective value-judgement? It is, in fact, remarkable that there is so great a consensus of opinion in the mathematical community as to what may be dignified by the title theorem. Certainly, we look for elegance and simplicity. More than that, we require of a theorem that it has wide generality and application. Is it conceivable that computers could be programmed to derive results and then place value judgements on them; or to make conjectures and then establish their truth?

One viewpoint can itself be expressed in the form of the theorem that 'computers cannot generate theorems'. Proof: a computer is a finite machine which works for a finite time in terms of a finite class of integers; whereas a theorem should make either a statement about an infinite class or an infinite class of statements. The theorem follows.

It is, I confess, a little difficult to see the flaw in this argument, especially as its adherents include some of those who have contributed most to the application of computers. Thus, for example, it has been proved on the Princeton CDC machine that there are 15950 division algebras of order 32, a result well beyond the reach of the human competitor. The author dismissed it as 'work unfit for a Christian'! On the other hand, a programme on the same machine has established proofs of such nice results in number theory as 'every set of seven consecutive integers greater than 36 contains a multiple of a prime greater than 41'.

But there are those who make much more ambitious claims.[5] For example, it may be argued that, although mathematical machines of various kinds have existed in the past, the special preserve of the mathematician has always been the determination of the strategy of the thinking. But now, things are different: In the words of the preface of a recent symposium report: 'the distinctive aim of machine intelligence within the general field of computer science is artfully to encroach on this preserve, annexing to the machine's domain more and more of the human's elusive aptitudes – his ability to handle non-numerical data structures of all kinds, to generate and apply data-description schemata, to learn from past experience to abstract features common to different problems, to devise and apply criteria of "relevance", to use approximate and intuitive arguments, to construct general rules from particular instances and to define concepts via examples'.

Thus when it comes to theorem-finding or theorem-proving, this type of computer activity is, in its very essence, heuristic. It is the undoubted success of such computer programmes (albeit at a still relatively trivial level) which encourages the claim that computers one day will be programmed to emulate the feats of the finest mathematicians.

VI. MATHEMATICAL MANIPULATION BY COMPUTER

This review of the computer's potentiality in mathematics concludes by emphasising the ability of computers to manipulate mathematics not merely in the context of an abstract structure, but also within the bread-and-butter framework of elementary function analysis. Thus in the realm of real functions of a real variable, differentation and integration are the keystone operations. They apparently involve two quite different algorithmic techniques.[6] Differentiation is a completely determinate process. Thus there is no difficulty of principle in computing a derivative of any expression involving functions whose derivatives are known. I say 'a derivative' rather than 'the derivative' advisedly because too unsophisticated a programme would quote the derivative of $[\sin^2 x + \cos^2 x]$ as $[2 \sin x \cos x + 2 \cos x(-\sin x)]$, rather than as the preferable zero. Thus the form in which a derivative is required depends upon the context, so that even this apparently determinate process will in fact involve heuristic considerations.

By contrast, integration appears undeniably heuristic, yet paradoxically it has been found that a large class of integrands is susceptible to algorithmic treatment. For example, a programme written at the Massachusetts Institute of Technology chose the substitutions $\sin y = x$ and then $z = \tan y$ when faced with

$$\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

and took about eleven seconds to produce the answer as

$$\tfrac{1}{3}\tan^3 \sin^{-1} x - \tan \sin^{-1} x + \sin^{-1} x.$$

That was about ten years ago: in another few years' time, that type of elementary integrand will be integrated virtually instantaneously.

Thus as the years go by there will be built up standard programmes for whatever operations one cares to think of – the automatic expansion of functions as power series or asymptotic series, the multiplication of power series to form a power series, the solution in analytical form of canonical differential equations, and so on. The mathematician's job will be to produce the strategy: the execution of the tactics will be left to the computer.

Perhaps I may remark that it is very curious that professional mathematicians regard it as not very respectable that their subject should be computerisable in this way. Normally scientists eagerly seize any new experimental tool; but not mathematicians. This is especially odd, since some (at least) of the operations I have mentioned can obviously be written in a definitive form in programmes which could be disseminated world-wide.

VII. SOFT-WARE AND HARD-WARE; TIME-SCALES

It is, of course, not enough just to have programmes which do this, that and the other; for applications such as these, input and output should be at an equally sophisticated level. Thus multi-access facilities will be used, with the link between the terminal keyboard and the computer working is a conversational mode; the terminal will include a C.R.T. display which will be used both for output and, in conjunction with a light pen, for input. For typing mathematical expressions into the machine, a serial symbolism must of course be used rather than the very clumsy traditional notation which has evolved over the years, and it now seems important for the international mathematical community to make a move towards an agreed serial language.[7]

We should also clear our minds about the likely time-scales involved in the kind of developments which have been mentioned. There are, of course, great discrepancies between countries.[8] There is no doubt that the U.S.A. and U.S.S.R. are well in advance of all other countries: already, those two nations are experimenting with computers in schools, with multi-access and conversational facilities for school systems – and indeed with C.A.I. In other countries, things may develop more slowly. In England, for example, only a small proportion of schools have their own computing facilities, though many use the machines in local government offices or commercial firms. Nevertheless, one can feel certain that, well within the next fifty years, every school at least, and probably every classroom, will have its own terminal link with some large central time-sharing machine. And in view of the exponential decrease in the cost of computing power, this time may well come sooner than most of us expected.

Thus the researches which we should now be initiating in the relevance and applications of computing to school mathematics should be based on the assumption that pupils will have virtually immediate access to a computer.

I want to stress particularly that such a development is *inevitable*, and if something is inevitable, it is prudent to anticipate it. Thus even now we should be adjusting our curricula in the right direction and emphasising certain topics which are not only important in their own right as foundations for computing, but are also desirable in so far as they may lead to the right mental attitude in pupils. Thus it is noteworthy that the texts of the School Mathematics Project have already anticipated the future pattern of mathematics by incorporating concepts such as flow diagrams, the determinism or otherwise of a problem and its logical structure, the use of approximation, iterative procedures, and limiting processes.

VIII. TWO ILLUSTRATIONS

These ideas are so universal in their relevance to, and significance for, school mathematics that any exemplification in a short paper cannot help distorting the view. But perhaps two examples will bring out two important points.

First let us consider the iterative procedure for finding the square root of a positive real number a, as given by

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right).$$

This formula has achieved a sudden popularity in modern texts for schools – it is, presumably, thought to embody much that is inherent in modern mathematics – yet the manner in which it is treated often seems to invite the criticism usually reserved for traditional courses. In short, it is in grave danger of becoming just another dogma within school curricula.

Once, however, pupils have immediate access to a computer, the procedure as it stands above is much too simple to enable many worthwhile points to be drawn out of a pupil's experience of using it. The most interesting aspect of any such recursion formula is the rapidity with which the limit is approached, but this concept is not easily or meaningfully grasped unless comparisons can be made with different recursions. Thus, at the very least, pupils should be encouraged to write their programme in a form which will introduce one or more parameters whose values may be varied experimentally. Thus, for example, one might write as a start:

$$x_n = \lambda x_{n-1} + \mu\left(\frac{a}{x_{n-1}}\right).$$

It would soon be discovered that random pairs of values of λ and μ would not lead to a limit x which is the square root of a. Pupils would then experiment to find a necessary relationship between λ and μ, and when they began to suspect that $\lambda+\mu$ should be unity, a theoretical investigation could be made.

The formula immediately above could also be construed in the following way: "To obtain the next value x_n, take a certain proportion λ of the last value x_{n-1} and add an 'improvement' term, namely $\mu(a/x_{n-1})$." This leads to the idea of relaxation, or of feedback, and would suggest the trial of more sophisticated formulae such as

$$x_n = \lambda x_{n-1} + \mu x_{n-2} + \nu\left(\frac{a}{x_{n-1}}\right),$$

or

$$x_n = \lambda x_{n-1} + \mu\left(\frac{a}{x_{n-1}}\right) + \nu\left(\frac{a^2}{x_{n-1}^3}\right),$$

and once one is launched on this kind of exploration, there is no knowing what might be discovered!

As a second example, aimed admittedly at the more distant future, let us consider the role of the "multiplication table" in the primary school. At present (or at least, in the recent past!) young children learn their basic 'tables' and they then go on to more difficult multiplications involving numbers with two or more digits. Now the method of long multiplication is no more than a device for arriving at the result of a certain closed binary operation defined on the set of positive integers. What matters is the result, not the means of arriving at it. If we have another device (such as a computer) which will yield the result more easily and rapidly, there is no virtue in retaining the earlier one. Thus, if on a computer input one can establish a binary operation at the touch of a button and obtain individual results of the operation instantaneously by inputting two members of the relevant set, the actual mechanism of the calculation is irrelevant. Indeed an operation such as multiplication would then be viewed from an entirely new direction. The results of the operation would be examined as experimental values requiring analysis, interpretation, and application; so that the idea of multiplication as repeated addition or as giving a rectangular area (to take just two instances) would emerge as applications of a "blackbox" device.

IX. CONCLUSION

In conclusion, two final things. First, it is appropriate that at this first Congress of I.C.M.I. I should announce the formation of a new international project. This is called the International Project for Computing in Schools.[9] Its functions are well enough explained by its title. But one point may be stressed, namely the conviction shared by the originators of the project that much of the work which they (and other groups) will develop will be truly universal in a way that present national mathematical programmes are not. The cooperation of groups from different countries is therefore of particular importance in the computer field, and that was one of the major considerations of the founders of this project.

Second, I know that there will be some who feel that I have not displayed that fine balance of judgement and sober anticipation that should characterise the proceedings of an international congress. To these, I would say only this. Do not underestimate the rate at which technologies are now advancing. Few of us in 1939 would have been so far-sighted as to predict a man walking on the moon in 1969: a feat, incidentally, which has depended utterly on the computer. Let us not make a similar mistake now.

REFERENCES

* Summary of address delivered to the First International Congress of Mathematical Education.

1 For an account of the effects on the training of engineers, see: Thwaites, B.: 1968, 'The Second Century Papers: Looking Ahead in Aeronautics – 3', *J.R.Ae.S.* **72**, 688, 275–284.

2 For a review of the probable impact of computers on the discipline of mathematics, see: Thwaites, B.: 1967, '1984: Mathematics⇔Computers?', *Bull. Inst. Maths. Applics.* **3**, 6, 133–159.

3 The best book I know of, which looks into the relationship between the continuous and the discrete, is: Lanczos, C.: 1961, *Linear differential operators*, Van Nostrand, London.

4 The London Mathematical Society held a conference in 1967 which startled many people by its revelations of how computers can help even the 'purest' of mathematics. The proceedings were written up as: Leach, J. (ed.): 1968, *Computational problems in abstract algebra*, Pergamon, Oxford.

5 The two books *Machine Intelligence I*, 1967 (eds. Collins, N. L. and Mickie, D.), *Machine Intelligence II*, 1968 (eds. Dale, E. and Mickie, D.), Oliver and Boyd, Edinburgh, are compulsory reading for those who wish to glimpse the heuristic potentialities of computers.

6 Much of the work on mathematical manipulation by computer is being done in the U.S.A. See, for example:

(i) Gelernter, H.: 1959, 'Realisation of a geometry-theorem proving machine', in *Proc. Int. Conf. on Information Processing 1959*, UNESCO House, Paris, pp. 273–282.

(ii) Martin, W. A.: 1964, Hash-coding functions of a complex variable. Massachusetts Institute of Technology Memor. MAC-M-165.

(iii) Slagle, J. R.: 1961, A heuristic program that solves symbolic integration problems on freshman calculus, Symbolic Automatic Integrator (SAINT). Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology.

(iv) Moses, J.: 1966, Symbolic integration. Massachusetts Institute of Technology Memors. MAC-M-310 and MAC-M-327.

[7] I guess that the symbolism which is bound eventually to be agreed on a world-wide scale will be strongly influenced by the ideas of: Iverson, K. E.: 1962, *A programming language*, Wiley and Sons, New York. I heartily recommend another book by him which indicates a computer-approach to elementary mathematics: Iverson, K. E.: 1966, *Elementary functions: an algorithmic treatment*, Science Research Associates, Chicago.

[8] An account of Russian developments is given in: Thwaites, B.: 1968, 'Mathematical Education in Russian Schools', *Math. Gaz.* **52**, 382, 319–327.

[9] Leaflets outlining the Project, and further details, may be obtained from the present author at Westfield College, London, N.W.3., England.

ZOFIA KRYGOWSKA

LE TEXTE MATHÉMATIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT

1. Les tendances modernes de l'enseignement mathématique mettent en relief les méthodes dites "actives" de cet enseignement en les opposant aux méthodes dites "passives" ou "réceptives". L'enseignement basé sur les méthodes actives consiste – selon les définitions pédagogiques diverses, mais s'accordant sur ce point – en la recherche faite personnellement par l'élève lui-même avec l'aide du maître dont le rôle est très important, mais qui apparemment n'est qu'un adjoint presque clandestin de cette recherche. Le terme "méthode réceptive" désigne les procédés divers de transmission de la connaissance toute prête. L'exposé du professeur et l'apprentissage à base de manuel sont le plus souvent traités comme formes purement "réceptives" qui devraient être éliminées de l'enseignement moderne.

Cette opposition de ces deux genres de méthodes me semble formelle et apparente. Il n'existe pas une transmission véritable sans la participation active de l'élève au processus de cette transmission. D'autre part, chaque recherche créatrice exige une base de connaissances préalables et d'informations directement utilisables transmises par les autres. L'enseignement moderne des mathématiques devrait donc initier l'élève aux formes diverses de l'activité intellectuelle en mathématiques accessibles à son niveau. De ce point de vue savoir analyser et saisir la pensée mathématique d'autrui, savoir choisir et raisonnablement exploiter les sources diverses de l'information mathématique, savoir exprimer oralement et dans la forme écrite ses propres pensées pour qu'elles soient compréhensibles aux autres etc., tout cela n'est pas un objectif moins important de l'apprentissage mathématique que le développement de l'activité créatrice proprement dite. De plus tout cela constitue la condition sine qua non de cette activité. Le rôle de la lecture mathématique mérite de ce point de vue notre attention particulière.

Tous ceux qui ont étudié sérieusement la mathématique savent très bien que la lecture effective d'un texte mathématique exige un effort et même dans certaines conditions, un effort créateur, une certaine collaboration avec l'auteur du texte. Cette lecture exige aussi une certaine technique dans l'analyse de la définition, du théorème, de la démonstration, de la structure totale du texte étudié. C'est un travail difficile, exécuté sur la matière première qu'on doit transformer dans une construction mentale, formant l'essentiel de l'assimilation.

Evidemment "le piochement mécanique et verbal" du manuel, la lecture concentrée avant tout sur l'effort de mémorisation du texte devraient être éliminés de notre enseignement. Nos observations révèlent justement ce danger. Mais la conclusion formulée par exemple dans un des rapports préparés par les Commissions Nationales de la CIEM pour le congrès de Moscou en 1966 – je la cite expressément – "les manuels devraient être mis à l'écart" suit la ligne du moindre effort pédagogique. Je voudrais opposer à cette conclusion le postulat: initier notre élève consciemment et systématiquement à la technique de l'utilisation active du livre mathématique, cette source principale de l'information scientifique dans ce domaine depuis l'invention de Gutenberg.

D'autre part nous sommes aujourd'hui témoins d'une avalanche de manuels modernes, d'inventions nouvelles concernant la présentation du contenu mathématique. Tous ces livres chatoyant de couleurs, pleins de dessins et de schémas ingénieux, introduisant un nouveau langage graphique et symbolique, créé à l'usage scolaire, sont destinés directement aux élèves. Selon l'intention des auteurs ces manuels devraient être étudiés personnellement par les élèves eux-mêmes. Ce ne sont pas des manuels destinés à "la mise à l'écart". Au contraire, ils peuvent et doivent être utilisés comme moyens d'éducation mathématique.

Dans cette situation un problème se pose dans la pédagogie moderne mathématique, à savoir le problème de l'initiation de l'élève à l'étude intelligente et effective du texte mathématique.

2. Pour mieux exprimer mes idées, je vais commencer par des exemples. Nous allons considérer deux situations observées par moi-même au cours d'un fragment de nos recherches collectives concernant la réception du contenu mathématique transmis par le texte écrit. Dans le premier cas on a observé les attitudes d'une personne adulte. Le lecteur disposait de la préparation mathématique au niveau supérieur, mais il n'était pas un mathématicien professionnel créateur. Le second cas concerne la situation en classe, où le manuel a été mis véritablement à l'écart au profit de méthodes dites actives, n'étant que très rarement utilisé par les élèves.

Le lecteur adulte étudiait la première page du chapitre 4, intitulé "Structures", du livre de Bourbaki, en commençant par le texte de la première définition à savoir "Un schéma de construction d'échelons est une suite $c_1, c_2, \dots c_m$ de couples d'entiers naturels $c_i = (a_i, b_i)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(a) si $b_i = 0$, on a $1 \leqslant a_i \leqslant i-1$,

(b) si $a_i > 0$ et $b_i > 0$ on a $1 \leqslant a_i \leqslant i-1$ et $1 \leqslant b_i \leqslant i-1$."

Le texte est clair et sa compréhension n'exige pas de connaissances dépassant la mathématique scolaire. Mais en quoi consiste cette compréhension? La première interprétation serait "compréhension linguistique, formelle". On comprend chaque mot, chaque phrase. On saisit la construction syntactique du texte. On traite donc l'expression "schéma de construction d'échelons" comme un tout, comme un terme, signifiant un objet mathématique. On discerne le définiendum de la condition définissante. Du point de vue formel tout est en ordre. En ce sens, on a compris. Mais la personne observée est d'un autre avis. Elle demande: Mais qu'est-ce que c'est, finalement, ce schéma de construction d'échelons? On pourrait lui répondre: C'est justement ce que vous avez lu. En réalité, ce n'est pas vrai. Pour comprendre il faut bâtir quelque chose derrière la vitrine formelle. On veut saisir autrement l'objet défini. Comment?

Le lecteur observé nous donne la réponse. Il procède à la construction concrète de cet objet. Il commence par des tâtonnements, mais il passe vite au raisonnement, en établissant la table de toutes les possibilités concernant la suite c_i:

i	c_i	
1	$(0, b_1)$,	$b_1 > 0$
2	$(0, b_2)$,	$b_2 > 0$
	$(1, 0)$	
	$(1, 1)$	
3	$(0, b_3)$,	$b_3 > 0$
	$(1, 0), (2, 0)$,	
	$(1, 1), (1, 2)$,	
	$(2, 1), (2, 2)$,	
4	$(0, b_4)$,	$b_4 > 0$
	$(1, 0), (2, 0), (3, 0)$,	
	$(1, 1), (1, 2), (1, 3)$,	
	$(2, 1), (2, 2), (2, 3)$,	
	$(3, 1), (3, 2), (3, 3)$,	
	$\dots$	

A l'étape $i=3$ on a déjà compris la loi. Mais le lecteur continue en prolongeant "sa table de possibilités" avec une certaine satisfaction. Pour finir il construit un exemple concret de schéma: c_i: $(0, 2), (1, 1), (2, 1), (3, 0)$. Le même procédé caractérise la lecture de la suite, qui contient la seconde définition: "Etant donnés un schéma $S=(c_1, c_2, \dots c_m)$ de construction d'échelons sur n termes, et n termes $E_1, \dots, E_n$ d'une théorie plus forte que la théorie des ensembles, on appelle construction d'échelons de schéma

S sur $E_1, \dots E_n$, une suite $A_1, \dots A_m$ de m termes de T définis de proche en proche par les conditions suivantes:

(a) Si $c_i = (0, b_i)$, A_i est le terme E_{b_i}.
(b) Si $c_i = (a_i, 0)$, A_i est le terme $\mathfrak{P}(A_{a_i})$.
(c) Si $c_i = (a_i, b_i)$ avec $a_i \neq 0$ et $b_i \neq 0$, A_i est le terme $A_{a_i} \times A_{b_i}$.

Le lecteur observé passe de nouveau de l'étape de l'analyse "linguistique" du texte à l'étape de la construction concrète d'un exemple. A la base de l'exemple déjà construit de la suite c_i il présente la suite correpondante A_i:

c_i: (0,2), (0, 1), (2, 1), (3, 0),
A_i: $E_2, E_1, E_2 \times E_1, \mathfrak{P}(E_2 \times E_1)$.

On peut voir que le lecteur cherche encore quelque chose, il n'est pas satisfait. Et voilà ce qui lui manque encore: la construction de la table de possibilités pour la suite A_i.

Cette construction c'est le moment de la compréhension du jeu. La seconde définition explique aussi le sens, le but de la première; on saisit la suite c_i comme une certaine programmation de la construction d'un ensemble à partir des ensembles donnés. On aperçoit que ce jeu consiste dans l'application de deux opérations ensemblistes. On saisit le sens intuitif du terme "échelon d'ensembles" et on finit la lecture avec le sentiment d'une compréhension satisfaisante. Cette compréhension a été acquise par la voie inverse à celle de l'auteur lui-même.

L'enseignement basé sur les méthodes actives utilise le plus souvent la voie génétique motivant les définitions admises. Pour mieux comprendre la différence entre cette voie génétique et le genre de travail de notre lecteur, observons cette voie génétique dans le cas considéré des définitions bourbakistes, voie suivie facilement par les débutants aux études mathématiques. On a passé par les étapes suivantes:

(A) L'introduction à la situation. Le professeur explique: Sur la base d'une suite donnée d'ensembles $E_1, \dots, E_n$ on va construire une nouvelle suite finie d'ensembles. Imaginons cette nouvelle suite comme une échelle, dont les échelons sont numérotés par les nombres naturels $1, 2, \dots, m$ de bas en haut et dont chaque échelon est ou un des ensembles de base ou l'ensemble des parties d'un des échelons plus bas, ou le produit cartésien de deux échelons plus bas. Attribuons à la base le numéro 0.

(B) Exercices d'introduction: (a) donner un exemple d'échelle établie sur la base donnée, (b) établir une échelle dont l'échelon le plus haut serait

$$[\mathfrak{P}(E_2) \times E_3] \times \mathfrak{P}(E_1 \times E_3),$$

(c) établir une autre échelle conduisant à l'échelon défini dans (b).

(C) Problème de formalisation, recherche, discussion: Programmer de la manière la plus simple une échelle sur la base donnée précédemment. Suggestion: il s'avère utile d'écrire le programme en utilisant les nombres qui indiquent, selon des conventions adéquates, les opérations à exécuter et les objets sur lesquels on exécute ces opérations. Les simplifications consécutives des divers projets conduisent finalement à "la loi de la construction" de la suite c_i: l'échelon "produit cartésien" sera programmé par le couple de deux numéros des échelons-facteurs; l'échelon-ensemble de parties d'un ensemble par le couple $(n, 0)$ où n indique le numéro de l'ensemble donné; l'échelon-ensemble de base par le couple $(0, n)$ où n indique le numéro de l'ensemble de base en jeu.

Le compte rendu de cette recherche dans la forme de la définition par récurrence s'avère pour les débutants un exercice assez difficile, mais instructif, un exercice de passage partant de la récurrence intuitive, exprimée naïvement par l'expression "et cetera" et se dirigeant vers l'expression formelle.

Le lecteur observé a dû passer par la voie inverse conduisant de cette expression formelle à cet "et cetera" intuitif, ce qui lui a été absolument nécessaire pour pouvoir comprendre. Il n'était qu'un mathématicien d'une expérience scientifique assez limitée, mais il savait se servir au cours de la lecture mathématique d'une technique d'analyse du texte adaptée à ses possibilités at à ses besoins personnels.

Cet exemple me semble particulièrement instructif grâce à la simplicité conceptuelle de la situation mathématique, ce qui nous a permis d'observer et mettre en relief les aspects divers de la lecture du texte mathématique, faite d'une manière naïve. Et justement ces aspects méritent l'attention du pédagogue. Nous avons observé comment on a débrouillé d'une définition formelle les opérations nécessaires à la construction mentale d'un objet abstrait. Ce travail pourrait être considéré comme un modèle psychologique du jeu de deux procédés opposés de la pensée, ceux de l'analyse et de la synthèse.

Évidemment des textes différents exigent des traitements différents. Évidemment aussi ces procédés sont relatifs à des lecteurs différents. Ils dépendent du niveau de la "vie mathématique" propre au lecteur, de son expérience, de sa rapidité intellectuelle, du genre de son activité créatrice, de ses connaissances concernant le domaine donné, etc. Ces procédés peuvent être plus ou moins naïfs, plus ou moins basés sur des tâtonnements, plus ou moins basés sur une technique élaborée de la lecture scientifique. Mais à aucun niveau l'étude du texte mathématique ne se réduit à la lecture "linguistique" de ce texte. Un effort de pénétration du fond de la vitrine formelle est ici toujours nécessaire. Et on oublie souvent que la technique de cette pénétration n'est pas donnée à priori à nos élèves, qu'elle devrait être donc un objectif important de l'enseignement.

Passons maintenant à l'observation d'une situation en classe. Les élèves à l'âge de 14–15 ans d'une classe où le manuel n'a pas été utilisé, ont reçu le texte écrit suivant: "Homothétie de centre O et de rapport s (s étant un nombre non nul) est une transformation $X \to X'$ du plan tel que $\overrightarrow{OX'} = s\,\overrightarrow{OX}$." La tâche des élèves a été de lire le texte et de le comprendre, ce qui devait être contrôlé par la suite à l'aide d'exercices adéquats. La plupart des élèves se sont heurtés à des difficultés considérables. Il y en avait même qui n'ont pas achevé l'analyse linguistique du texte. Par exemple une élève s'arrête au début et n'essaie pas de lire la suite en déclarant: je ne peux suivre le texte car je ne comprends pas ce terme: de rapport s. Beaucoup d'autres répètent la lecture plusieurs fois, toujours dans la même forme, et constatent finalement: c'est trop embrouillé. Elles sont absolument passives au cours de cette lecture, elles ne savent pas ce qu'on doit faire pour comprendre.

L'aide du professeur s'avère nécessaire. De quoi parle ce texte? D'une transformation du plan. Comment est-elle appelée? On analyse le terme défini. Quels sont les paramètres fixant cette transformation? On revient à la lecture et on trouve: un point – le centre, un nombre – le rapport. Représentez le centre sur le dessin – propose le maître. Fixez un nombre. Essayez maintenant d'illustrer sur votre dessin la transformation définie en interprétant pas à pas le texte par les opérations exécutées sur le dessin. Lisez encore une fois le texte.

La réaction des élèves est immédiate. Elles s'exclament: mais c'est très simple. Une d'elles exprime son étonnement profond. Comment est-il possible que je n'ai pas compris tout de suite quelque chose de si facile!

Par la suite on résume cette expérience personnelle des élèves. Comment peut-on analyser une définition? On constate le premier principe: il faut bien dissocier le terme défini de la condition définissante. La lecture d'un texte mathématique ne peut pas donner de résultats, si elle n'est pas faite avec une attention particulière. On met en relief aussi le second principe: illustrer le texte par des exemples concrets. Essayer de faire dans la situation concrète ce qui est décrit dans la définition en général, calculer, construire des expressions, construire les figures décrites, exécuter sur le dessin les opérations adéquates aux opérations abstraites, utiliser les schémas, etc. Et avant tout il faut agir au lieu de contempler – c'est le résumé de cette leçon du maître.

Comparons comme dans l'exemple de l'adulte ce procédé "passif" de l'introduction d'une nouvelle notion avec une autre leçon – leçon active – organisée sur le même thème.

Les élèves connaissent le groupe des isométries et en particulier la symétrie centrale. Ils écrivent la condition définissant cette transformation sous la forme (S_O signifie la symétrie de centre O):

$$S_O(X) = X' \Leftrightarrow \overrightarrow{OX}' = -\overrightarrow{OX}.$$

Le maître introduit une petite correction dans cette expression,

$$S_O(X) = X' \Leftrightarrow \overrightarrow{OX}' = -1 \cdot \overrightarrow{OX},$$

et propose: remplacez la constante -1 par le paramètre s et analysez les transformations du plan ainsi définies. On trouve vite le cas $s=0$ – la transformation constante. On interprète, au début sur le dessin, par la suite d'une manière plus abstraite, plus générale, les cas $s>0$ et $s<0$. Le maître introduit le terme, on construit le symbole adéquat au cours de la discussion.

Le problème résolu suggère des problèmes analogues: Faire la même chose par exemple avec la symétrie axiale. On écrit la condition définissant la symétrie axiale S_a sous la forme

$$S_a(X) = X' \Leftrightarrow \overrightarrow{XX^a} = 1 \cdot \overrightarrow{X^aX'},$$

où X^a signifie la projection orthogonale de X sur a.

En changeant la direction de la projection et en remplaçant la constante 1 par d'autres nombres, on découvre des affinités inconnues jusqu'alors.

Cette seconde leçon nous semble évidemment plus éducative pour le développement de la pensée mathématique de l'élève, un certain exercice méthodologique de généralisation mathématique accessible aux élèves. Chaque professeur-pédagogue préférerait cette leçon vive, pleine de discussions intéressantes, pleine de joie ressentie par les élèves, à la leçon précédemment décrite, leçon de lecture mathématique. Mais l'élève a besoin d'une telle instruction et d'un tel apprentissage. Il doit quitter l'école secondaire sans l'horreur de l'abracadabra du livre mathématique, il doit savoir transformer la clarté formelle en la clarté psychologique de la compréhension. Il va élaborer par la suite ses propres moyens pour réaliser cette transformation, adéquats à ses qualités individuelles, à son esprit d'abstraction, à son intuition mathématique, à son imagination, à son talent mathématique. Mais on a fallu commencer ce processus à l'école et organiser ici systématiquement l'apprentissage de la lecture active du texte mathématique.

3. Certains sondages et certaines observations exécutés dans le cadre de notre recherche concernant la réception du texte mathématique révèlent les grandes faiblesses de notre pédagogie dans ce domaine. On a examiné par exemple dans quelle mesure les livres de vulgarisation mathématique, donc les livres destinés au grand public, sont en réalité lus et compris. Les résultats ont été décevants. Les lecteurs participant à ce sondage témoignaient en général du découragement causé par les difficultés rencontrées au cours de cette lecture, quoique les auteurs des livres analysés aient fait un grand effort pour obtenir une présentation facile du contenu.

Nous observons aussi les même difficultés chez nos étudiants moyens de la première année d'études supérieures. A l'école primaire et à l'école secondaire ils ont été habitués à des procédés semi-génétiques. Par exemple les définitions ont été le plus souvent formulées après une introduction intuitive et de cette façon elles n'étaient que les comptes-rendus formels de ce qui a été précédemment intuitivement saisi. Quand il faut exécuter le travail inverse, c'est-à-dire débrouiller le sens intuitif d'une définition donnée à priori, débrouiller les opérations nécessaires à la construction mentale d'un objet abstrait basée sur cette définition, beaucoup d'etudiants débutants restent tout à fait perplexes ou se contentent d'une prise de conscience superficielle ou même erronée, qui s'avère par la suite comme incompréhension de la notion en jeu. Ces difficultés se révèlent particulièrement frappantes chez ceux, qui étudient la mathématique par correspondance aux écoles supérieures. On y observe chez certains étudiants l'indolence absolue dans l'analyse du texte mathématique. Et pourtant le livre mathématique c'est le moyen de base de leur étude.

Nous avons analysé aussi les difficultés des élèves moyens vis-à-vis de leur manuel de mathématiques. Ces observations nous ont conduits au dilemme suivant; ou ce manuel a été écrit d'une telle manière que son texte est en principe inaccessible à l'élève d'un certain âge, ou la source des difficultés réside dans les faiblesses de l'enseignement qui n'a pas préparé ces élèves à la lecture du livre mathématique. La première explication suit évidemment la ligne du moindre effort pédagogique. Elle est suggérée le plus souvent par les maîtres qui ne comprennent pas la cause de ces difficultés, par les parents qui sont enclins à voir la source de tous les ennuis des enfants dans le programme modernisé, dans la symbolique introduite dans le langage des mathématiques élémentaires, et par les élèves eux-mêmes qui en réalité n'analysent pas leurs propres difficultés. On attaque donc les auteurs des manuels en jeu, en passant sous silence le fait que l'étude d'un texte mathématique quelconque exige une technique intellectuelle qui ne se réduit pas seulement à la connaissance de l'alphabet. La seconde hypothèse a été l'objet de certaines expériences. Leurs résultats prouvent que l'initiation de l'élève au travail sur le texte mathématique, traitée par le maître comme un élément important de son enseignement, améliore vite la situation dont je viens de parler. Le même manuel qui a été traité de texte chinois, devient non seulement compréhensible, mais aussi agréable et intéressant. Nous observons le développement de l'esprit critique, du besoin de la précision chez les élèves. Dans une classe où on a travaillé de cette façon, les élèves à l'âge de 14–15 ans ont suggéré certaines modifications à l'auteur du manuel et ces remarques ont été intéressantes et souvent justes.

Comme nous avons vu dans un des deux exemples relatés précédemment, l'élève moyen qui n'a pas été instruit à la technique de la lecture mathématique, se heurte souvent à des difficultés de deux espèces différentes: (1) concernant la lecture proprement dite du texte, (2) concernant son interprétation et sa compréhension. Les difficultés du premier genre découlent entre autres du caractère particulier du langage mathématique usuel.

(1) C'est un langage composé d'éléments verbaux, symboliques, graphiques (dessins, schémas). Au cours de la lecture il faut exploiter exactement ces moyens de l'expression mathématique, il faut le faire correctement, et finalement bien harmoniser toutes ces informations.

(2) Le caractère plus profond de ce langage, c'est son style, sa construction de la phrase qui souvent diffère du style du langage commun ainsi que du langage utilisé dans les autres disciplines enseignées à l'école. Il est possible que les difficultés de ce genre se présentent différemment dans les diverses langues, car elles découlent évidemment de l'écart existant entre le langage mathématique et le langage commun et cet écart peut être plus ou moins grand dans les diverses langues.

(3) La précision et la concision du langage mathématique moderne sont une source particulière de difficultés, étant donné qu'ici chaque signe, chaque mot est de la même importance. Or, nos recherches prouvent que la plupart des élèves moyens se contente d'une lecture rapide du texte. Il arrive que quelque chose frappe particulièrement le jeune lecteur et les associations superficielles dominent dès ce moment sa pensée, les autres parties du texte passant absolument inaperçues. L'élève enrichit souvent le texte lu par certaines prémisses à priori. Nous avons observé l'étonnement extraordinaire des écoliers quand on les force à la confrontation exacte de ce qu'ils ont lu – selon leurs avis – avec ce qui a été écrit en réalité. Le jeune lecteur du livre mathématique se heurte donc déjà au premier seuil: lecture attentive du texte. Il lui manque la discipline de l'esprit adulte et ce manque lui rend la lecture mathématique particulièrement difficile.

Les difficultés surgissent quand il passe à l'interprétation du sens de ce qu'il a lu, quand il tâche de comprendre. Certains élèves confondent la mémorisation du texte avec sa compréhension. On a compris donc – selon cette attitude – quand on sait répéter sans faute la définition, le théorème, la démonstration. Il y a d'autres élèves dont les exigences sont plus fines, mais qui se sentent quand même complètement perdus quand il leur faut décoder le sens d'un fourré de symboles, d'expressions verbales, de présentations graphiques.

La construction du cours moderne se caractérise par le nombre considérable de définitions et de conventions. Dans les cours traditionnels les énoncés de théorèmes étaient lourds, embrouillés. Maintenant leur rédaction est élégante, concise. Mais on paye cette élégance par la nécessité de se rappeler beaucoup de définitions. Evidemment les auteurs des manuels tâchent de trouver un optimum entre ces deux extrêmes. Mais cet optimum pédagogique est vague et chaque exagération dans ce domaine cause aussi des difficultés aux élèves. Il faut donc prendre en considération que la lecture du texte mathématique exige du côté de l'élève un effort particulier. A un tel effort l'élève dans notre enseignement traditionnel n'a pas été préparé.

Cette réalité demande une recherche pédagogique adéquate. L'initiation de l'élève aux procédés rationnels de l'étude des textes mathématiques ne pourrait pas être réalisée en classe sans réflexion profonde des professeurs et des méthodologues sur ces procédés, sur l'analyse d'une définition, d'un théorème, d'une démonstration. Evidemment chaque professeur dispose de ses expériences personnelles, de sa technique élaborée à son propre usage. Mais il nous faut ordonner et évaluer tous ces procédés, tous ces moyens, toutes ces formes du passage de la clarté formelle à la clarté psychologique. Et les premières analyses, encore peu ordonnées dans ce domaine, montrent, qu'on y peut trouver certaines "loies générales" qui pourraient être transmises aux élèves au cours de notre enseignement, certainement dans la forme pratique et par les exercices dans la lecture du texte mathématique.

L'écart entre la clarté psychologique et la clarté formelle est un fait objectivement constaté. Il y a beaucoup de dizaines d'années, il a été le sujet de l'étonnement profond exprimé par Henri Poincaré dans son livre *Science et Méthode*.

Pourquoi avons-nous besoin de ce passage de la définition formelle, qui est la plus simple et la plus claire, aux exemples concrets? Pourquoi avons-nous le sentiment d'une compréhension complète, quand nous traduisons la définition élégante par récurrence dans le langage peu formel de l'"et cétéra"? Peut-être tout cela n'est pas compréhensible au niveau de l'élite mathématique. Mais comme je viens de souligner, ce sont des faits psychologiques qui ne peuvent pas être négligés dans l'enseignement.

Il ne faut pas oublier que le livre mathématique sera de plus en plus utilisé par des groupes sociaux plus en plus vastes. Il se trouvera au centre du travail de tous ceux qui devrons améliorer et compléter leur éducation mathématique; c'est une activité qui occupe déjà et occupera davantage à l'avenir les niveaux et les professions divers. Mais – comme nous avons vu – la lecture d'un livre mathématique exige une préparation, un apprentissage, qui peut et doit être organisé consciemment à l'école.

Ces perspectives et ces expériences nous conduisent à deux réflexions, concernant les manuels scolaires.

1. Les manuels, les fiches du travail, les textes progammés devraient exploiter les voies diverses de la présentation du contenu mathématique et de sa pénétration par l'élève: celles qui contiennent des exemples, des introductions intuitives à la formalisation et celles inverses, qui obligent l'élève au décodage du texte formel, à la construction des exemples, des schémas, des modèles, aux interprétations intuitives. Ces deux voies ne sont pas psychologiquement remplaçables l'une par l'autre. Elles développent des opérations intellectuelles diverses.

2. La seconde réflexion concerne les moyens de présentation du texte mathématique dans les manuels scolaires modernes. Les valeurs pédagogiques des inventions nouvelles dans ce domaine sont indiscutables à la lumière de l'expérience. Mais il ne faut pas oublier, que le passage du manuel scolaire, chatoyant de couleurs, de dessins, de schémas ingénieux, au texte gris, concis, sévère du livre mathématique des adultes, peut provoquer des difficultés. Ce passage doit être donc établi successivement à l'école ce qui exige aussi une conception rationnelle d'ensemble des manuels préparés pour les classes consécutives.

Et voilà le problème principal: la conception du manuel scolaire mathématique, dont l'utilisation devrait non seulement aider l'élève à apprendre la mathématique, mais aussi initier l'élève au travail individuel basé sur le livre mathématique, travail qui, malgré les apparences, est grandement créatif. C'est une conception qu'on devrait réaliser.

HANS-GEORG STEINER

MAGNITUDES AND RATIONAL NUMBERS – A DIDACTICAL ANALYSIS

In the traditional teaching of mathematics in elementary and secondary schools an important aspect of the (positive) rational numbers has been strongly neglected: their *relation to measurement* and their interpretation and use as *operators*. In the following I shall give a mathematical analysis of this aspect and according to this analysis characterize and classify some new trends and possibilities in the teaching of the natural and the positive rational numbers. The whole procedure which in particular is based on recent investigations by H. Griesel, A. Kirsch and G. Pickert in Germany (see the references) may be called a *didactical analysis.*

I. NATURAL NUMBERS AS OPERATORS

Let $(S, *)$ be a semi-group, i.e. an ordered pair, consisting in a nonvoid set S and an operation $*: S \times S \to S$ in S, such that $*$ is associative. Then the set $\mathbf{N}$ of all natural numbers operates on S in the following well known sense: To every $n \in \mathbf{N}$ and every $a \in S$ is assigned

$$n \top a = \underbrace{a * a * \cdots * a}_{n \text{ terms}},$$

which we shall call the n-fold of a. If $*$ is replaced by the additive or multiplicative notation respectively, $n \top a$ is usually replaced by na or a^n respectively. (The fact that $\top$ refers to $*$ will be expressed by $\top_*$, if this appears to be necessary in order to avoid confusion.) The precise recursive definition of $n \top a$ is as follows:

$$1 \top a = a, \quad (n+1) \top a = (n \top a) * a. \tag{MF}$$

From (MF) one proves the well known "laws of indices":

$$(m+n) \top a = (m \top a) * (n \top a) \tag{1}$$

$$(m \cdot n) \top a = m \top (n \top a) \tag{2}$$

and – if $*$ is commutative –:

$$m \top (a * b) = (m \top a) * (m \top b). \tag{3}$$

Law (1) shows that for every $a \in S$ the mapping h_a with

$$h_a(m) = m \top a$$

is a *homomorphism* from (N, +) into $(S, *)$,

$$h_a: (\mathbf{N}, +) \to (S, *).$$

For each semi-group $(S, *)$ the mapping h_a is the uniquely determined homomorphism from (N, +) into $(S, *)$ which maps 1 onto a. By this fact one can characterize (N, +) among all semi-groups as a so called *universal object*: Up to isomorphy (N, +) is the only semi-group with a particular element, say 1, such that for all semi-groups $(S, *)$ and every element $a \in S$ there exists exactly one *homomorphism* from (N, +) into $(S, *)$ which maps $1 \in \mathbf{N}$ onto $a \in S$.

If $(S, *)$ is *commutative*, law (3) shows that for every $m \in \mathbf{N}$ the mapping f_m with

$$f_m(a) = m \top a$$

is an *endomorphism* of $(S, *)$:

$$f_m: (S, *) \to (S, *).$$

We call f_m the *m-fold operator* in $(S, *)$ and use "*many-fold operator*" as a generic name for all f_m with $m \in \mathbf{N}$. A rewriting of (3) reads:

$$f_m(a * b) = f_m(a) * f_m(b). \tag{3'}$$

Every mapping $f: S \to S$ may be called an *operator* on S. Let Φ be the set of all operators on S. Then by

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) \quad \text{for all} \quad x \in S \tag{4}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{for all} \quad x \in S \tag{5}$$

two operations $*$ and $\circ$ are defined in Φ. According to (1), (2) and (3) (or (3')) the mapping $[m \to f_m]$ is a homomorphism from $(\mathbf{N}, +, \cdot)$ into $(\Phi, *, \circ)$. From (1) and (2) we can write:

$$f_{m+n}(a) = f_m(a) * f_n(a) = (f_m * f_n)(a) \tag{1'}$$

$$f_{mn}(a) = f_m(f_n(a)) = (f_m \circ f_n)(a). \tag{2'}$$

The mapping $[m \to f_m]$ is an injection (one-one), iff

For all $m, n \in \mathbf{N}$, $m \neq n$, there exists an element $a \in S$ such that $f_m(a) \neq f_n(a)$. (SP)

We call (SP) the *separation property* of $(S, *)$.

Let now F be the set of all many-fold operators on $(S, *)$. If $(S, *)$ is a commutative semi-group with property (SP), then from what has been said before, it is clear that the mapping

$$\varphi:(\mathrm{N}, +, \cdot) \to (F, *, \circ),$$

where $\varphi = [m \to f_m]$, is an isomorphism onto $(F, *, \circ)$.

Thus the natural numbers can be represented as operators on certain semi-groups. They can be independently identified within the set Φ in the following manner: Let $(S, *)$ be a commutative semi-group with property (SP). Let Φ be the set of all operators on $(S, *)$. Let j be the identity mapping $[x \to x]$ on S. Then the set F of all many-fold operators of $(S, *)$ is the smallest subset Ψ of Φ which has the following properties (see [9]):

$$(\alpha)\ j \in \Psi$$

$$(\beta)\ f \in \Psi \Rightarrow f * j \in \Psi .$$

A typical example of using the natural numbers as operators is the interpretation of multiplication in N as iterated addition. $(\mathrm{N}, +)$ itself is a commutative semi-group with property (SP). Let the multiplication $\cdot$ in N be defined recursively according to

$$1 \cdot n = n, \quad (m + 1) \cdot n = m \cdot n + n. \tag{6}$$

Then

$$m \cdot n = f_m(n) = m \top_+ n \tag{7}$$

holds, since the right-hand side of (7) satisfies (6). The distinction in "$m \cdot n$" between m as an *operator* and n as an object being operated upon, sometimes called a *state*, is usually expressed by calling m the *multiplicator* and n the *multiplicand.*

Whereas in the foregoing interpretation the natural numbers play a double role as states and operators, the above characterization of F among all operators of a commutative semi-group $(S, *)$ with property (SP) allows a direct introduction of the natural numbers as operators. One has to start out from appropriate semi-groups $(S, *)$, which are given independently from the number concept. We shall deal with some of those semi-groups in the next section.

II. DOMAINS OF QUANTITIES AND INDIVIDUAL QUANTITIES

During the last decades one has learned to mathematically understand what it means, when the physicist deals with so called *quantities* or *magnitudes*, such as masses, lengths, volumes, etc. To begin with the simplest operations:

two lengths, such as 2 feet (2 ft) and 3 inches (3 in) can be added (to make another length) and any two lengths can be compared with respect to a "greater than" relation. The same holds for masses, volumes, durations of time, etc. As an analysis of the practical use of quantities shows, we have in all cases (neglecting negative and zero quantities at the moment) the following *quasi-domain of quantities* (or magnitudes):

There is a triple $(M, +, <)$, where M is the particular set of quantities (of the same type), such that:

$(M, +)$ is a commutative semi-group with at least two elements. (M_1)

For all $x, y \in M$ exactly one of the following formulas is valid (M_2)

$$x < y,\ x = y,\ y < x.$$

For all $x, y \in M$ (M_3)

$$x < y \Leftrightarrow \text{there is a } z \in M \text{ with } x + z = y.$$

If $(M, +, <)$ is a quasi-domain of quantities, one can easily derive the following (see [9]): $(M, +)$ has the *separation property in the strong sence:*

For all $m, n \in \mathrm{N}$, $m \neq n$, and for all $a \in M$: (SP′)

$$f_m(a) \neq f_n(a).$$

Furthermore: $(M, +)$ is a *regular* semi-group, which means that the cancellation law holds: For all $a, b, x \in M$:

$$a + x = b + x \Rightarrow a = b.$$

The relation $<$ turns out to be transitive. This means in connection with (M_2), that $<$ is a *linear order* in M. Also the *law of monotony* holds: For all $x, y, z \in M$:

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z.$$

Finally the following can be proved: For all operators $f, g \in F$ (related to $(M, +)$): if there exists an element $a \in M$ such that $f(a) < g(a)$, then $f(x) < g(x)$ for all $x \in M$. This allows the definition of an ordering in F according to

$$f < g \Leftrightarrow_{\text{def}} f(x) < g(x) \quad \text{for all} \quad x \in M. \tag{8}$$

Let us now consider an introduction of the natural numbers as operators in a quasi-domain of quantities and compare it with the usual introduction of the naturals as cardinal numbers. In the second approach one needs a sufficiently large set of finite sets, e.g. the set of all nonvoid finite subsets of any infinite set. A natural number is then defined as an equivalence class of equi-potent sets. Addition and multiplication of natural numbers are defined by means of the union and the cartesian product of sets. Ordering of natural numbers can be based on the subset relation between representatives. The identification and naming of the individual natural numbers begins with the singleton sets and follows some recursive pattern.

In the other approach we start out from a quasi-domain of quantities $(M, +, <)$. Among the operators of this domain we consider those which belong to F, i.e. which are generated from the identity operator j on M by the operator addition, defined in (4). We put

$$\begin{aligned}&1 =_{\mathrm{def}} j\\&2 =_{\mathrm{def}} j + j\\&3 =_{\mathrm{def}} j + j + j\\&\text{etc.}\end{aligned}$$

Addition and multiplication of natural numbers are defined by (4) and (5). Ordering can be based on (8). In this approach one may think of natural numbers as *stretching machines* or *enlarging machines* which stretch any given length or enlarge any given volume or mass etc. Multiplication of natural numbers is then performed by hooking up those machines.

It has to be noticed that physical quantities are already abstractions, namely of *concrete* or *individual quantities*, such as sticks, which may represent lengths, concrete physical bodies which may represent masses or volumes, concrete intervals of time, which may represent durations of time. Since the operating of the natural numbers also applies to individual quantities in a certain way, we shall also investigate some structural features of *domains of individual quantities*. In this investigation, which, of course, leads only to an *idealized model* of the real world, we may be guided by observations related to concrete operations with sticks or entities of water or clay. Different sticks can be *put together* to make a new stick. Sticks can be compared whether they are *equally long* or whether one is *longer than* the other. Individual quantities of water can be *poured together* to make a new individual quantity of water. Individual quantities of water can be compared whether they are *equally heavy* or *equally voluminous* or whether one is *heavier than* the other or *more voluminous* than the other. In practice one usually thinks of only pouring together individual quantities of water which have no molecules in common or – as we shall say – which are *disjoint*. We may, however, think of the putting or pouring together process as something like the set-theoretical operation of *union*. In this way we get an unrestricted operation $\oplus$ in the domain I of individual quantities with $\alpha \oplus \alpha = \alpha$ for all $\alpha \in I$, which makes $(I, \oplus)$ an *idempotent* operational system. But also in this interpretation of the putting or pouring together process a disjoint-relation $\triangle$ is indispensable, since, for example, pouring together of individual quantities of water corresponds to the addition of weights or volumes only, if the individual quantities are disjoint.

Gathering the data from the foregoing analysis and observing some familiar features of handling individual quantities lead us to the following description of *a quasi-domain of individual quantities*: There is a quintuple $(I, \triangle, \sim, \oplus, \prec)$, of which I is the particular set of individual quantities $\triangle, \sim, \prec$ are binary relations in I, and $\oplus$ is an operation in I, such that the following holds

$(I, \oplus)$ is an idempotent commutative semi-group. (I_1)

$\triangle$ (the so called "disjoint-relation") has the following properties: For all $\alpha, \beta, \gamma \in I$: (I_2)

(a) $\alpha \triangle \beta \Rightarrow \beta \triangle \alpha$ (symmetry)
(b) $\neg \alpha \triangle \alpha$ (anti-reflexivity)
(c) $\alpha \triangle \gamma$ and $\beta \triangle \gamma \Leftrightarrow (\alpha \mathrm{D} \beta) \triangle \gamma$.

$\sim$ is an equivalence relation with at least two equivalence classes in I. (I_3)

For all $\alpha, \beta \in I$ exactly one of the following three cases is valid: (I_4)

$\alpha \prec \beta, \alpha \sim \beta, \beta \prec \alpha$.

For all $\alpha, \beta, \gamma \in I$: If $\gamma \triangle \alpha$ and $\gamma \triangle \beta$, then (I_5)

(a) $\alpha \sim \beta \Rightarrow \alpha \oplus \gamma \sim \beta \oplus \gamma$
(b) $\alpha \prec \beta \Rightarrow \alpha \oplus \gamma \prec \beta \oplus \gamma$.

For all $\alpha, \beta \in I$: (I_6)

$\alpha \prec \beta \Leftrightarrow$ there is a $\mathbf{y} \in I$: $\mathbf{y} \triangle \alpha$ and $\alpha \oplus \mathbf{y} \sim \beta$.

For all $\alpha, \beta \in I$ there exists an infinite number of $\alpha_i \in I$ such that (I_7)

$\alpha_i \triangle \alpha_j \; (i \neq j), \alpha_i \triangle \alpha, \alpha_i \triangle \beta, \alpha_i \sim \alpha$.

The quasi-domains of quantities and the quasi-domains of individual quantities are related in the following way: If the system $(I, \triangle, \sim, \oplus, \prec)$ is a quasi-domain of individual quantities, then $\sim$ is a congruence relation with respect to $\oplus$ and $\prec$, such that we can form the *quotient-system* $(M, +, <)$, where $M = I/\sim$ (i.e. M is the set of all equivalence classes $\lfloor \alpha \rfloor$ for all $\alpha \in I$) and $+$ and $<$ are defined according to

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor =_{\text{def}} \lfloor \alpha \oplus \beta \rfloor, \quad (\text{if } \alpha \triangle \beta). \tag{9}$$

$$\lfloor \alpha \rfloor < \lfloor \beta \rfloor \Leftrightarrow_{\text{def}} \alpha \prec \beta. \tag{10}$$

One can easily prove: If $(I, \triangle, \sim, \oplus, \prec)$ is a quasi-domain of individual quantities, then the quotient system $(M, +, <)$ is a quasi-domain of quantities.

Here are some *examples* of systems which have the pre-structure of a domain of individual quantities (see also [5], where a slightly different definition for domains of individual quantities is used):

(α) I = set of all finite unions of closed line segments (with more than one point) on a given euclidean line,
$\alpha \triangle \beta \Leftrightarrow \alpha$ and β have no inner points in common
$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha$ and β are congruent by parts
$\alpha \prec \beta \Leftrightarrow \alpha$ is congruent by parts to a proper subset of β
$\alpha \oplus \beta = \alpha \cup \beta$.

(β) I = set of all finite unions of closed sectors of an infinite number of given disks in the euclidean plane, the disks being disjoint and congruent.
$\triangle$, $\sim$, $\oplus$, $\prec$ see (α).

(γ) I = set of all finite unions of closed and connected three-dimensional subsets of an infinite number of given closed, connected and bounded regions in the euclidean 3-space, the regions being disjoint.
$\triangle$, $\sim$, $\oplus$, $\prec$ see (α).

(δ) I = set of all finite non-empty subsets of a given infinite set
$\alpha \triangle \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset$
$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha$ and β are equi-potent
$\alpha \prec \beta \Leftrightarrow \alpha$ is equi-potent to a proper subset of β
$\alpha \oplus \beta = \alpha \cup \beta$.

Example (α) is an idealization of the "world of sticks", whereas (β) can be used to describe some activities with pieces of cake or cheese, represented by sectors. (γ) can be used to describe actions with individual quantities of a suitable substance, which can be identified by their spacial extension. (δ) shows that the abstraction process which leads from finite sets to natural numbers, described above as one approach to natural numbers, is a particular case of the abstraction process, which leads from a quasi-domain of individual quantities to a quasi-domain of quantities. The system $(\mathbf{N}, +, <)$, indeed is a quasi-domain of quantities.

We will now see, how the natural numbers are used in connection with a system $(I, \triangle, \sim, \oplus, \prec)$. Since $(I, \oplus)$ is a semi-group we could immediately apply the many-fold operators f_m on $(I, \oplus)$. However, since $(I, \oplus)$ is idempotent, we have

$$f_m(\alpha) = m \top_{\oplus} \alpha = \alpha \quad \text{for all} \quad \alpha \in I, \tag{11}$$

which apparently is not what we have in mind, when we say:

$$\text{“}\beta \text{ is an } m\text{-fold of } \alpha\text{”}. \tag{12}$$

One may observe the indefinite article in this sentence. We used "an *m*-fold of" rather than "the *m*-fold of". In fact, what we have in mind is this: Let $(M, +, <)$ be the quotient-system of $(I, \triangle, \sim, \oplus, \prec)$. Then we mean by (12) the same as

$$\lfloor \underline{\beta} \rfloor = m \top_{+} \lfloor \underline{\alpha} \rfloor, \tag{13}$$

which we read "$\lfloor \underline{\beta} \rfloor\}$ is the *m*-fold of $\lfloor \underline{\alpha} \rfloor\}$ in $(M, +)$". As an abbreviation for (12) we use

$$\alpha F_m \beta. \tag{14}$$

F_m is a binary relation in I which is not a function, since $\alpha F_m \beta$ implies $\alpha F_m \beta_i$ for all the infinitely many β_i which exist according to (I_7). This is the reason for the use of the indefinite article in (12). A definition of F_m without using the quotient-system can be given in the following way:

$$\begin{aligned} \alpha F_m \beta \Leftrightarrow_{\text{def}} & \text{ There are } \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in I \text{ such} \\ & \text{that } \alpha_i \sim \alpha, \alpha_i \triangle \alpha_j \ (i \neq j), \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_m \sim \beta. \end{aligned} \tag{IMF}$$

One can then easily prove

$$\alpha F_m \beta \Leftrightarrow \lfloor \underline{\beta} \rfloor = m \top_{+} \lfloor \underline{\alpha} \rfloor. \tag{15}$$

The use of a *unit in a measuring process* in $(I, \triangle, \sim, \oplus, \prec)$ can be described in the following manner: Let ω be an individual quantity in I which shall be used as a *representative of a unit of measuring*, such as the famous stick in Paris. Then the unit u is defined as the class of ω:

$$u = \lfloor \underline{\omega} \rfloor. \tag{16}$$

In case of the stick ω in Paris, $\lfloor \underline{\omega} \rfloor\}$ was called the "meter".

Let now α be any individual quantity in I, such that

$$\omega F_m \alpha \quad \text{or} \quad \lfloor \underline{\alpha} \rfloor = m \top_{+} u, \tag{17}$$

then m is uniquely determined because of the strong separation property of $(M, +)$. We call m the *u-measure of* $\lfloor\alpha\rfloor$ as well as the *u-measure of* α.

Let, for example, α be a stick whose meter-measure is 3. Then $\lfloor\alpha\rfloor$ is a length, which we call "3 meters", and we say that α has the length of 3 meters.

The measuring relation between I, M and $\mathbf{N}$ can be illustrated by a diagram (see Figure 1).

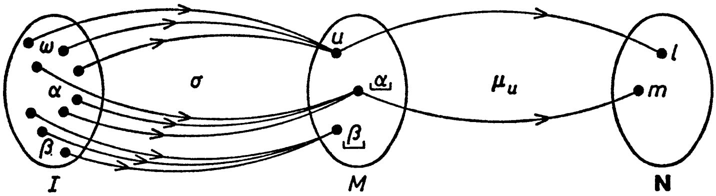


Fig. 1.

In this diagram σ is the canonical mapping $[\alpha \rightarrow \lfloor\alpha\rfloor]$, which maps each $\alpha \in I$ onto its equivalence class $\lfloor\alpha\rfloor \in M$, and μ_u, the so-called *u-measuring function of M*, is defined by

$$\mu_u(\lfloor\alpha\rfloor) = m \Leftrightarrow \lfloor\alpha\rfloor = m \top_+ u\,. \tag{18}$$

It should be mentioned that in general the domain of μ_u is a proper subset of M (as indicated in Figure 1), namely the set $U_{\mathbf{N}}$ of all $m \top_+ u$. The homomorphism

$$h_u\colon (\mathbf{N}, +) \rightarrow (M, +)$$

with $h_u(m) = m \top_+ u$ is an isomorphism from $(\mathbf{N}, +, <)$ onto $(U_{\mathbf{N}}, +, <)$:

$$h_u\colon (\mathbf{N}, +, <) \rightarrow (U_{\mathbf{N}}, +, <)\,. \tag{19}$$

This means, that $(U_{\mathbf{N}}, +, <)$ is another representation of $(\mathbf{N}, +, <)$ in addition to $(F, +, <)$. On this ground we can state:

> There exists a unit u in M such that the domain of μ_u is M, iff $(M, +, <)$ is isomorphic to $(\mathbf{N}, +, <)$.

We conclude this paragraph by stating the *additivity property* of the measuring function. From (1) it is clear that for all $a, b \in M$:

$$\mu_u(a + b) = \mu_u(a) + \mu_u(b)\,. \tag{20}$$

According to (9) we have

$$\alpha \triangle \beta \Rightarrow \sigma(\alpha \oplus \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)\,. \tag{21}$$

We put

$$\mu'_u =_{\text{def}} \mu_u \circ \sigma\,, \tag{22}$$

and call it the *u-measuring function of I.* From (21) and (22) we get

$$\alpha \triangle \beta \Rightarrow \mu'_u(\alpha \oplus \beta) = \mu'_u(\alpha) + \mu'_u(\beta)\,. \tag{23}$$

There are many activities related to the subject of the foregoing section. They should play a basic role in early learning of mathematics. We shall explain these activities later. In the next section we shall show, how the considerations of this section can be extended to an interpretation of the positive rational numbers as operators and their application to magnitudes or quantities.

III. DIVISIBILITY AND RATIONAL NUMBERS

In many applications rational numbers are used as operators. This is evident from expressions like "$\frac{1}{2}$ of a meter", "$\frac{5}{4}$ of a pound" etc., and also from expressions like "$\frac{1}{2}$ of a stick", "$\frac{2}{3}$ of a cake", etc. In order to analyze this aspect of the rational numbers we again first deal with systems $(M, +, <)$ which are quasi-domains of quantities. A natural way to define

$$\text{“}b \text{ is } \frac{1}{n} \text{ of } a\text{”}$$

or

$$\text{“}b \text{ is the } n\text{-th part of } a\text{”} \tag{24}$$

is by means of

$$\text{“}a = f_n(b) = n \top_+ b\text{”} \tag{25}$$

as a definiens.

One expects that in this definition b is uniquely determined for each $a \in M$. This, of course, is guaranteed, iff the mapping f_n is injective (one-one). The latter is not the case in arbitrary semi-groups (as any group with an element of finite order shows). However, if $(M, +, <)$ is a quasi-domain of quantities, then f_n is injective for all $n \in \mathrm{N}$, as can easily be derived from the monotony property of $+$ in $(M, +, <)$. Therefore we can introduce the *n-th part function* p_n of $(M, +, <)$ for every $n \in \mathrm{N}$ according to

$$b = p_n(a) \Leftrightarrow_{\text{def}} a = f_n(b)\,, \tag{26}$$

which means that p_n is the *inverse mapping* of f_n.

If $(M, +, <)$ is a quasi-domain of quantities, the domain of p_n may well be a proper subset of M. A typical example is $(\mathrm{N}, +, <)$, where for each

$n \in \mathrm{N}$ the related p_n is only defined on the set of all multiples of n. Those restrictions for the p_n should not occur in what we will call "*domains of quantities*". For the concept of a domain of quantities we therefore use the following

DEFINITION: $(M, +, <)$ is called a *domain of quantities*, iff $(M, +, <)$ is a quasi-domain of quantities and has the property:
All $f_n \in F$ are surjective. (M_4)

Property (M_4) can be related to the concept of *divisibility of a semi-group*. A semi-group $(S, *)$ is called *divisible*, iff for all $n \in \mathrm{N}$ the mapping f_n is surjective. It is called *uniquely divisible*, iff it is divisible and all f_n are injective. From the definition it is clear, that a domain of quantities $(M, +, <)$ is a uniquely divisible semi-group and that therefore the mappings p_n belong to the operators on M. The p_n shall therefore be called the *n-th part operators* of $(M, +, <)$.

The next step of our analysis is the definition of

$$\text{“}b \text{ is } \frac{m}{n} \text{ of } a\text{”}$$

or

$$\text{“}b \text{ is the } m\text{-fold of the } n\text{-th part of } a\text{”}, \tag{27}$$

which, of course, is given by

$$b = f_m(p_n(a)) = (f_m \circ p_n)(a). \tag{28}$$

This leads to the consideration of the set Ω of all products $f_m \circ p_n$ for any $m, n \in \mathrm{N}$, which is a subset of the set Φ of all operators on M. We call Ω the set of all *rational operators* on M.

Without difficulties one can prove, that Ω is closed under the operations $\circ$ and $+$, which are defined on all Φ according to (4) and (5), and that the following holds (see [10]):

$(\Omega, \circ)$ is a commutative group.

$(\Omega, +)$ is a commutative, regular semi-group.

$\circ$ is distributive over $+$.

Let $\mathbf{Q}^+$ be the set of all positive rational numbers and let every element in $\mathbf{Q}^+$ be represented by a fraction m/n in the reduced form, then the mapping φ, with

$$\varphi = \left[\frac{m}{n} \to f_m \circ p_n\right]$$

is a mapping from $\mathbf{Q}^+$ onto Ω. One can prove, that

$$\varphi:(\mathbf{Q}^+, +, \cdot) \to (\Omega, +, \circ)$$

is a surjective isomorphism.

Thus the positive rational numbers can be represented by the rational operators of a domain of quantities $(M, +, <)$. An independent *characterization of* Ω within Φ can be given as follows: The set Ω of all rational operators of $(M, +, <)$ is the smallest subset Ψ of Φ such that

$$F \subseteq \Psi \tag{α'}$$

$$(\Psi, \circ) \text{ is a group}. \tag{β'}$$

The fact that the positive rational numbers operate on every domain of quantities $(M, +, <)$ can also be expressed by the concept of *half-vector-space over* $\mathbf{Q}^+$. A commutative semi-group $(V, +)$ is called a half-vector-space over $\mathbf{Q}^+$, iff for all $r \in \mathbf{Q}^+$ and all $v \in V$ a "product" $rv \in V$ is defined, such that

$$r(v + w) = rv + rw, \quad \text{for all} \quad r \in \mathbf{Q}^+, v, w \in V \tag{HV$_1$}$$

$$(r + s)\, v = rv + sv, \quad \text{for all } r, s \in \mathbf{Q}^+, v \in V \tag{HV$_2$}$$

$$(rs)\, v = r(sv), \quad \text{for all } r, s \in \mathbf{Q}^+, v \in V. \tag{HV$_3$}$$

Let now for all $m/n \in \mathbf{Q}^+$ and all $a \in M$ the product $(m/n)a$ be defined by $(f_m \circ p_n)(a)$. Then (HV_1), (HV_2), (HV_3) are fulfilled. Thus, with respect to this product $(M, +)$ is a half-vector-space over $\mathbf{Q}^+$.

We will now see, how the rational numbers are used in connection with individual quantities. It seems quite natural, to define

$$\text{"}\beta \text{ is an } n\text{-th part of } \alpha\text{"} \tag{29}$$

by

$$\lfloor\beta\rfloor = p_n(\lfloor\alpha\rfloor). \tag{30}$$

This again is a relation in I which is not a function. It may be denoted by "P_n". A definition of P_n without using $(M, +, <)$ can be given by

$$P_n =_{\text{def}} \breve{F}_n, \tag{31}$$

i.e. P_n is defined as the *converse relation* of F_n. One can then easily prove:

$$\alpha P_n \beta \Leftrightarrow \lfloor\beta\rfloor = p_n(\lfloor\alpha\rfloor). \tag{32}$$

In order to guarantee the divisibility of its quotient system $(M, +, <)$, the system $(I, \triangle, \sim, \oplus, \prec)$ must have a special property:

$$\text{For all } \alpha \in I \text{ there is a } \beta \in I, \text{ such that } \alpha P_n \beta. \tag{I_8}$$

Or, eliminating P_n and F_n according to their definitions:

For all $\alpha \in I$ and all $n \in \mathrm{N}$ there exists $\beta \in I$ and $\beta_1, \dots, \beta_n \in I$, such that

$$\beta_i \sim \beta,\ \beta_i \triangle \beta_j (i \neq j) \text{ and } \beta_1 \oplus \cdots \oplus \beta_n \sim \alpha. \tag{I$'_8$}$$

We use this property in the following

DEFINITION: $(I, \triangle, \sim, \oplus, \prec)$ is called a *domain of individual quantities,* iff it is a quasi-domain of individual quantities and has the property (I'_8).

We can now define

$$\text{“}\beta \text{ is an } m\text{-fold of an } n\text{-th part of } \alpha\text{”} \tag{33}$$

by

$$\text{“}\alpha F_m \square P_n \beta\text{”}, \tag{34}$$

where the composition of relations is meant in the well known sense of

$$\alpha F_m \square P_n \beta \Leftrightarrow \text{there exists a } \gamma \in I, \text{ such that } \alpha F_m \gamma \text{ and } \gamma P_n \beta. \tag{35}$$

It is clear, that

$$\alpha F_m \square P_n \beta \Leftrightarrow \lfloor \beta \rfloor = (f_m \circ p_n) (\lfloor \alpha \rfloor). \tag{36}$$

The relation $F_m \square P_n$ has been carefully analyzed by Griesel in [6].

Since the rational numbers operate on all domains of quantities, they can be used as *measures.* In Figure 1, N can be replaced by $\mathbf{Q}^+$, and μ_u can now be interpreted as the *rational u-measuring function,* defined by

$$\mu_u(a) = \frac{m}{n} \Leftrightarrow a = (f_m \circ p_n)(u). \tag{37}$$

It is important to realize that the domain of this extended u-measuring function of M can still be a proper subset of M, since not necessarily every quantity $a \in M$ is measurable by u in rational numbers. This is the problem of *incommensurability,* which historically arose the first time in connection with the rational measuring problem in Greek axiomatic geometry. In terms of the half-vector-space concept the domain of μ_u being M for any $u \in M$ is equivalent to the *one-dimensionality* of $(M, +)$ over $\mathbf{Q}^+$. A half-vector-space $(V, +)$ over $\mathbf{Q}^+$ is called one-dimensional, iff there exists an element $v_\circ \in V$ such that for all $v \in V$ there is an element $r \in \mathbf{Q}^+$ with $v = rv_\circ$.

In every domain of quantities $(M, +, <)$ we have for each $u \in M$ the set $U_{\mathbf{Q}^+}$, which consists of all

$$(f_m \circ p_n)(u), \quad \text{for any } \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}^+.$$

Now the mapping

$$h_u\colon \mathbf{Q}^+ \to U_{\mathbf{Q}^+},$$

with

$$h_u\left(\frac{m}{n}\right) = (f_m \circ p_n)(u)$$

(for all $r \in \mathbf{Q}^+$, represented by m/n as a reduced fraction) is an isomorphism from $(\mathbf{Q}^+, +, <)$ onto $(U_{\mathbf{Q}^+}, +, <)$:

$$h_u\colon (\mathbf{Q}^+, +, <) \to (U_{\mathbf{Q}^+}, +, <), \tag{38}$$

which means, that $(U_{\mathbf{Q}^+}, +, <)$ is another representation of $(\mathbf{Q}^+, +, <)$ in addition to $(\Omega, +, <)$. This realization of the positive rational numbers exists in every domain of quantities for any $u \in M$.

We call *minimal domain of quantities* every domain of quantities $(M, +, <)$, for which an element $u \in M$ exists such that the domain of μ_u is M or, equivalently, for which $(M, +)$ with respect to the product defined above is a one-dimensional vector space over $\mathbf{Q}^+$. Here M is identical with the set $U_{\mathbf{Q}^+}$ and

$$(M, +, <) = (U_{\mathbf{Q}^+}, +, <).$$

Therefore $(M, +, <)$ is isomorphic to $(\mathbf{Q}^+, +, <)$.

For physical theories as well as for euclidean geometry one usually accepts the *real numbers* as adequate measures. This claims a special property of the related domains of quantities which makes them so called *complete domains of quantities* (for example the property of Dedekind continuity of $(M, <)$) (see [12]). In terms of the concept of half-vector-space this means, that $(M, +)$ has to be a one-dimensional half-vector-space over $\mathbf{R}^+$, the set of all positive real numbers.

IV. COMMERCIAL ARITHMETIC: PROPORTIONALITY

A typical problem of commercial arithmetic is the following one

3 pounds of something cost 75 cents. (A)
How much does 5 pounds cost?

Here are two domains of quantities involved, the domain of *weights* and the domain of *quantities of money*. For a popular and an elementary teaching viewpoint one can assume, that both domains – let's call them $(M, +, <)$ and $(M', +, <)$ – are minimal domains of quantities or one-dimensional half-vector-spaces over $\mathbf{Q}^+$. In problem (A) one tacitly makes the assumption that the relation between weight and money is a *linear mapping*

$$\varphi:(M, +)\to(M', +),$$

which means that φ has the property:
For all $a, b \in M$ and all $r, s \in \mathbf{Q}^+$:

$$\varphi(ra + sb) = r\varphi(a) + s\varphi(b). \tag{39}$$

It is interesting to see that for one-dimensional half-vector-spaces over $\mathbf{Q}^+$ the linearity (39) is a consequence of the (natural) *proportionality* of φ: For all $a \in M$ and all $n \in \mathbf{N}$:

$$\varphi(na) = n\varphi(a), \tag{40}$$

which seems to be the simple, popular meaning of proportionality (see [8]). From (40) (via (39)) one also gets

$$a < b \Rightarrow \varphi(a) < \varphi(b) \tag{41}$$

and as a special case of (39):

$$\varphi\left(\frac{1}{m}\,a\right) = \frac{1}{m}\,\varphi(a). \tag{42}$$

Furthermore the mapping φ is always bijective (injective and surjective) and the inverse φ^{-1} of φ is itself a linear mapping from $(M', +)$ onto $(M, +)$.
Another problem of commercial arithmetic is this:

8 machines can do a job in 20 hours. (B)
How many hours do 5 machines need for the same job?

Assuming (a certain type of) *working capacity* and *duration of time* as minimal domains of quantities or one-dimensional half-vector-spaces over $\mathbf{Q}^+$, the basic assumption which is tacitly made here is that the relation between the first domain of quantities $(M, +)$ and the second domain $(M', +)$ is an *anti-proportionality* ψ, which means: For all $a \in M$ and all $n \in \mathbf{N}$:

$$\psi(na) = \frac{1}{n}\,\psi(a). \tag{43}$$

From (43) (using the one-dimensionality of $(M, +)$ and $(M', +)$ over $\mathbf{Q}^+$) one derives:

$$\psi\left(\frac{1}{n}\,a\right) = n\psi(a) \tag{44}$$

$$\psi\left(\frac{m}{n}\,a\right) = \frac{n}{m}\,\psi(a) \tag{45}$$

$$a < b \Rightarrow \psi(a) > \psi(b). \tag{46}$$

Furthermore: ψ is bijective and ψ^{-1} is an anti-proportionality from $(M', +)$ onto $(M, +)$.

The use of methods, which are related to these formulas, may be briefly explained in connection with the following tables:

(A)

a	$\varphi(a)$
3 pd	75 c
5 pd	----
6 pd	----
1 pd	----
----	175 c
8 pd	----

(B)

a	$\psi(a)$
8 mach	20 h
5 mach	----
2 mach	----
------	15 h
------	1 h

Table (A): From the first line to the third line by taking the 2-fold on both sides. From the first line to the fourth line by taking the 4-th part on both sides. From the first to the second line by taking "$\frac{5}{3}$ of" on both sides. From the first and the second line to the sixth by adding the quantities of the first two lines on both sides. From the first line to the fifths line by taking the "$\frac{7}{3}$ of" on both sides etc.

Table (B): From the first to the third line by taking the 4-th part on the left side and the 4-fold on the right side etc.

There are two other ways of looking at problems like (A) and (B). One way is to identify all one-dimensional half-vector-spaces over $\mathbf{Q}^+$ with $(\mathbf{Q}^+, +)$ according to the isomorphy of $(M, +, <)$ and $(\mathbf{Q}^+, +, <)$. Let φ be a proportionality from $(M, +)$ onto $(M', +)$ then an equation

$$b = \frac{m}{n} a \quad \text{in} \quad (M, +)$$

implies the equation

$$\varphi(b) = \frac{m}{n}\, \varphi(a) \quad \text{in} \quad (M', +).$$

Interpreted as equations of rational numbers the two equations imply

$$\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)} = \frac{b}{a} = \frac{m}{n} \tag{47}$$

$$\frac{\varphi(b)}{b} = \frac{\varphi(a)}{a}, \tag{48}$$

whereas for an anti-proportionality ψ with (45) we get

$$a\psi(a) = b\psi(b) \tag{49}$$

$$\frac{\psi(b)}{\psi(a)} = \frac{a}{b} = \frac{n}{m}. \tag{50}$$

The solution of problems like (A) can now be based on (47) or (48) and of problems like (B) on (49) or (50). This is a very common practice. However, as the foregoing analysis has shown it is not necessary to first drop the "denominations" (in order to get rational numbers), then calculate and finally put back "denominations".

The dropping of "denominations" (i.e. of the unit vector) is not even necessary, if one wants to work with (47), (48), (49) and (50). (47) and (50) can be interpreted in the following way: In any one-dimensional half-vector-space $(M, +)$ over $\mathbf{Q}^+$ we define

$$b \,\vdots\, a = r \in \mathbf{Q}^+, \quad \text{iff} \quad b = ra. \tag{51}$$

In place of (47) or (50) we then have:

$$\varphi(b) \,\vdots\, \varphi(a) = b \,\vdots\, a = m \div n, \tag{52}$$

$$\psi(b) \,\vdots\, \psi(a) = a \,\vdots\, b = n \div m. \tag{53}$$

An interpretation of (48) and (49) to be meaningful for quantities, needs the introduction of a multiplication and division of quantities of different types, as they are used in *systems of quantities in physics*. In problem (A) equation (48) would then mean the *constancy of a quotient of quantities*, namely of the *price* as the quotient of a quantity of money and of a weight, whereas (49) would mean the *constancy of a product of quantities*, namely of a working capacity and a duration of time.

Various mathematical definitions for a system of quantities have been given ([6], [7], [12]). The following one (which includes zero- and negative quantities and which uses the real numbers) has been given by Griesel in [7]:

DEFINITION: $(\Gamma, \equiv, +, \odot)$, wherein Γ is a nonvoid set, $\equiv$ is a relation in Γ, $\odot$ an operation in Γ and $+$ a partial operation in Γ, is called a *system of quantities*, iff

$\equiv$ is an equivalence relation, (S_1)

$+$ is defined on each equivalence class $V \in \Gamma/\equiv$ such that $(V, +)$ is a commutative group and a vectorspace over $\mathbf{R}$ with respect to a product rv for all $r \in \mathbf{R}$ and $v \in V$. (S_2)

$(\Gamma \backslash N, \odot)$, where N is the set of all neutral elements in the groups $(V, +)$ (null-vectors) is a commutative group. (S_3)

For all $r \in \mathbf{R}$ and $a, b \in \Gamma$:

$$r(a \odot b) = (ra) \odot b = a \odot (rb). \qquad (S_3)$$

In this definition we can also use $\mathbf{Q}$ in place of $\mathbf{R}$ and thus get the concept of a rational system of quantities. If we use $\oplus$ as a symbol for division in $(\Gamma, \odot)$, we can then interprete (48) and (49) by

$$\varphi(b) \oplus b = \varphi(a) \oplus a \qquad (54)$$

$$a \odot \psi(a) = b \odot \psi(b). \qquad (55)$$

V. TEACHING ASPECTS

On the background of the foregoing analysis our introductory remarks can now be made more specific. In the teaching of mathematics from its beginnings in Kindergarten and elementary school the following complex should play an important role:

(a) Natural and positive rational numbers as *operators.*

(b) The structure of the *underlying domains* of quantities and individual quantities.

(c) The process of *measuring*, isomorphic representations of numbers in domains of quantities.

(d) *Mappings* between domains of quantities, especially *proportionalities* and *anti-proportionalities.*

(e) Algebra of denominated numbers, *systems of quantities.*

The teaching of the natural and the positive rational numbers has been strongly influenced by the *standard constructions of the number system*, taught at teachers colleges and universities: the "construction" of the naturals as cardinal numbers and the construction of the positive rationals as sets of ordered pairs of natural numbers (according to the general process of embedding regular semi-groups into groups). Since mappings or operators were not really accepted as objects, the operator approach was neglected and the old-fashioned pan-cake method of teaching fractions discredited rather than analyzed and justified from a mathematical point of view.

In the recent development of mathematics education *numbers as operators* have been stressed in general by G. and F. Papy and Z. P. Dienes. The Papys' main access to this aspect comes along with their strong use of arrow diagrams from the first grade on. If, for example, an equation like $2 \cdot x + 3 = 11$ is to be solved by means of a diagram like Figure 2, then the numbers 2 and 3 are interpreted as mappings, whereas x and 11 are related to "states". The chain of arrows corresponds to the composition of mappings.

Dienes (see [4]) (and also the Papys on their minicomputer) uses sets of finite sets as an underlying system with the structure of quasi-domain of individual quantities, in order to interprete natural numbers as operators and to introduce the positive rational numbers under the operator idea.

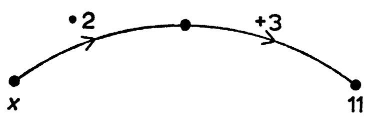


Fig. 2.

Tacitly some abstractions are involved, caused by some kind of standard representation of equivalent finite sets by sets of sticks, markers or circles on paper. Thus in the children's work the structure of a domain of quantities is more or less at hand. However, since this system is not a divisible semigroup, the n-th part operators and many of their compositions with manyfold operators are not defined for all quantities in the system. Therefore the application of these operators has to be restricted to sets with a suitable number of elements. (A complete analysis of this restriction and some kind of algebraic completion has been given by Pickert in [10].)

Dienes does not only interprete the positive rationals as operators but also as "states", so-called "*fractional states*": Some standard set may represent a "unit-state". Then the set which represents an m/n of the unit – if such a set exists – is called the "state m/n" (relative to the unit). This corresponds to the traditional approach to "fractions" by using pan-cakes or chocolate-bars as units. In the traditional teaching, however, the relations and operators involved were not observed and were not made a subject of well arranged learning activities. The state interpretation dominated (See the criticism of this attitude in [10] and in the publications by Griesel, listed in [5].)

The underlying domains for the pan-cake or chocolate-bar approach do not have the deficiency of non-divisibility (see example (β)). On the other hand the system of finite sets as used by Dienes has the advantage of an easy identifiability and a simple reproducibility of its quantities.

Good material for activities in underlying domains and with respect to the abstractions involved is available in the *Cuisenaire rods*. As sticks they are individual quantities. Their color identifies an equivalence-class with respect to "equally long", i.e. a length.

Thus the whole interplay between a system with the structure of quasi-domains of individual quantities and its quotient system can be made a matter of learning experience in this embodyment. Since the Cuisenaire rods consist of the initial many-folds of a unit-rod, their colors represent the first natural numbers in the domain of lengths, and every rod can be considered a representative of a natural number ("numbers in color"!). In connection with the operator aspect of the natural and rational numbers as related to the rods one can especially teach the idea of measuring adequately. If, for example, a red rod is used as a representative of the unit of measurement, then red arrows may be used in a diagram which assigns to each rod, placed on the paper, an element of $\mathbf{N}$ or $\mathbf{Q}^+$ (represented partially by points inside of a closed curve) as its red-measure. It may be mentioned that many of the corresponding activities play a fundamental role in the new curriculum which is being designed for the elementary school level as part of a broad mathematics curriculum by the Comprehensive School Mathematics Program (CSMP) in Carbondale, Ill.

For the introduction of the positive rational numbers as operators the Cuisenaire rods have the same deficiency as the finite sets. Therefore one should also deal with underlying systems, which in their idealization are divisible. Whereas pan-cakes and chocolate-bars are rather impractical to handle physically and therefore are usually only dealt with in geometrical pictures, the domain of *individual quantities of clay* is an excellent material for actual manipulation. In this domain one may use "equally heavy" as the equivalence relation and "heavier than" as the preordering relation. As an instrument of practicing these relations the children use a balance. From our theoretical description it should be clear what a wealth of activities can be performed with this material. The use of this material is also presently being developed and tried out with children of the 3rd grade in the Comprehensive School Mathematics Program (see [11]).

The problem of teaching fractions to culturally deprived children has lead to one of the most outstanding works in the field of mathematics education during the last 20 years. A team at the University of Illinois Committee on School Mathematics (UICSM) under the leadership of Peter Braunfeld has designed a strict operator approach to fractions via *stretching and shrinking machines*. The underlying domain is that of lengths represented by sticks. The application to other domains of quantities is handled by observing the fact, that all these domains are isomorphic to the domain of length, as is used in bar-diagrams etc. The whole conception is made extremely attractive for the learner by a comic-strip type of presentation, which puts the stretching and shrinking machines into the environment of the world of factories and jobs (see [1], [2], [3]). A streamlined version of this approach has been written for Book O ("Intuitive Background") of the CSMP series *Elements of Mathematics*. Here the m-stretchers are denoted by "m", the n-shrinkers by "$\bar{n}$", the hook-ups of these by "$\overset{m}{\underset{n}{=}}$". By feeding the unit length on the number line into all $\overset{m}{\underset{n}{=}}$, one gets the well known representation of all $\overset{m}{\underset{n}{=}}$ by points on the number line, denoted by "$\frac{m}{n}$". The operations on the points are taken over from the operations with the $\overset{m}{\underset{n}{=}}$. The "$\overset{m}{\underset{n}{=}}$" notation is very helpful where a clear distinction between the two aspects of the rational numbers has to be made. Let a be a quantity, then "$\frac{m}{n}$ of a" can be replaced by $\overset{m}{\underset{n}{=}}\ a$. In particular *percentage* can be defined correctly according to

$$p\% \quad \text{of} \quad a = \overset{p}{\underset{100}{=}}(a) \quad \text{for all} \quad p \in \mathbf{N}$$

and

$$\frac{n}{m}\% \quad \text{of} \quad a = \left[\overset{m}{\underset{n}{=}} \circ \overset{1}{\underset{100}{=}}\right](a) = \overset{m}{\underset{n \cdot 100}{=}}(a).$$

An analysis of commercial arithmetic and *proportionalities* as mappings from one domain of quantities into another has been given by A. Kirsch, especially with respect to what in German schools is called "Dreisatz" or "regel de tri" (see [8]). He has critizised the dominance of the unnecessary identification of domains of quantities with $(\mathbf{Q}^+, +, <)$. He also has suggested the name "anti-proportionality" rather than "inverse proportionality" or "indirect proportionality" etc., which are very often used in text-books. In fact, since the inverse of a proportionality is again a proportionality, the denotation "inverse proportionality" is mathematically misleading, whereas the pre-fix "anti" fits well the modern terminology in order- and lattice-theory.

Much of the complex mentioned above is left open for further development and experimentation. This is especially true for the use of systems of quantities in school mathematics. On the basis of a precise mathematical understanding, I am sure, it will be possible to find adequate ways of teaching it.

Karlsruhe

REFERENCES

[1] Braunfeld, P. and Wolfe, M., 'Fractions for low achievers', *The Arithmetic Teacher*, Dec. 1966, 647–655.

[2] Braunfeld, P., Diley, C., and Rucker, W., 'A new UICSM approach to fractions for the junior high school', *The Mathematics Teacher*, March 1967, 215–221.

[3] *Stretchers and Shrinkers*, 4 vols., Harper & Row, New York, 1969.
[4] Dienes, Z. P., *Fractions*, Paris 1967.
[5] Griesel, H., 'Eine Analyse und Neubegründung der Bruchrechnung', *Math.-physik. Semesterberichte* **15** (1968), 48–68.
[6] Griesel, H., 'Logarithmieren und Potenzieren von Grössen mit einer Grundlegung der Theorie der Grössensysteme', *Der Physikunterricht* 1968/3, 47ff.
[7] Griesel, H., 'Algebra und Analysis der Größensysteme', *Math.-phys. Semesterberichte* **16** (1969), 56–93.
[8] Kirsch, A., 'Eine Analyse der sog. Schlußrechnung', *Math.-phys. Semesterberichte* **16** (1969), 41–55.
'An Analysis of commercial arithmetic', *Educational Studies in Mathematics* **1** (1968–69), 300–311.
[9] Kirsch, A., 'Die Einführung der natürlichen Zahlen als Operatoren'. To be published in the report: *Beiträge zum Mathematikunterricht* 1969. Schroedel, Hannover; as well as in *Math.-phys. Semesterberichte*.
[10] Pickert, G., 'Die Bruchrechnung als Operieren mit Abbildungen', *Math.-phys. Semesterberichte* **15** (1968), 32–47.
[11] Steiner, H. G., 'Geometry in school programmes', in Cairo Seminar 1969. UNESCO Paris '69.
[12] Whitney, H., 'The mathematics of physical quantities. Part I: Mathematical models for measurement. Part II: Quantity structures and dimensional analysis', *Amer. Math. Monthly* **75** (1968), 115–138, 227–256.

H. O. POLLAK

HOW CAN WE TEACH APPLICATIONS OF MATHEMATICS?

I. INTRODUCTION

The purpose of this presentation is to discuss something of the relationship between applications of mathematics and the teaching of mathematics. While we shall not attempt a precise definition of applications of mathematics, it is clear that the phrase connotes a connection of mathematics with something else. More than that, there is the implication that this is a useful connection, that something of 'practical' value might be expected to come of it.

Now how does the student become involved in applications of mathematics? Throughout most of his education, mainly through problems in his textbooks, problems that have come to be known as 'word' problems. We therefore wish to analyze such problems – to see what is right and what is wrong with the problems we use.

II. IMMEDIATE USE OF MATHEMATICS IN EVERYDAY LIFE

We begin with the most obvious, and least controversial, applications of mathematics, namely, immediate uses in everyday living. It is important to realize that not just arithmetic but also algebra, geometry, probability, statistics and in fact most of elementary and secondary mathematics, are likely to come up. Such everyday applications may be either exact or approximate in character. When we check the computation of the sales tax, when we try to figure out how much paint it will take for the living room, when we refigure a recipe for a different number of people, when we try to build or to move a bookcase, or buy a rug of the right size, or win a little money at poker, or plant tomatoes, we are forever using mathematics in everyday life. Problems of this kind quite naturally will also appear in our textbooks. Here are some examples of perfectly sensible everyday problems taken from random texts that happen to be in my office.[1]

Mr. Twiggs changed the price of potatoes in his store from $4\frac{1}{2}$ c a pound to 3 pounds for 14 c.
(a) Did he raise or lower the price?
(b) How much was the increase or decrease per pound?

A large sandbox with a base 10 ft. long and 9 ft. wide is built in a park. A dump truck carrying five cubic yards of sand is emptied into the box. If the sand is leveled off, what is its depth? Give the answer both in feet and in inches.

A boy has 24 ft. of wire fence to make a rectangular pen for his pet rabbit. He plans to use all the fence in making the pen. Could he make a pen 12 ft. long and 12 ft. wide? Why or why not? Could he make a pen 8 ft. long and 3 ft. wide? How about 8 ft. long and 4 ft. wide? Give five examples of lengths and widths he could use for his pen.

In all the discussions about applied mathematics no one has ever questioned the value of such problems. They are realistic and perfectly reasonable. We only wish that there were more, and a much greater variety of them.

III. PROBLEMS THAT USE WORDS FROM EVERYDAY LIFE AND PRETEND, IN VARYING DEGREES TO BE APPLICATIONS

The next class of problems in our textbooks, perhaps the most abundant of all, are those that use words from everyday life outside of mathematics to make the problem sound good. The key feature of all these problems is that a certain amount of translation from English to mathematics is required before you start, and the point presumably is to practice such translation along with practicing the subsequent mathematical technique. The statement of such problems rarely questions the honesty and genuineness of the connection to the real world, but the connection is often false in one or more ways. Some examples:

An electric fan is advertised as moving 3375 cubic feet of air per minute. How long will it take the fan to change the air in a room 27 ft. by 25 ft. by 10 ft.?

The trouble with this is that it pretends that all the old air in a room is removed before any new air comes in. Air simply does not behave in this way. There is, in fact, considerable intermixing and dilution of the old air by the new. Have you ever noticed how long it takes even a powerful fan to get the smell of a burnt pot of beans out of the kitchen? The answer to the problem is at best a lower bound.

The next examples are taken from Dr. J. M. Hammersley, *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*, October 1968. They are examination questions.

Question A16. The mean survival period of daisies after being sprayed with a certain make of weed killer is 24 days. If the probability of survival after 27 days is $\frac{1}{4}$, estimate the standard deviation of the survival period.

Professor Hammersley comments on this as follows:

Now, is the candidate expected to apply some cookbook method which assumes that survival times are normally distributed; or is he to try to make his mathematical model realistic? If the latter, then he will have to remember that the distribution is a mixture of two components – the lifetimes of daisies which escape all effects of the spray and of those which do not – and neither of these two distributions are likely to be normal; and he is up against some pretty awkward mathematics. The question hardly suggests that the examiner has extensive experience of constructing mathematical models.

Professor Hammersley's next example and associated comments, are the following:

In the S.M.P. Ordinary Level paper we have some multiple choice questions, and the candidate has to encircle the letter or letters corresponding to any correct answer. Question 16 runs as follows:

"Passengers are allowed 40 lb. of luggage free of charge; any amount in excess of 40 lb. is charged at 3d. per lb." If W lb. is the weight of the luggage (W is an integer) and C shillings is the cost, the regulation quoted above is equivalent to

(a) $C = 3(W + 40)$; (b) $C = \frac{1}{4}(W - 40)$;
(c) $C = 40 + 3W$; (d) $C = \frac{1}{4}W - 40$.

Since all four choices are false, how does the examiner distinguish between a candidate who answers the question correctly and one who does not attempt it at all? The notable point about this question is that there is no need to scrutinize the individual coefficients in these formulae; all the formulae are linear, and therefore obviously false since the situation is non-linear.

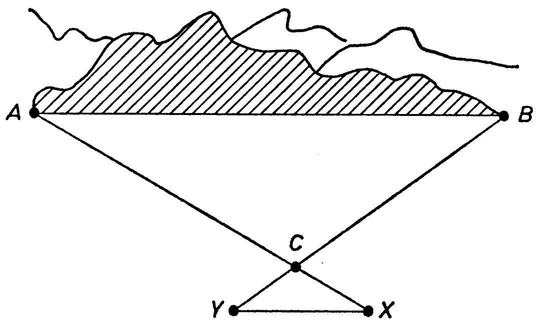
The same spirit of objection applies to all the pipes of various diameters that empty and fill tanks and swimming pools, to railroad schedules, accurate to the nearest second, for constant-velocity infinite-acceleration trains, to all the factories with linear production costs and known customer response to price, and many other stereotypes. Some of these problems perhaps contain a kernel of truth, and provide answers of some qualitative validity. If an attempt were made to discuss their relation to reality, and to be honest with the student generally, they might be acceptable. However, one of the first points about which to be honest with the student is the precision of the data. Rough and approximate calculation is not only excellent mathematical practice, but may, in fact, be the only justifiable response to the approximations made in obtaining the mathematical model of reality which the problem represents.

IV. PROBLEMS THAT USE WORDS FROM OTHER DISCIPLINES

The second main group of applications of mathematics, besides those to everyday life, are those to scientific or engineering disciplines, and, perhaps less commonly, to other scholarly fields. The same troubles that beset applications to everyday life recur in these other situations.

'Word' problems that pretend to come from other scholarly or engineering disciplines tend, once again, to be exercises in translation and in the subsequent mathematical techniques, and the reality of the application is often neglected.

To find out how far to tunnel through a hill, a surveyor lays out $AX = 100$ yards, $BY = 80$ yards, $CX = 20$ yards, and $CY = 16$ yards. He finds, by measurement, that $YX = 30$ yards. How long is the tunnel, AB?



The assumption that A, B, C, X and Y are all in a plane should perhaps be stated; the problem requires it, but it is probably reasonable. The only difficulty is that if the land on the near side of the hill is flat, no one would dream of building a tunnel!

A more suspect example is the following alleged application of combinatorial reasoning to linguistics:

It is a rule in Gaelic that no consonant or group of consonants can stand immediately between a strong and a weak vowel; the strong vowels being a, o, u; and the weak vowels e and i. Show that the whole number of Gaelic words of $n+3$ letters each, which can be formed of n consonants and the vowels aeo is $(2(n+3)!)/(n+2)$ where no letter is repeated in the same word.

The context of Gaelic orthography here is really questionable; doesn't it matter whether the resulting word is pronounceable, and is there really an arbitrary number of consonants? How large is the Gaelic vocabulary of such words?

Another example, which was specifically intended to show the application of mathematics to science, is the following:

The specific weight of water (s) at a temperature $t°c$ is given by the equation:

$$s = 1 + at + bt^2 + ct^3 \quad (\text{for } 0° < t < 100°\text{C})$$

where $t =$ temperature in degrees centigrade, $a = 5.3 \times 10^{-5}$, $b = -6.53 \times 10^{-6}$, $c = = 1.4 \times 10^{-8}$.

At which temperature will the water have the maximum specific weight?

Solution: $(\mathrm{d}s)/(\mathrm{d}t) = a + 2bt + 3ct^2$. When $(\mathrm{d}s)/(\mathrm{d}t) = 0$, $t = 4.09\,°\text{C}$.

Since the second derivative, $(\mathrm{d}^2s)/(\mathrm{d}t^2) = 2b + 6ct$, is negative in the above-mentioned range ($0 < t < 100$ – all temperatures at which water is liquid – under pressure conditions) s is a maximum when $t = 4.09$.

Now it is perfectly possible that for future purposes, one might want a cubic approximation to the experimental curve plotting the specific weight of water against temperature. It would, of course, be much more exciting if we had some physical intuition leading us to the reasonableness of a cubic, and if a, b, and c, had an interesting interpretation. However, it is unlikely that the cubic approximation to the real data, or any other analytic fit, would be used to find the maximum specific weight – you would certainly refer to the original data for that. Eyeballing the experimental points will give a far better guess for the location of the extremum than fitting a cubic over a very big range and then differentiating it. Of all the purposes for which you *might* use a cubic approximation to the specific weight of water, locating the point near 4 °C of maximum density is perhaps the least likely.

It is probably not immediately relevant, but I should like to mention at this point a saying due to R. W. Hamming: "If the design of this airplane depends on the difference between the Riemann and the Lebesgue Integral, I don't want to fly it."

V. PROBLEMS OF WHIMSY

At the far end of typical textbook problems that are made to look like applications are problems which can best be described as pure whimsy. These will use words from daily existence or from other disciplines, but it will be quite clear to everyone that no real application is intended. In my experience, mathematicians love these kinds of problems better than any other kind. The function of such problems, and there are many of them in our textbooks, is not quite clear. Perhaps they serve to bring a tolerant smile from a weary student, or to distract him momentarily from an otherwise dreary lesson by diverting the imagination to some more pleasant scene. They provide comic relief in the Shakespearean sense, and probably do a lot of good – although not as applied mathematics. Here are some examples:

Two bees working together can gather nectar from 100 hollyhock blossoms in 30 minutes. Assuming that each bee works the standard eight-hour day, five days a week, how many blossoms do these bees gather nectar from in a summer season of fifteen weeks?

In working on a batch of 100 blossoms, one of the bees stops after 18 minutes (just to smell the flowers), and it takes the other bee 20 minutes to finish the batch. How long would it take the diligent bee to gather nectar from 100 blossoms if she worked all by herself?

Sometimes such problems can have considerable mathematical interest. For example, at his summer school for secondary school students in 1966, Professor Kolmogorov gave the following problem (I do not have his exact phrasing):

A bee and a lump of sugar are located at different points inside a triangle. The bee wishes to reach the lump of sugar, while traveling a minimum distance, under the requirement that it must touch all three sides of the triangle before coming to the sugar. What is the shortest path?

In this series of apiarian problems no actual relation to the real world is implied. The stories serve to introduce some simple algebra problems on the one hand, or a highly ingenious and educational geometry problem on the other.

VI. GENUINE APPLICATIONS IN REAL LIFE

The applications of mathematics that we have examined so far, whether genuine or false or whimsical, have all been simple specific problems whose solution required only the direct translation of the story into mathematical terms and the application of standard mathematical technique. Actual applications of mathematics, of course, are often not as simple as that. Rather than beginning from a specific problem, we will probably be given a messy fuzzy situation which we are trying to understand. It may often be more difficult to find the right problem to solve than to solve the problem after you have found it. For example, consider the simple question, 'What is the best way to get from here to the airport?' The difficulty begins with trying to understand what you mean by 'best'. If you have a rented car and are in no particular hurry, then probably you mean minimum distance. Under other conditions, you might well mean minimum expected time. Depending on the time of day you might be satisfied with a reasonably short drive, but require the minimum number of intersections at which you do not have the right of way. You may also wish to take into account the annoyance or the danger or the police patrol on any particular route. Have you ever been in the area before, and what is your probability of getting lost on a non-standard path?

If you are late because of bad weather, is the airplane also likely to be late? After talking to a number of people I personally have reached the conclusion that they mean, by the 'best' route to an airport, the route not with minimum expected time but with minimum variance in time. People are willing to put up with a longer average time if the spread is small.

Supermarkets are a wonderful source of real situations which are subject to useful mathematization, and I recommend that mathematicians frequently do the family shopping so that they may see these problems. When a product comes in several sizes, which is the cheapest? The immediate level of this question can be answered by simple arithmetic. There may, however, be other angles. If you buy too large an amount is it likely to become spoiled, stale or moldy before you finish it? If you get a free bath towel with one size, and a free dish towel with another, which is really cheaper? And the extra large roll of paper towels is no good to you if it is too fat to fit the kitchen rack.

An excellent exercise in applications of mathematics may be achieved by forming a group of students into a firm of junior consultants for an hour. Here is an example of how this might be used. In most supermarkets you typically find one check-out line labeled 'express lane', for n packages or less. When I experimented with this pedagogic technique, the students, in their experience, had found n to vary between 5 to 15. Obviously, if a number varies this much, people do not understand what it should be. The problem, therefore, is to find out how many packages you ought to allow in an express lane. The group of students had a wonderful time with this. First of all, what is the express line for? Obviously you want to make the most money for the stockholders, but how do you do that? Do you want to minimize the average waiting time? If so, do you mean average per package or average per customer? Do you want to minimize the expected maximum waiting time? Do you wish to minimize the probability that the wait exceeds 10 minutes, or any other number you care to choose? Next, if you have agreed on what you are trying to accomplish, how do you make a mathematical model? What is the relationship between check-out time and the number of packages? Is it good enough to assume a linear relation? Obviously, such a straight line would not go through the origin. However, if the number of packages is sufficiently large, a second sack will be needed. Perhaps a discontinuous, piece-wise linear function should be used! Is it sufficient to assume a deterministic model for check-out time, or is a probabilistic description necessary? How should the model differ between supermarkets that weigh produce at the check-out position and those that weight and price at the produce counter? Next, what do you say about the arrival behavior of the customers? How far apart are they likely to be? There are, of course, many other questions that might come up. These will be hotly debatted by the students. The hour will go very fast.

There are innumerable situations in everyday life that can lead to similar mathematical questions. Can you build a perfect cubical box out of six identical pieces of lumber? What is the best strategy for raking leaves on a lawn? If you wash a pile of socks and hang them up on a line in the basement, what are the chances of finding a pair adjacent to each other? What is the best distance for spacing cars in a tunnel? Given the pattern of the traffic lights in New York City, what is the quickest way to walk between two locations? It is quite clear that not every situation of this sort will be formulated successfully into a precise mathematical problem, not to mention one that the students can already solve. Furthermore, you will not be sure at the beginning what kind of mathematics will result. Nevertheless, it is terribly important for students to have practice in seeing situations in which mathematics might be helpful, and in trying their hand at formulating useful problems. In fact, one of the most valuable lessons which comes from trying real applications of mathematics is that *finding* a problem that is 'right' for a particular fuzzy situation is itself a real mathematical achievement. This is important in the classroom not only because it is the honest truth, but also because it helps to de-emphasize the 'answer' as the sole goal of mathematics, and helps to shift emphasis toward mathematical structure and process.

In the couse of practicing mathematization from real life, students will, incidentally, discover that for some situations mathematics is quite irrelevant. This too is very valuable.

VII. GENUINE APPLICATIONS TO OTHER DISCIPLINES

Applications of mathematics to other scientific, scholarly, and engineering disciplines follow very much the same pattern. Once again, there are situations whose understanding needs to be improved. Once again, formulating the right mathematical problem is likely to be half the battle. It is important to realize that situations to be mathematized will arise from many different disciplines. Besides physics, which has long been recognized as a major field of application of mathematics, all branches of engineering, all the other physical sciences, as well as the social and biological sciences, are nowadays leading to interesting mathematics. For example, biologists make models of the prey-predator cycle and attempt to analyze the spread of epidemics, as well as continuing to develop the more familiar theory of mathematical genetics. Engineers apply topology to printed circuits, probability to random vibrations, and modern optimization techniques to production and inventory control, as well as using lots of differential equations.

Even lawyers sometimes get into serious mathematics. The following is an extract from Section 217, on the taxability of reimbursed moving expenses, of the current (1969) Internal Revenue Code:

(a) Deduction Allowed – There shall be allowed as a deduction moving expenses paid or incurred during the taxable year in connection with the commencement of work by the taxpayer as an employee at a new principal place of work....
(c) Conditions for Allowance – No deduction shall be allowed under this section unless – (1) the taxpayer's new principal place of work – (A) is at least 20 miles farther from his former residence than was his former principal place of work, or (B) if he had no former principal place of work, is at least 20 miles from his former residence.

Where are all former residences satisfying these conditions? How is the problem different between air miles and highway miles?

It is crucial that mathematics problems which claim to be applications of mathematics to other disciplines be *honest* applied mathematics. This means that the relationship between the mathematical model and the situation in the outside world that is being mathematized must be clearly understood. It is rather ridiculous to just say some words from another discipline, and then exhibit some equation which you claim is relevant. How did you find it? What approximations did you make in obtaining this equation? How will you tell whether the mathematical conclusions are meaningful in the original real-world situation?

Here is an example in which the process of creating the mathematical model for the physical situation is perhaps insufficiently explored:

The reaction of the body to a dose of a drug can be represented by the following function:

$$R(D) = D^2\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right),$$

where $C =$ a positive constant, $R =$ the strength of the reaction (for example – if R is the change in blood pressure, it is measured in mm mercury, if R is the change in temperature, it is measured in degrees, and so on), $D =$ the amount of the drug.

We will assume that whenever the drug is administered, the concentration of the drug already in the body is insignificant; for if there is already a certain concentration of the drug in the body, the reaction will depend upon this initial concentration (Weber-Fechner Law).

D is defined in the range of 0 to C. (In other words, C is the maximum amount that may be given.)

Find the range of dose for which the medicine has maximum sensitivity, in other words, where there is the greatest change in R for a small change in D, or equivalently where $R'(D)$ is at a maximum.

The equation in this problem is certainly suspect, if only because unfamiliar. What led you to believe that this relation is true? How does the functional form arise from first principles? What exactly do you measure, and why? How can the units possibly work out right? What kinds of useful understanding can be derived from such a model? A lot needs to be said to make this example into good applied mathematics.

Even applications of mathematics in classical physics frequently suffer from being badly presented as applied mathematics. It is an unfortunate fact that in much of our physics teaching the relation between the phenomena that we are trying to understand and the corresponding approximate mathematization has been lost in the shuffle. People tend to start a derivation in physics by writing down the mathematical equation and going on from there. The student is typically not given the opportunity to participate in making the abstraction from the physical reality to the mathematical model. Why not? It is of course possible to argue that the particular mathematization has been familiar for many years, that it is well known that it works very well and that it is a waste of time to rederive it. Similarly, it is sometimes argued that it is a waste of time to worry about existence and uniqueness for solutions of the resulting differential equations since this is after all obvious physically. The trouble with these arguments is that they are not good physics but just bad applied mathematics. The student has as much right to participate in the derivation of the mathematical model and in checking the degree of its validity as he has to repeat any experiment in order to satisfy himself of *its* validity.

Take for example, the old and familiar example of the motion of a pendulum. We assume frictionless suspension, weightless inextensible string, no air resistance, and point concentration of mass. Perhaps we should make an attempt to estimate the influence of these approximations, but at least we have mentioned them to the student, and appealed to his personal experience to make the neglect of these factors appear plausible. Part of the way through the derivation, however, we make the further approximate assumption that we may replace $\sin\theta$ by θ because 'θ is small'. The student has no 'physical feeling' for this approximation, and we owe him an opportunity to see how much of a mistake we make in the period – especially since it can easily be done within the student's knowledge of analysis at this stage. If we define T_1 as the period obtained with the replacement of $\sin\theta$ by θ, and T_2 as the period without this approximation, then, if α is the maximum angle,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{l/g} = 4\sqrt{l/g}\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}}$$

$$T_2 = 4\sqrt{l/g}\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{2\cos\theta - 2\cos\alpha}}.$$

On the next page, we shall show that

$$(\alpha^2-\theta^2)\frac{\sin\alpha}{\alpha} \leqslant 2\cos\theta - 2\cos\alpha \leqslant (\alpha^2-\theta^2)\left(1-\tfrac{1}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right),$$

so that *both* upper and lower bounds on the error are easy.

Therefore

$$\frac{1-\cos\alpha}{12} \leqslant \frac{T_2-T_1}{T_1} \leqslant \left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right)^{1/2} - 1.$$

In particular, for example, if $\alpha = 6°$

$$0.00045 \leqslant \frac{T_2-T_1}{T_1} \leqslant 0.0009.$$

A grandfather's clock 5 feet long, with a maximum swing of 6 inches of the tip, is to be designed. Is the approximate period T_1 good enough? The above formulas show that the error is *between* 0.6 and 1.2 min in a day, which is *not* good enough. A more precise formula is used for designing clocks.

The above inequalities are both proved from the fact that $(\sin x)/x$ has a local maximum at $x=0$.

$$\frac{\sin x}{x} \geqslant \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \ |x| \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\theta}^{\alpha} \sin x \, dx \geqslant \frac{\sin \alpha}{\alpha} \int_{\theta}^{\alpha} x \, dx$$

$$2(\cos\theta - \cos\alpha) \geqslant \frac{\sin\alpha}{\alpha}(\alpha^2 - \theta^2) \tag{1}$$

$$\frac{\sin y}{y} \geqslant \frac{\sin \alpha/2}{\alpha/2}, \quad |y| \leqslant \frac{\alpha}{2}.$$

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \geqslant 2\frac{x^2}{\alpha^2}\sin^2\alpha/2, \quad |x| \leqslant \alpha. \tag{2}$$

Integrate from 0 to x:

$$2\sin x \leqslant 2x - \frac{4x^3}{3}\frac{\sin^2\alpha/2}{\alpha^2}.$$

Integrate from θ to α:

$$\begin{aligned} 2\cos\theta - 2\cos\alpha &\leqslant (\alpha^2 - \theta^2)\left(1 - \frac{\sin^2\alpha/2}{3\alpha^2}(\alpha^2 + \theta^2)\right) \\ &\leqslant (\alpha^2 - \theta^2)\left(1 - \frac{\sin^2\alpha/2}{3}\right). \end{aligned}$$

VIII. CONCLUSION

We have made an attempt to classify problems that are intended to give the student the feeling that he is applying mathematics, and we have seen some of the difficulties in making these problems realistic. Much work remains to be done to make real applications of mathematics an integral part of the classroom experience. It is important to realize however, that formulating the 'right' problem in a situation outside of mathematics is creative activity much like discovering mathematics itself. Thus our continuing efforts to bring the discovery method to the classroom naturally go hand-in-hand with attempts to bring genuine applications to the classroom. The two efforts reinforce each other, and both are essential for a complete and honest presentation of mathematics in our schools.

Bell Telephone Laboratories, Inc.
Murray Hill, N.J.

REFERENCE

[1] References are, in most cases, simply not available, because they were chosen essentially at random; the books, in turn, were sent to me by publishers who were kind enough to overlook my lack of a regular teaching appointment. My apologies in advance to any authors, editors, and publishers whose favorite problems may be treated a bit unkindly in the sequel.

PAUL C. ROSENBLOOM

VECTORS AND SYMMETRY

I. INTRODUCTION

At several international conferences during the past 10 years (see e.g. [5], [6]) the introduction of vectors into school mathematics has been advocated, and it has been suggested that school geometry be taught from the vector point of view.

This proposal is attractive and natural from several points of view. The simplest postulate system for Euclidean space is probably its characterization as a linear vector space with a scalar product. This postulate system is easier to remember and apply than the usual alternatives. It lends itself to a natural integration with algebra. It has the advantage over the proposal of coordinate geometry that one works directly with geometric invariants. Yet the transition to and from a coordinate description is simple and natural, and can be used whenever appropriate.

During the last (several) years a number of expositions of vectors in school mathematics have appeared, notably by Diénès [2] and Minnemast [3] at the elementary level, Papy [7] at the junior high school level, and Beberman and Vaughn [1] at the senior high school level. A number of authors have also written introductions to vector geometry for teachers.

We find many of these expositions unsatisfactory. Often the authors give no natural and non-trivial problems which lead the student to feel a need for vector concepts. A number of these presentations seem overly abstract. Some approaches overemphasize the affine aspects, which lend themselves to a heavily algebraic treatment and neglect metric geometry. There is often a neglect of geometric intuition.

A practical difficulty in developing a systematic treatment of geometry from a vector viewpoint is the necessity for an extensive intuitive introduction to build up vector language and notation before one begins the formal development. In an ideal school system the proper place for this would be at the elementary and junior high school levels, at which intuitive geometry is already a rather standard part of the curriculum. If one has enough control over the preparation of the students to insure that they have had these preliminaries, then a formal treatment of geometry from a vector viewpoint is feasible at the high school level. If this background cannot be assumed, then there will be time problems in providing it at the high school level, in addition to covering the content of high school geometry adequately.

When vector geometry is introduced in schools in an experimental program, there may be difficulty in assuring the continuity of the participation of the students from one year to the next. Otherwise one will not be able to build on the intuitive preparation provided in the earlier years. Of course, in most countries there will be a serious problem in teacher education.

II. SYMMETRY OF ORNAMENTS

As a disciple of Pólya and Szegö, I believe that a concept should be introduced by means of a leading problem. The student should be confronted by a problem, important to him, whose solution requires the development of the concept. The problem should be chosen so as to be rich in interrelations with significant ideas.

A natural problem which suggests itself in connection with vectors is that of the symmetry of ornaments. Ideally I would wish to begin with observation of crystals and of larger scale models of crystals. After raising the general question of what are the possible repeating patterns in space, I would propose that we study the simpler analogous problem in the plane first. We would have an informal discussion of such things as wall paper, linoleum patterns, tapestries, and the like.

Then I would hand out to the students a set of designs and ask them to compare and classify these patterns. The set should include both some designs with like symmetries and some with different symmetries, such as illustrated here. After some discussion of the reasons for calling some designs similar and others different, I would pass out transparencies with the same designs. Now the students can investigate more easily the motions which leave a given design unchanged.*

The first general problem is the classification of patterns by their symmetries. We have then the problem of recognizing the symmetries in a given pattern.

Next we have the problem of constructing a pattern, given a sufficiently large part of it. From this we may proceed to the construction of a pattern with a given symmetry, given a rather small part. For example, if you want to make a pattern with the indicated axes of symmetry, it is sufficient to give the design in the rectangle *R*. Then the design is completely determined.

After some experimentation we see that underlying each of these designs is a lattice of parallelograms. The design is left unchanged by two non-collinear motions, and the whole design can be obtained from the part in one

* The author showed five designs with different kind of symmetries.

of the parallelograms. There may, of course, be other symmetries as well.

In any case, the construction of designs is made easier if the students are now provided with paper ruled off in parallelogram lattices. Angles of 40°, 60°, and 90° (both square and rectangular) should provide adequate variety.

The sides of a fundamental parallelogram correspond to certain simple motions, called *translations*, which leave the design unchanged. A translation moves everything the same distance in the same direction. The device of Zadou-Naissky might be very useful for performing translations concretely.

In all of our designs there are two translations in different directions which leave the pattern unchanged. Of course, if we then perform these in succession, or repeat one of them several times, we shall still leave the design unchanged.

We are thus led to the concept of the addition of vectors, and the inverse of a translation. We find that all translations which leave a given pattern unchanged are combinations of the two basic ones. Algebraically they can be described in the form

$$m\boldsymbol{\alpha} + n\boldsymbol{\beta},$$

where $\boldsymbol{\alpha}$ and $\boldsymbol{\beta}$ are the basic translations of the lattice and m and n are integers (positive, negative, or zero). Any lattice point can be obtained from a fixed one (which we may take as the origin) by a unique one of these translations. We may describe its location by the pair of integers (m, n).

From here we may proceed to the general concept of multiplication of a vector by a number, and the coordinate description of an arbitrary point in the plane.

Multiplication of a vector by a scalar is an example of a similarity transformation. It is fruitful to have some discussion of the effect of this transformation on lengths, ratios of lengths, angles, and areas.

A special example of a design left invariant by two perpendicular translations is considered. Its underlying lattice is the square lattice. If the two designs are superimposed on each other in any way, keeping the directions of the lattice vectors unchanged, we obtain a decomposition of the square C into pieces which can be rearranged to form squares A and B. If we cue this decomposition by the way we color congruent pieces, then we have a simple jig-saw puzzle for proving the Pythagorean theorem.

(There are many proofs of the Pythagorean theorem (see Pólya [8]) which are intuitive and natural, once one has guessed the truth of the theorem. The pedagogical problem is how would we guess that the key to the relation between the sides of a right triangle is the comparison of the areas of the squares on these sides. We feel that the examination of the above design and its symmetries is the most natural path to the Pythagorean theorem.)

Then we go on to study reflection with respect to a line. This leads naturally to the introduction of the scalar product. The linearity of the reflection (or of the projection) operation yields the distributive law for the scalar product.

Reflections with respect to different lines, or composition of reflections with translations, provide instructive examples of non-commutative operations and form an interesting algebra.

The study of reflections leads to the discovery of the basic properties of right angles and orthogonality.

The composition of reflections with respect to intersecting lines leads to the study of rotations. It is useful to begin with the study of rotations through a right angle, corresponding to multiplication by the complex number i.

In the study of a general rotation we would emphasize the linearity of the operation, and the way the linear operation is determined by effect on the two base vectors. The description of an arbitrary rotation in terms of multiplication by $a+bi$ is connected naturally with the ideas of composition and addition of linear transformations.

Of course, especially with younger pupils, there would be a great deal of vector arithmetic, carrying out specific operations on specific vectors. This would be done both by computation and construction. The exercises can be chosen so as to lead to exciting discoveries.

For example, the fact that the composition of two translations (the sum of two vectors) is again a translation, emerges from the problem of starting at any point P, and executing first the given translation $\boldsymbol{\alpha}$, followed by the translation $\boldsymbol{\beta}$. The students then compare the results for different starting points P.

Another example arises in the study of coordinate systems on a line. We lay off vectors $\boldsymbol{\alpha}$ and $\boldsymbol{\beta}$ from the same origin. We obtain a pretty pattern if we draw the line joining the points $x\boldsymbol{\alpha}$, $x\boldsymbol{\beta}$ for an arbitrary number x. Now we draw the lines joining any point $x\boldsymbol{\alpha}$ to the point $2x\boldsymbol{\beta}$, and the latter point to the point $3(2x\boldsymbol{\alpha})$, and the lines joining $x\boldsymbol{\beta}$ to $3x\boldsymbol{\alpha}$, and the latter to $2(3x\boldsymbol{\beta})$. The pattern formed by this configuration gives a geometrical meaning (Pascal's theorem) to the commutative property $3\cdot 2=2\cdot 3$.

If $\boldsymbol{\alpha}$ and $\boldsymbol{\beta}$ are perpendicular, then the Pythagorean theorem gives us a formula for the length $\|\boldsymbol{\gamma}\|$ of any linear combination $\boldsymbol{\gamma}=x\boldsymbol{\alpha}+y\boldsymbol{\beta}$:

$$\|x\boldsymbol{\alpha} + y\boldsymbol{\beta}\|^2 = x^2\, \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + y^2\, \|\boldsymbol{\beta}\|^2 .$$

This makes natural the investigation of the length of $\boldsymbol{\gamma}$ for any vectors $\boldsymbol{\alpha}$ and $\boldsymbol{\beta}$, and leads to a new interpretation of the scalar product $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$.

A simple type of design which can be usefully investigated both empirically and theoretically consists of placing a colored dot at each lattice point (alternatively, each parallelogram of the lattice may be colored solidly). Such a design requires no manual skill in drawing, whatsoever. Yet the investigation of what designs of this type have a given symmetry is rich in content.

For example, if $\boldsymbol{\alpha}$ and $\boldsymbol{\beta}$ are the basic vectors of the lattice, and I require that the design be left unchanged by the translations $2\boldsymbol{\alpha}+5\boldsymbol{\beta}$ and $5\boldsymbol{\alpha}+8\boldsymbol{\beta}$. I find that there are 9 lattice points which I may color in any way I wish, and then the design is completely determined. If I alter the required symmetries slightly, and require that the design be left unchanged by the translations $3\boldsymbol{\alpha}+5\boldsymbol{\beta}$ and $5\boldsymbol{\alpha}+8\boldsymbol{\beta}$, then I find that I have practically no freedom at all. What is the explanation? How can I predict such a phenomenon?

III. STRIP ORNAMENTS

Of course, the study of ornaments in a strip, such as the border design of a tapestry, being almost one-dimensional, is even simpler than the investigation of plane ornaments. Nevertheless, we do not advocate beginning with this problem, since we find that problems of intermediate difficulty are more stimulating to the pupils. But after we have initiated the study of symmetries, and have got as far as the addition of vectors, and the multiplication of vectors by numbers, then we may propose to study this simpler problem before we return to the original plane problem.

We thus arrive at the question: we wish to make a design which fills a parallel strip. The whole pattern can be obtained from the part contained in some rectangle by performing transformations which leave the strip, as a whole, unchanged. There is a part containing a rectangle which has no symmetries. It is sufficient to consider only the case where the strip cannot be divided into narrower strips all with the same pattern. What are the possibilities?

If we think of the strip as placed horizontally, then we find that there is a certain smallest translation to the right which leaves the pattern unchanged. If we choose the magnitude of this translation as our unit of length, then the translations

$$n\mathbf{R},$$

where n is a positive integer also leave the design unchanged. There are no other translations to the right which leave the design invariant. Of course, the unit translation to the left, and its multiples also leave the pattern unchanged .We can represent these in the above form with negative n. It is easy to make a design with no symmetry but these translations.

The arithmetic of these vectors, under addition and multiplication by an integer, is isomorphic to the arithmetic of the integers.

Another simple transformation of the strip into itself is the reflection A with respect to its axis (Figure 1).

If we draw an arbitrary design in the upper half H of a unit rectangle (Figure 2), apply the reflection A, and then all the translations $n\mathbf{R}$ $(n=0, \pm 1, +2, \text{etc.})$, we obtain a design which is left invariant by A as well as by all the translations under

$$n\mathbf{R}.$$

It is now an interesting problem to draw any design in H, perform A, then $\mathbf{R}$, and compare with the results of performing first $\mathbf{R}$, then A.

If, instead, we consider reflection with respect to a vertical axis, then we find a somewhat different story. Again it is sufficient to draw an arbitrary design in a half J of a unit rectangle, reflect it, and then perform all the

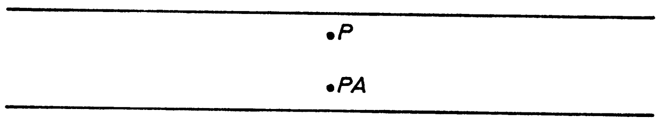


Fig. 1.

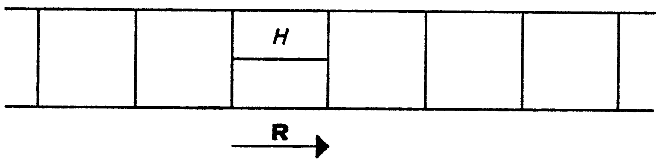


Fig. 2.

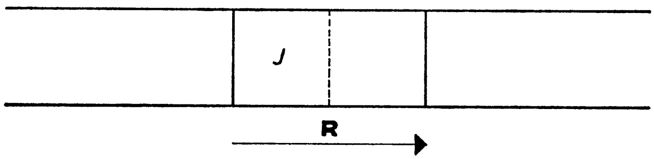


Fig. 3.

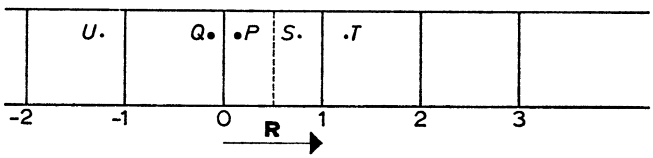


Fig. 4.

translations $n\mathbf{R}$ (see Figure 3). But something new happens when we perform the reflection and the translation $\mathbf{R}$ in different orders.

We feel the need of a notation to describe the situation. If we set up a coordinate system on the bottom line of the strip, then we may denote by C_n the reflection with respect to the vertical axis at n. Now we can start at a point P, and perform the operations indicated (see Figure 4):

$$P \xrightarrow{C_0} Q \xrightarrow{\mathbf{R}} S$$

and

$$P \xrightarrow{\mathbf{R}} T \xrightarrow{C_0} U$$

At first, we come to the negative result

$$S \neq U,$$

i.e.

$$C_0 \circ \mathbf{R} \neq \mathbf{R}_0 \circ C_0$$

(where the circle $\circ$ stands for 'composition':

$$P(C_0 \circ \mathbf{R}) = (PC_0)\,\mathbf{R} = Q\mathbf{R} = S, \text{ etc.}).$$

Further experiment leads to the discovery

$$U \xrightarrow{2\mathbf{R}} S,$$

i.e.

$$C_0 \circ \mathbf{R} = \mathbf{R} \circ C_0 \circ 2\mathbf{R}.$$

This now leads naturally to the investigation of the non-commutative arithmetic generated by the reflections C_m and the translations $n\mathbf{R}$.

The observation that any design with the symmetries C_0 and $\mathbf{R}$ also has the symmetry C_1 corresponds to the arithmetical result that

$$C_1 = (-R) \circ C_0 \circ R.$$

Since each of the transformations on the right leaves the design unchanged, then so does C_1.

But we also see that the design has the symmetry $C_{1/2}$, corresponding to the fact that

$$C_{1/2} = C_0 \circ \mathbf{R}.$$

Alternatively, we may impose the symmetries C_0 and C_1, and discover that the design must also have the symmetries $n\mathbf{R}$, where n is an arbitrary even integer, which corresponds to the fact that

$$2\mathbf{R} = C_0 \circ C_1.$$

By the study of such relations, the students can become accustomed to the algebraic description of geometrical phenomena.

We may proceed to the study of other strip symmetries, such as reflection with respect to a center of symmetry. To perform the reflection with respect to the center M on the point P, we join P to M and extend the segment until we reach the point Q at an equal distance from M on the other side. The strip is transformed into itself by reflection with respect to any center on its axis.

If we denote by p_n the reflection with respect to the center at the vertical line n on the axis, then we find an analogous arithmetic relating the symmetries p_m and $n\mathbf{R}$.

A final type of symmetry of the strip is the slide-reflection S_n, consisting of the translation

$n\mathbf{R}$ followed by the reflection A:

$$S_n = (n\mathbf{R}) \circ A .$$

The students may now try imposing any combination of these four types of symmetry on a design, and investigate what patterns are possible. They will find that some combinations yield new types of design, while others duplicate types already discovered. The techniques learned in formulating arithmetic and algebraic descriptions of geometrical relations are extremely useful preparation for further study of the plane symmetries. They also give a good general initiation into the algebra of linear transformations.

As we begin to accumulate arithmetic relations among the above four types of transformations, we begin to notice that some are consequences of others. For example, we may *compute*

$$C_2 \circ C_3$$

from the relations

$$C_2 = (-2\mathbf{R}) \circ C_0 \circ (2\mathbf{R}),$$
$$C_3 = (-3\mathbf{R}) \circ C_0 \circ (3\mathbf{R}),$$

and

$$(-\mathbf{R}) \circ C_0 = C_0 \circ \mathbf{R}$$
$$C_0 \circ C_0 = 0\mathbf{R} = I \text{ (the identity)}.$$

This means that we can *predict* a geometrical fact from several that we already know by means of algorithms. This is a very fruitful introduction to postulational thinking.

At a somewhat more mature level, the characterization of the above four types of transformation as the *only* one-to-one transformations of the strip onto itself, preserving distances is a very good initiation to postulational thinking, which is simple and more highly motivated than the usual beginning of the Euclidean geometry course.

We assume that

(1) T is a transformation of the strip onto itself;

(2) If $P \xrightarrow{T} Q$ and $U \xrightarrow{T} V$, then dist$(P, U)=$dist(Q,V).

The key is the lemma that a boundary point is transformed into a boundary point. And the crux of this argument is the question: how can we characterize a boundary point of the strip in terms of distances?

IV. CONCLUSION

I do not consider it necessary or desirable to present at the school level the complete proof that there are exactly seven types of symmetry for the strip, and 18 for the plane. It is sufficient to present a good sample of these symmetries to the students, and to pose as a challenge the problem of finding others.

Some parts of the general theorem are, however, appropriate and instructive at the school level. For example, during the study of rotational symmetries, we find that there are designs with rotational symmetries of 180°, 120°, 90°, and 60°, i.e. which admit rotations of period 2, 3, 4, or 6. It is a natural problem to ask whether any other rotational symmetries are possible in a plane design, for example one of 72° (period 5).

One case which is easy to settle is that in which there is a translation which leaves the pattern unchanged, and such that the magnitude of this translation is the minimum distance between two equivalent points of the pattern. We may, without loss of generality, state that this translation is **R**, the translation of one unit to the right. If the origin is also the center of symmetry with respect to a rotation of 72°, then if we perform two of these 72° rotations, then the translation **R**, we find that the origin is equivalent to a point inside the unit circle, contrary to our assumption.

Once our attention is focused on the minimum distance between equivalent points, it is trivial to eliminate rotations of less than 60°. It is then also easy to eliminate rotations without an integral period (by an application of Dirichlet's shoe-box principle). Thus the students can learn a great deal by the investigation of natural questions about the kinds of symmetry possible.

The approach outlined here presents algebra early in a geometrical context and makes algebra a natural tool for the analysis of geometrical problems. At the same time the subject abounds with pretty pictures which keep the students' attention fixed on the intuitive geometric content. Throughout the development, theory arises naturally out of the need to solve specific problems. At every stage, there are many opportunities for student activities at a wide range of difficulty.

As we mentioned earlier, some of the presentations of vector geometry which have been proposed are heavily algebraic and overly abstract. One sometimes sees expositions, for example of affine geometry, with many equations and hardly any pictures.

I think that such an approach misses much of the point of the introduction of vector geometry into the curriculum. Once the vectorial concepts are familiar to the student, a minor change in the dimensionality postulate (there are n linearly independent vectors, but not $n+1$) leads first to three- and then to n-dimensional space. The latter immediately gives a geometrical interpretation to the theory of simultaneous linear equations.

Already at the school level, the polynomials (say in one variable) give a natural example of a linear vector space of infinitely many dimensions. As soon as integration is introduced, we are ready to define a scalar product, and imitate the geometry we have studied before at an elementary level.

The advantage of the vectorial approach to geometry is that it makes possible the extension of our geometrical intuition from the familiar two- and three-dimensional cases to enable us to understand and interpret otherwise abstruse algebraic and analytic phenomena. (Consider, for example, the problem of finding the minimum of the integral

$$\int_0^1 f(x)^2 \, dx .$$

under the side conditions

$$\int_0^1 f(x) \, dx = 1, \quad \text{and} \quad \int_0^1 x f(x) \, dx = 0.)$$

These basic advantages of the vector approach to geometry cannot be realized unless the geometrical intuition is developed. Hence, we must insist on a presentation with plenty of pictures to stimulate intelligent guessing.

Teachers College, Columbia University

BIBLIOGRAPHY

[1] M. Beberman and H. Vaughn, *Vector Geometry*, University of Illinois Committee on School Mathematics, University of Illinois, Urbana, Ill., 1967.

[2] Z. P. Diénès, *Linear Algebra*, International Study Group for Mathematics Learning. Adelaide University, Adelaide, Australia, and Sherbrooke University, Sherbrooke, Quebec, Canada.

[3] Minnesota Mathematics and Science Teaching Project. University of Minnesota School Mathematics and Science Center, 1965.

[4] Organization for Economic Cooperation and Development. *New Thinking in School Mathematics*, OECD, Paris, 1961.
[5] Organization for Economic Cooperation and Development. *Synopses for Modern Secondary School Mathematics*, OECD, Paris, 1961.
[6] Organization for Economic Cooperation and Development. *Mathematics Today, A Guide for Teachers*, OECD, Paris, 1963.
[7] G. and F. Papy, *Mathématique Moderne*, Didier, Brussels and Paris, 1964.
[8] G. Polya, *How to Solve It*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1948.

RESOLUTIONS
OF THE FIRST INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION

This Congress draws attention to the following resolutions embodying matters of great importance to mathematical education:

(1) In all countries, the modernisation of the teaching of mathematics should be pursued as vigorously as possible, both in the content of syllabuses and in the manner of presentation. Content and method are inseparable, and should be kept continually under scrutiny.

(2) Mathematical ideas are inherent in many other disciplines (physics, biology, economics, sociology, etc.). Much mathematics arises from the construction of mathematical models of real situations, and the teaching of mathematics must recognise this. Collaboration between teachers of mathematics and those of other disciplines should therefore be encouraged.

(3) International cooperation should be further developed. Information on the teaching of mathematics can be exchanged at conferences, in publications, and by visiting lecturers. Each country should be more fully informed of activities in the other countries. In particular, the "advanced" countries should continue to collaborate with the developing countries, in the search for solutions appropriate to them.

(4) The rapid development of the content and methods of mathematical education makes it necessary for the teacher of mathematics to be given opportunities to pursue further professional study during his employment.

(5) The theory of mathematical education is becoming a science in its own right, with its own problems both of mathematical and pedagogical content. The new science should be given a place in the mathematical departments of Universities or Research Institutes, with appropriate academic qualifications available.

The First International Congress on Mathematical Education makes the following recommendations to I.C.M.I.:

(1) to study the problems of international information on mathematical education in the various countries, in particular that of the establishment of international information centres and that of the creation of an information bulletin;

(2) as regards the form of the next congress, to pay more attention to pre-school education, elementary education, mathematical education for the whole of the young people, and adult education.

RÉSOLUTIONS
DU PREMIER CONGRÈS INTERNATIONAL
DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Le Congrès attire l'attention sur les résolutions suivantes concernant des points très importants de l'enseignement des mathématiques:

(1) Dans tous les pays, le modernisation de l'enseignement des mathématiques doit être poursuivie aussi énergiquement que possible, tant en ce qui concerne le contenu des programmes que la manière de les présenter. Contenus et méthodes, qui sont inséparables, doivent faire l'objet d'une étude permanente.

(2) Les concepts mathématiques sont présents dans de nombreuses autres disciplines (sciences physiques, biologiques, économiques, humaines, ...). Mainte théorie mathématique est née de la construction de modèles mathématiques à partir de situations réelles, et l'enseignement des mathématiques doit en tenir compte. La collaboration des professeurs de mathématiques avec ceux des autres disciplines doit donc être encouragée.

(3) La coopération internationale doit être développée. L'information sur l'enseignement des mathématiques peut être diffusée par le moyen de conférences et de congrès, de publications, d'échanges de professeurs. Chaque pays devrait être plus complètement informé des efforts des autres pays. En particulier, les pays plus développés doivent continuer à collaborer avec les pays en voie de développement pour la recherche de solutions qui leur soient appropriées.

(4) L'évolution accélérée du contenu et des méthodes de l'enseignement mathématique impose que chaque enseignant de mathématiques soit en mesure de profiter d'une formation continue qui doit être intégrée dans son activité professionnelle normale.

(5) La pédagogie de la mathématique devient de plus en plus une science autonome avec ses problèmes propres de contenu mathématique et d'expérimentation. Cette science nouvelle doit trouver place dans les Départements de Mathématiques des Universités ou des Instituts de Recherche; ceux qui se qualifient dans cette discipline doivent pouvoir accéder à tous les grades universitaires.

Le Premier Congrès International de l'Enseignement Mathématique recommande à la C.I.E.M.:

(1) d'étudier les problèmes d'information internationale sur l'enseignement mathématique dans les divers pays, en particulier celui de la consti-

tution de centres internationaux d'information et celui de la création d'un bulletin d'information;

(2) en ce qui concerne la structure du prochain congrès, d'attribuer plus d'attention à l'enseignement préscolaire, à l'enseignement élémentaire, à l'enseignement mathématique pour la totalité de la jeunesse, à l'enseignement des adultes.