Les Repercussions de la Recherche Mathématique sur l'Enseignement

textes originaux des conférences
faites au seminaire organisé par la

C.I.E.M.

à

Echternach

(G.-D. de Luxembourg)

été 1965

publiés en collaboration
avec l'institut Grand-Ducal
Section des Sciences Naturelles,
Physiques et Mathématiques

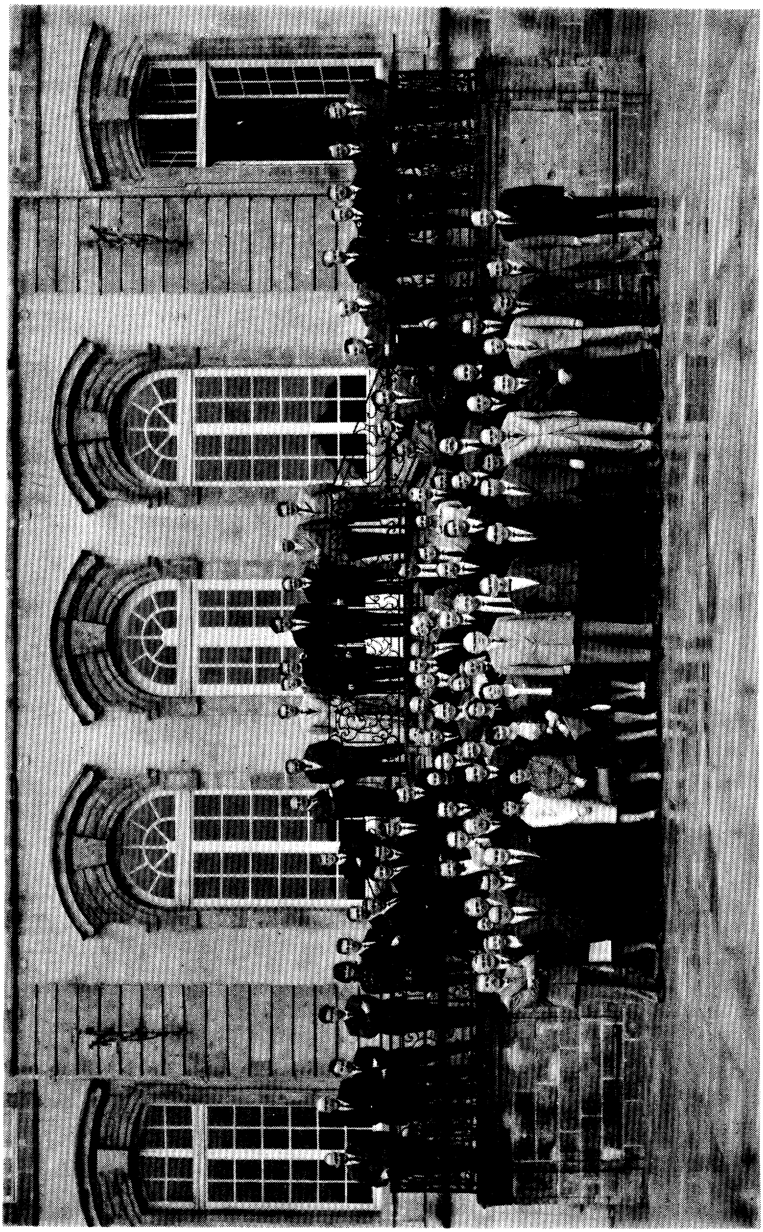
IMPRIMÉ EN OFFSET PAR OSSA, 4, BOULEVARD DE LA FOIRE, LUXEMBOURG

Au moment de publier ces textes, nous avons le triste devoir d'annoncer le décès de Monsieur le professeur Albert GLODEN.

Monsieur Gloden avait pris une part active à la préparation de ce séminaire, mais à son grand regret, son état de santé ne lui a pas permis d'y assister.

Saluons ici la mémoire de ce mathématicien averti et de ce travailleur infatigable.

Echternach, mars 1966. Pierre Foehr



Sommaire

LES REPERCUSSIONS DE LA RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT

par
H. Behnke
(Münster)

La liaison étroite entre Recherche et Enseignement est une vieille tradition dans les Universités européennes. En se trouvant devant la liberté de l'enseignement universitaire et le travail de recherche, le nouvel étudiant ressent dès son entrée en faculté l'atmosphère exaltante qui s'en dégage et qui est tellement différente de celle, autoritaire, du lycée. En même temps les étudiants constatent, avec regret, que leurs professeurs de faculté sont trop absorbés par leurs travaux de recherche pour s'occuper d'eux comme l'ont fait ceux du lycée. L'équilibre entre ces deux expressions de la science - enseignement et recherche - est continuellement remis en question. Chez Gauss la recherche prédominait à tel point que l'enseignement ne jouait qu'un rôle secondaire et souvent gênant pour lui. Il est vrai qu'il n'enseignait jamais les mathématiques pures, mais uniquement l'astronomie et la géodésie. Chez Weierstrass et Félix Klein, la recherche et l'enseignement s'équilibraient. Enfin les cours brillants de Herglotz furent des chefs-d'oeuvre en leur temps.

Aux différentes époques et dans les différents pays l'importance attachée à la recherche et à l'enseignement ont varié. De nos jours la recherche est généralement beaucoup plus estimée que l'enseignement. Des chaires de recherche ont été créées pour des professeurs déchargés de toute tâche d'enseignement, et ce sont ces chaires qui sont les plus enviées de l'université. Le congé qu'un professeur demande par intervalles pour son travail de recherche, devient de plus en plus chose courante. Il est très rare qu'un professeur de mathématiques fasse par exemple deux cours à quatre leçons hebdomadaires par semestre. Pourtant on ne travaille pas moins qu'autrefois, bien au contraire! La vie d'un professeur a pris un rythme affolant. On publie de plus en plus. En outre l'augmentation du nombre des mathématiciens dans les universités s'est répercutée à son tour sur le nombre et le volume des publications. Les trois grandes revues mondiales spécialisées dans le recensement des publications mathématiques en donnent la preuve: elles éclatent.

Pourtant cela ne signifie nullement que la recherche mathématique prolifère à la façon désordonnée du cancer. Si nous voulons examiner de près l'influence directe de la recherche sur l'enseignement universitaire et l'influence indirecte sur l'enseignement secondaire, il faut parler de la nature même de la recherche mathématique. Ce faisant je veux prendre position devant le livre de A.J. Wittenberg: "Bildung und Mathematik", qui atteint incontestablement des sommets et révèle des possibilités, mais à mesure que je me plonge dans ce livre il me paraît de plus en plus dangereux, voire destructeur pour notre vie mathématique. Je suis d'avis que Wittenberg méconnaît précisément la nature même de la recherche.

La recherche mathématique se situe entre les sciences expérimentales d'une part et les sciences humaines telles que philosophie, littérature etc. d'autre part. Un grand nombre de disciplines mathématiques sont issues de l'effort d'explication et de conquête de la nature, mais en tant que théories mathématiques elles ont une existence indépendante de la réalité concrète. Dans les sciences expérimentales se posent des questions - concrètes - qui réclament une solution indépendamment du point de vue - subjectif - du savant. A l'opposé de cela, toute recherche littéraire ou philosophique contient dans sa présentation l'empreinte subjective de chaque savant et le risque inévitable de présenter peu d'intérêt et de rester en marge du développement scientifique ou littéraire ultérieur. L'influence d'un travail mathématique sur le monde scientifique dépend souvent de la façon dont le savant traduit sa pensée. Un autre pourra écrire "la même chose" et passer totalement inaperçu. Il en va tout autrement dans les sciences expérimentales: ces qualificatifs ne s'y appliquent pas de la même façon. Si un exposé est exact et si les résultats contenus n'ont pas fait l'objet de travaux antérieurs, on pourra toujours leur attribuer la mention suivante "un jour on devait trouver cela" ou "nos connaissances s'en trouvent enrichies". Voilà en quoi les mathématiques se rapprochent des disciplines philosophiques et littéraires. Le risque qu'un travail mathématique original, conduisant même à des résultats nouveaux, soit sans aucune portée mathématique est inévitable. Tout mathématicien un peu en vue se voit dans l'obligation de se défendre contre ce genre de travaux ou de conférences où l'on ne peut relever aucune faute, qui apportent des résultats nouveaux et qui sont pourtant sans intérêt. La rédaction de toute revue consacrée aux recherches mathématiques doit se soucier du contenu du travail qu'on lui présente. Il ne suffit pas d'apporter des résultats nouveaux pour qu'un article soit accepté. Evidemment ces critères extra-mathématiques sont très difficiles à appliquer et donnent lieu à des discussions interminables et des divergences d'opinion insolubles. Ils doivent pourtant être appliqués dans l'intérêt de la réputation de la revue. Ces critères se résument dans les questions concernant la valeur d'un travail, la concision de l'exposé, la fécondité des réflexions, l'économie des moyens mis en oeuvre, l'opportunité des démonstrations. Ce sont là des critères voisins et pourtant distincts. Si leur énoncé parfois manque de précision, c'est leur emploi judicieux qui est le propre du mathématicien qualifié et lui permet de se retrouver dans l'énorme flot de résultats, certes possibles, mais souvent en dehors des courants actuels. Le mathématicien chargé de trier ces communications ne s'y sent pas trop à l'aise, parce qu'il lui est difficile de faire comprendre les principes de son choix au non-initié.

Tout cela est évident pour le mathématicien, mais je tiens à souligner que ces critères s'appliquent automatiquement et péremptoirement à la recherche mathématique. Dans son livre A.J. Wittenberg les cite comme étant le signe distinctif des mathématiques scolaires. En lisant ce livre on a l'impression que contrairement aux mathématiques scolaires idéales - qui sont pourtant un important domaine de la Mathématique - la recherche n'est qu'une plante folle poussant de façon désordonnée. Pourtant, il n'en est rien!

Les critères cités ci-dessus se réduisant à des appréciations du genre "sans intérêt" ou "du plus grand intérêt", contiennent donc des facteurs subjectifs variables au cours des temps; la recherche mathématique, plus que celle des autres sciences naturelles, dépend donc des préoccupations actuelles de ses adeptes. Certaines disciplines ont été considérées à un moment donné comme fondamentales et du plus haut intérêt. Elles ont pourtant été releguées ensuite à l'arrière-plan et même purement et simplement oubliées. C'est le cas des développements apportés à la géométrie élémentaire grecque et de l'analyse combinatoire, tels qu'on les étudiait vers 1800. De même la théorie géométrique des courbes algébriques, la géométrie descriptive et la théorie des fonctions elliptiques ont perdu le rôle prépondérant qu'elles avaient au cours du $19^{\text{ème}}$ siècle. Les résultats de ces disciplines, qu'on croirait oubliées, se retrouvent implicitement dans les théories actuelles beaucoup plus générales et abstraites, mais même le mathématicien qui ne se serait pas tenu au courant des idées nouvelles ne saurait les y retrouver.

De même des branches de la recherche qui sont actuellement en pleine croissance tomberont peut-être pour un temps ou à jamais dans l'oubli. Ceci n'arrive jamais par hasard ou comme résultat d'un caprice de la mode. Il y a toujours des raisons concrètes à un tel recul. Les mathématiciens sont beaucoup trop individualistes et ont trop peu de respect envers leurs prédécesseurs pour accepter a la longue le point de vue ou l'appréciation de quelqu'un d'autre sans les soumettre à une critique serrée. Tout est continuellement remis en question et réexaminé.

La jeunesse mathématique veut se ruer vers ses créations propres. Elle ne veut pas commencer par apprendre trop de choses pendant trop longtemps d'une façon purement passive. Un savoir trop encyclopédique de l'enseignant lui répugne. Seul le maître qui sait la confronter de bonne heure avec des problèmes intéressants non résolus, qui est capable de lui montrer des vues nouvelles et qui lui apporte des suggestions, peut attirer à lui cette génération montante férue d'indépendance. De ce point de vue, David Hilbert (1862-1943) reste inégalé. Aucun autre mathématicien - dans la mesure où je suis à même de juger l'histoire de ces derniers siècles - n'a pu se mesurer avec lui de ce côté. Il a tracé la voie des recherches à toute une génération de mathématiciens allemands et même étrangers. On se demande ce qu'il faut admirer le plus chez lui: ses créations personnelles exceptionnelles ou son efficacité d'enseignant, dont la manifestation la plus éclatante reste la conférence faite à l'Exposition Universelle de Paris en 1900, où le maître énuméra les fameux 23 problèmes, dont la solution serait d'un intérêt capital pour le progrès de la science.

Dans les rares ouvrages consacrés à la recherche mathématique elle-même, la notion de liberté du chercheur occupe une place importante. Hilbert et Poincaré ont particulièrement insisté sur ce point.

Cette liberté a un triple aspect:

1° elle existe du fait que les recherches ne sont pas subordonnées aux moyens matériels. On connaît des découvertes mathématiques faites dans des camps de prisonniers, des prisons ou des asiles d'aliénés.

2° On fait de la recherche pour la connaissance et non pour l'application des solutions à des problemes extra-mathématiques des sciences expérimentales ou de la technique. Ce point de vue a été défendu passionnément notamment par l'éminent mathématicien anglais H.H. Hardy au cours d'une conférence faite au cours de la première guerre mondiale. Il a dit, et on doit tenir compte des circonstances, que les mathématiques sont une science inutile, par rapport p.ex. à la défense militaire.

D'autres opinions s'opposent à cela. Je citerais en exemple l'oeuvre de toute la vie de Hermann Weyl, ce grand classique des mathématiques des dernières décennies. Les besoins constants de la physique en moyens mathématiques nouveaux lui ont donné des impulsions toujours renouvelées. Que celui qui veut ressentir le sentiment de satisfaction causé par la prise de conscience de l'harmonie entre mathématiques, physique et philosophie, lise les oeuvres de H. Weyl! L'idée que la liberté des mathématiques puisse être menacée par les exigences des sciences expérimentales, ne lui viendra jamais à l'esprit.

3° Il est vrai que le mathématicien est libre en créant ses notions, théorèmes et théories conformément aux lois de la logique. Néanmoins, cela peut mener à l'étroitesse de vues, au grotesque, voire à l'absurdité. Mais en fin de compte, les mathématiques se développent suivant des nécessités internes absolues. Il ne s'agit pas seulement de trouver des résultats nouveaux, mais il s'agit de faire comprendre au monde scientifique leur importance et la justification de la manière particulière dont ils sont présentés. D'une conférence qui ne respecterait pas ce critère élémentaire, il ne resterait que de la poussière de craie, d'un tel article rien que du papier gâché. La famille universelle des savants fait en peu de temps une sélection qui n'est soumise à aucune volonté humaine individuelle. Ce tri se fait uniquement suivant les besoins de la spécialité. Celui qui a suivi le développement de l'algèbre au cours du dernier demi-siècle, doit être fasciné, suivant les propres termes de H. Weyl par la façon dont se sont enchaînées, voire encastrées les démarches intellectuelles propres à chaque savant dans la marche inéluctable de toute la discipline vers le progrès. On ne s'en rend compte qu'après coup. Auparavant on avait remarqué tout au plus que les mêmes découvertes étaient souvent faites simultanément en des lieux différents. L'exemple le plus connu est la découverte du calcul infinitésimal par Leibnitz et Newton. Ainsi la liberté individuelle du chercheur n'est nullement synonyme d'arbitraire dans le développement de notre science.

Cela est très important pour les réflexions qui vont suivre, puisque nous tenons à connaître les liens entre les trois grands domaines de la vie mathématique: la recherche, l'enseignement universitaire et l'enseignement secondaire et à discuter la critique qui leur est faite. Seule la recherche ayant une signification objective, étant autre chose qu'un jeu entre chercheurs, justifie l'influence continue qu'elle exerce sur l'enseignement. Mais nul ne saurait contester qu'en dépit de quelques floraisons étranges et éphémères aux limites de l'immense domaine de la recherche, celle-ci se développe sainement et vigoureusement.

Des connaissances nouvelles mènent toujours a réexaminer et à repenser ce qu'on avait acquis antérieurement pour que les résultats anciens, éclairés par les découvertes nouvelles gagnent encore en clarté dans leur forme nouvelle. L'homme plus âgé, qui a tout appris autrement, se méfie facilement des notions nouvelles et des édifices nouveaux. Il a de la peine à saisir les notions nouvelles, à réviser ses connaissances et à réorienter sa pensée. Il serait déplorable que cela entraine implicitement des motifs de refus du nouveau. En tant que représentant de la vieille génération, je ne saurais donner raison à ceux qui accusent la jeunesse actuelle de courir après tout ce qui est nouveau, uniquement par goût du nouveau. Elle suit en réalité celui qui sait l'impressionner, la convaincre. Aucune catégorie de jeunes n'est aussi réfractaire à toute autorité que la jeunesse mathématique, en commençant par les étudiants des premières années jusqu'aux jeunes professeurs.

Dans le premier domaine mathématique, celui de la recherche proprement dite, les méthodes qui ne s'appuient pas sur les faits énoncés, ne sauraient avoir de conséquence concrète, qu'elles soient appliquées par la vieille génération ou par la jeune! Les caprices de l'individu sont compensés par l'action d'un nombre immense de gens qui se font indépendamment les uns des autres une idée du sujet en le traitant dans des cours, des séminaires de recherches et des examens. Le fait que les recherches mathématiques sont totalement accessibles à tous les intéressés n'a eu que des conséquences heureuses.

J'ai déjà indiqué dans quelle mesure prodigieuse la recherche mathématique et la littérature correspondante se développent. Cela mène nécessairement à une spécialisation, un phénomène qui a pris une allure inquiétante au cours des dernières décennies.

Il y a pourtant, comme H. Weyl le montre, une tendance unificatrice qui s'oppose à cette division en spécialités: c'est la méthode axiomatique qui est devenue le signe distinctif de la mathématique contemporaine. Autrefois, et cela est encore valable pour tout le 19ième siècle, on s'en est servi avant tout pour assurer les fondements de la géométrie et à la fin du siècle aussi pour les fondements de l'analyse.

Aujourd'hui elle est l'outil principal de la construction de toutes les disciplines. Cela a commencé par l'algèbre. Les notions de groupe, d'anneau et de corps en sont des exemples. Ce développement a gagné ensuite la théorie des espaces topologiques, la topologie combinatoire, les groupes continus, l'analyse fonctionnelle, les variétés complexes etc...

Ce qui fait la plus grande force des mathématiques contemporaines, ce sont les interactions entre les efforts de la méthode axiomatique et les efforts d'améliorer les démonstrations. Lorsqu'on peut restreindre le nombre des axiomes nécessaires pour la démonstration d'un théorème fondamental, celle-ci devient la plupart du temps plus claire. Une telle généralisation par la réduction du nombre des axiomes se présente toujours dans le cas où la démonstration la plus simple et la plus claire est fournie.

L'axiomatisation des mathématiques a eu une autre conséquence au cours des dernières décennies. La question est maintenant de savoir si les mathematiques dans leur totalité ne doivent pas être reconstruites. Les divisions traditionnelles en algèbre, géométrie et analyse, ne sont-elles pas complètement dépassées? Les mêmes systemes d'axiomes "interprétés un peu autrement" se retrouvent dans plusieurs disciplines. Il y a par exemple des groupes algébriques et des groupes géométriques que nul ne penserait a dissocier et a traiter séparément.

De même on ne sépare plus la divisibilité des nombres entiers d'un corps algébrique de la divisibilité des polynômes sur un corps. Il s'agit plutôt de deux réalisations de la même structure, et leur théorie est construite indépendamment de ses représentants. Les relations d'ordre et de divisibilité - des nombres réels - ont une structure identique. Les mathématiques se simplifient précisément davantage, lorsqu'on étudie ces relations sans se demander à quel objet elles s'appliquent. Cette théorie des relations n'a plus sa place dans l'algèbre ni dans l'analyse, mais forme une structure-mère à elle.

Il existe trois types de ces structures-mères: celle de l'algèbre, celle de la topologie (caractérisée par la notion de voisinage) et celle que je viens de mentionner. En combinant les différentes structures-mères on arrive a des systèmes d'axiomes plus vastes avec des conséquences plus étendues, et finalement on retrouve les fondements de la Mathématique classique: la géométrie euclidienne et les nombres réels. Comme on rassemble ainsi tant de sujets qui sont restés éparpillés jusqu'ici, toute la mathématique s'est condensée, et ses disciplines qui s'étaient éloignées de plus en plus les unes des autres au cours du dernier siècle ont été réassemblées.

La première grande tentative d'une telle oeuvre complète est une entreprise collective française. Aujourd'hui les "Eléments de Mathématique" de Bourbaki sont connus de tous les spécialistes. Il se peut que Bourbaki bouleverse de lui-même sa présentation ou que de nouvelles recherches apportent des améliorations importantes, mais cette tendance d'unifier à partir de l'axiomatisation et de l'abstraction restera, parce qu'elle rend plus efficaces et plus claires les conclusions mathématiques.

Regardons maintenant le deuxième domaine des mathématiques: l'enseignement universitaire. Aucune discussion ne semble nécessaire en ce qui concerne l'enseignement s'adressant à des étudiants qui ont déjà fait trois ans et plus d'études à l'université.

La question se pose tout à fait autrement pour les débutants. Récemment j'ai remis l'accent sur le fait qu'il est nécessaire par principe de tenir compte de considérations didactiques, lorsqu'on écrit des manuels ou lorsqu'on fait des cours à ces étudiants. Cette thèse est loin d'être incontestée et les universités allemandes ne s'y conforment pas en général. Un enseignement donné par des professeurs engagés dans la recherche et qui croient même devoir se légitimer par leurs recherches personnelles, est dans la nature même de l'Université. C'est pourquoi on trouve si naturel que l'esprit de leurs recherches se retrouve sans cesse dans leurs cours. Pour rester dans la tradition universitaire européenne, on se doit de respecter cet état de choses, tout en faisant une part plus large aux considérations didactiques. C'est urgent surtout en ce qui concerne la répartition des matières. La formation de base donnée par l'Université ne doit pas être spécialisée outre mesure. La spécialisation viendra toujours assez tôt!

Ces considérations didactiques sont indispensables pour traiter certains sujets, et dans beaucoup de pays on n'y pense pas suffisamment. Sans aucune formation pédagogique, des professeurs font leurs cours en raisonnant en mathématiciens expérimentés devant des étudiants débutants. En général, c'est trop abstrait et la motivation est insuffisante, si elle n'est pas tout simplement inexistante. Cela repousse bien des jeunes qui auraient pourtant pu être gagnés à une bonne formation mathématique, si le passage du Lycée à l'Université s'était fait d'une façon un peu moins abrupte. Chez beaucoup d'entre-eux cela gâche jusqu'à la compréhension même de la nature des mathématiques, si bien que celles-ci leur apparaissent comme un pur jeu de l'esprit et non comme un monde qui, tel qu'il est, se développe selon ses lois internes. Au cours des dernières années, ce problème a été traité en détail et j'ai pris une part active à ces avertissements.

Les restrictions précédentes, qui s'appliquent avant tout à l'enseignement universitaire, ne doivent pas nous faire oublier notre thèse principale, à savoir que les études doivent être dominées à tout moment par les méthodes actuelles. Donc les notions modernes telles que l'axiomatisation et l'abstraction doivent revenir constamment, ne fût-ce que pour concentrer et harmoniser les résultats particuliers. Si cette condition n'était pas remplie, il ne saurait être question d'un cycle complet d'études dans le sens traditionnel des universités européennes.

Evidemment on pourrait se demander s'il vaut vraiment mieux de faire faire à un futur professeur de lycée ses études à une faculté, ou s'il ne serait pas préférable de lui donner sa formation dans un institut pédagogique. Dans ce dernier cas, le troisième domaine des mathématiques serait irrémédiablement séparé des deux autres. Personnellement je déplorerais une telle séparation comme un désastre qui mettrait fin à une grande tradition. Mais celui qui approuve les idées fondamentales du livre de Wittenberg, se doit de se prononcer pour cette séparation et par voie de conséquence pour la formation des maîtres dans des instituts pédagogiques car - je cite - "Le spécialiste ne veut pas comprendre sa machine mathématique, il veut travailler avec elle" (p. 53). Plus loin nous lisons: "Il ne faut pas transformer en titre de noblesse la contrainte qui conduirait le spécialiste à restreindre artificiellement ses "rencontres" avec les mathématiques".

A mon avis il serait extrêmement dangereux de mêler la notion subjective de "rencontre" à la discussion de l'enseignement des mathématiques. Nous tomberions dans un subjectivisme difficilement contrôlable. Ainsi il pourrait arriver qu'un élève qui - selon les critères pédagogiques -

aurait eu une "rencontre" marquante avec les mathématiques, soit peu doué pour la pensée logique et la découverte, tandis qu'un autre élève viendrait à bout de la matière d'une façon absolument souveraine, sans qu'il ait eu cette fameuse "rencontre". Derrière ce dernier se cacherait un spécialiste dont la rencontre avec les mathématiques n'aurait été qu'artificielle et mutilée. Voilà ce qu'il faudrait conclure après avoir lu Wittenberg. Quelles étranges conclusions! Mais Wittenberg n'est pas seul. On constate souvent la même attitude chez les représentants de la pédagogie. De là vient, me semble-t-il, le plus grand danger pour le lycée, la disparition du principe du rendement pédagogique. La dégradation du lycée entrainerait celle de l'université européenne. Pour cette raison les professeurs de faculté se doivent de contribuer à la défense de ce troisième domaine de la vie mathématique.

Pour l'instant, une part importante de nos étudiants sont toujours des aspirants-professeurs. Il y a seulement dix ans, la grande majorité des étudiants des facultés allemandes se destinaient à l'enseignement. Ces temps sont déjà révolus. Soignons donc tout particulièrement la formation de ces futurs professeurs et gardons-nous bien d'envoyer toujours nos meilleurs éléments dans les administrations et dans les entreprises. Faisons comprendre à nos étudiants qu'un professeur a une influence intellectuelle beaucoup plus vaste et profonde qu'un licencié travaillant dans une administration ou dans l'industrie. Les meilleurs de nos élèves apportent de l'oxygène à l'atmosphère du lycée. Les plus actifs d'entre eux essayeront de repenser et de réformer les programmes. Seul le professeur qui sait exprimer ses idées à lui sera suivi par ses élèves. Pour cette raison, il est tout naturel que l'esprit qui a influencé les étudiants pénètre avec un certain retard dans les salles de classe. Cela arrivera toujours, malgré les obstacles disposés par une administration qui veut pour des raisons purement bureaucratiques que les programmes soient fixés une fois pour toutes, malgré l'obstacle causé par le simple fait que les classes changent de professeur, malgré le "droit" que croient avoir les redoublants d'être confrontés une nouvelle fois avec le programme de l'année précédente, malgré enfin les parents qui exigent que leurs enfants n'apprennent surtout rien d'autre que ce qu'ils ont appris eux-mêmes il y a quelques dizaines d'années.

Le but de cette conférence ne saurait être de faire des suggestions pour la réforme de l'enseignement secondaire. Ce serait une tâche bien difficile puisque les buts de cet enseignement sont si complexes. Je m'oppose simplement aux "terribles simplificateurs" et aux dogmatiques. Il ne doit pas y avoir une seule partie des mathématiques où la manière de traiter soit déterminée de façon immuable. Dans l'intérêt de l'authenticité de l'enseignement tout doit être continuellement réexaminé et l'on ne doit surtout en aucun cas interdire par principe l'entrée de toute idée nouvelle dans l'enseignement.

Pour établir un programme convenable, il faut tenir compte et des acquisitions nouvelles de la science et des mathématiques classiques. Je dirais même que la théorie moderne des structures permettrait de présenter les programmes des lycées avec une efficacité accrue et de montrer l'immense portée des notions des mathématiques nouvelles. Il n'est pas nécessaire d'énumérer ici les notions fondamentales dont il s'agit, car chacun de nous a déja assisté à plus d'une conférence magistrale sur ce sujet ou participé à l'une ou l'autre leçon modèle sur un de ces sujets. Les défenseurs du troisième domaine des mathématiques seront toujours attaqués par ceux qui se réclameront de l'"évidence" en sous-entendant purement et simplement par la l'"évidence" de la géométrie euclidienne. Cela nous ramènerait tout simplement à Kant. Le développement mathématique de ce dernier siècle, en commençant à peu près avec Hilbert "Grundlagen der Geometrie" de 1899 nous a montré que l'on trouve des "évidences" dans tous les domaines des mathematiques. Nous sommes tous sous l'emprise de cette "évidence", lorsque nous étudions une de ces nouvelles théories!

Naturellement on m'objectera que j'abuse du mot de "évidence" et on ajoutera des réflexions philosophiques. C'est le procédé qu'on a employé déja dans la lutte contre la méthode axiomatique en citant la vieille querelle entre constructivisme et axiomatique. Je pourrais même remonter plus loin et dire que c'est la vieille guerre de religion entre platonisme et réalisme. Si nous la reprenions nous ferions sortir la discussion du troisième domaine mathématique, de la didactique mathématique et meme de notre science en général. Nous porterions la discussions dans des régions lointaines, étrangères à notre science, ce qui ne pourrait que gêner notre vie mathématique.

Il est toujours déplacé en mathématiques d'exposer des doctrines philosophiques. Les constructions polymorphe et monomorphe et la construction axiomatique sont les deux principes fondamentaux des mathématiques. Nous ne saurions nous passer ni de l'un, ni de l'autre. Les deux doivent trouver la place qui leur revient dans le troisième domaine mathématique.

Affirmer que l'un de ces principes est défavorisé par rapport à l'autre, ne veut rien dire. Il s'agit de faire des propositions concretes. Quant à moi, je ne saurais établir ici de programme tout fait pour l'enseignement secondaire. C'est l'affaire des pédagogues nantis d'expérience. Il est certes vrai que nous discutons ce genre de questions dans nos séminaires de didactique.

Je suis ici pour déblayer le terrain, afin que les trois domaines mathématiques puissent toujours avoir des échanges intellectuels féconds.

POUR UNE CONCEPTION GLOBALE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

par
C. Bréard
(Paris)

Depuis quelques années l'enseignement des mathématiques subit une métamorphose imposée par l'évolution plus ou moins rapide de la recherche mathématique et des utilisations de cette mathématique. Cette rénovation et cette adaptation de l'enseignement posent des problèmes nouveaux qui, évidemment, s'ajoutent à d'autres problèmes didactiques, plus anciens et plus permanents.

L'enseignement de la mathématique contemporaine doit tenir compte d'un certain nombre d'impératifs:

- rechercher le développement intellectuel maximum de l'enfant;
- donner des connaissances qui seront utiles à l'enfant dans sa vie professionnelle.

Autrement dit, il sera indispensable de tenir compte:

- de la psychologie de l'enfant;
- des besoins de la société.

Cela amène à distinguer dans la culture contemporaine, trois composantes:

- Composante esthétique (lettres et arts, langues...).
- Composante scientifique (mathématiques, physique, chimie, biologie...)
- Composante sociale (formation civique...).

<table>
<tr><td>Agê</td><td>av. 5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td></tr>
<tr><td>Classe</td><td>E.M.</td><td>CP</td><td>CE 1</td><td>CE 2</td><td>CM 1</td><td>CM 2</td><td>6^e</td><td>5^e</td><td>4^e</td><td>3^e</td><td>2^e</td><td>1^e</td><td>ME</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Niveaux</td><td rowspan="2">Niveau Maternel</td><td colspan="5" rowspan="2">Niveau Elémentaire</td><td colspan="2">Cycle d'observation</td><td colspan="2">Cycle d'orientation</td><td colspan="3" rowspan="2">Second Cycle</td></tr>
<tr><td colspan="4">Premier cycle</td></tr>
</table>

En ce qui concerne la part de la mathématique contemporaine, il apparaît possible actuellement de promouvoir un plan général pour l'enseignement de la mathématique. Ce plan doit tenir compte des impératifs précédents et être suffisamment rigoureux. Il doit éviter les contradictions entre les divers niveaux du développement intellectuel de l'enfant et entre les stades successifs du développement de la connaissance mathématique.

En somme, il s'agit d'un tableau à colorier; les couleurs sont déposées progressivement; le "fignolage" est peut-être lent, mais les résultats sont sûrs.

Le point primordial est l'utilisation d'un principe permanent; l'enfant part du concret pour venir à l'abstrait et revenir ensuite au concret.

Dans le premier stade les activités sensorimotrices permettent l'acquisition d'une notion; sa compréhension est déjà un pas vers l'abstrait. Mais cet abstrait manipulé longuement devient familier, c'est-a-dire concret. On peut alors utiliser cette notion familière dans la vie pratique (physique, chimie, etc...). Alors cette notion se fixe.

On est donc en présence d'une véritable dialectique tryptique de la mathématique. L'exposé suivant mettra en évidence cette unité dialectique.

Niveau maternel

Dans les classes maternelles l'enseignement de la mathématique n'intervient pas directement; l'enfant prend contact avec le monde environnant. Certains jeux peuvent toutefois être considérés comme pré-mathématiques.
Par exemple:

- cubes et poupées gigognes;
- classement de bâtons de longueurs diverses;
- classement et triage de dessins, lettres, chiffres, symboles utilisés en mathématiques.

En général de tels jeux utilisent les relations d'ordre, ou encore les structures de groupe.

Il est même possible au cours du dernier trimestre de présenter les nombres de 0 à 20 globalement.

Niveau élémentaire

Au cours préparatoire on présente les nombres de 0 à 100, d'abord par globalisation, puis à l'aide du système métrique.

Pour cela on part de manipulations sur des ensembles. Un matériel spécialisé et coûteux n'est pas indispensable; chaque enfant peut construire son matériel individuel, cailloux, morceau de bois, fiches en carton, figurines à découper et à colorier. Ainsi les éléments des ensembles manipulés par les enfants ne sont jamais identiques.

Cela permet d'éviter l'absurdité, hélas classique:

4 pommes + 2 pommes = 6 pommes

comme si on avait jamais défini l'addition des pommes!

La réunion de deux ensembles mène à l'addition; d'abord à l'aide du matériel concret; puis l'opération abstraite s'en dégage par une véritable "éduction". Si l'enfant n'a pas réalisé ce passage du concret à l'abstrait, il revient au concret en utilisant des ensembles qu'il doit choisir convenablement; et c'est déjà une amorce du raisonnement.

La même technique didactique est utilisée pour la soustraction.

En ce qui concerne la multiplication l'utilisation du produit cartésien de deux ensembles s'impose. On emploie d'abord des jeux qui présentent cette notion et le dénombrement des ensembles A, B et A x B permet de passer à la multiplication. Evidemment de nombreuses manipulations sont nécessaires avant d'arriver à la mémorisation de la table de multiplication.

Les opérations sur les nombres sont appliquées à de nombreux problèmes simples se rencontrant dans la vie. Il est même intéressant et fructueux de laisser les enfants inventer ces problèmes à partir de ce qu'ils voient chez eux,en classe...

Ainsi, à partir d'expériences concrètes, des techniques de calcul abstraites ont été déjà dégagées; par utilisation ces techniques deviennent familières, c'est-à-dire, finalement concrètes. Tout s'est donc passé conformément à la dialectique tryptique.

Dans les classes suivantes (CM 1 et CM 2), vers l'âge de 8 ou 10 ans, l'étude des fractions peut alors être présentée concrètement par des classes d'équivalence; sans aucune théorie bien sûr!

Il est évident qu'alors des exercices d'utilisation des notions acquises sont indispensables; en effet il ne faut pas perdre de vue le troisième volet de notre dialectique tryptique; les notions mathématiques acquises doivent pouvoir être utilisées par l'enfant.

Ces cinq années d'études primaires amènent l'enfant à l'entrée de l'enseignement secondaire à l'âge de 11 ou 12 ans.

Cycle d'observation

Dans cette période de deux années il est indispensable de donner des notions sur la théorie des ensembles et d'en tirer immédiatement des conséquences sur le plan pratique. De même il est tout autant indispensable de présenter la notion d'application d'un ensemble dans un autre ensemble. Les utilisations de cette notion sont nombreuses: mesures diverses, application linéaire (qui remplace avantageusement la règle de trois), etc...

L'année suivante (en classe de Cinquième) une théorie élémentaire des nombres naturels et des nombres rationnels sera présentée simplement, dans laquelle l'élève retrouvera toutes les manipulations effectuées dans l'enseignement primaire, car en fait les méthodes sont absolument invariantes.

Les nombres réels positifs sont introduits rapidement,car à ce niveau une théorie complète n'est ni indispensable,ni utile.

Bien entendu, il serait très utile de suivre l'ordre suivant: études successives des entiers naturels (N), des entiers rationnels (Z), des rationnels (Q) et des réels (R). L'étude des propriétés permet de dégager des notions sur les structures algébriques classiques. Malheureusement les programmes français ne proposent pas cet ordre, et on peut regretter l'extrème timidité de nombreux professeurs; beaucoup trop d'entre eux étant encore atteint de "programmite".

Les notions de structures sont dégagées, mais l'utilisation se fera plus tard.

Quelle est la place de la géométrie?

La géométrie doit rester abstraite; elle ne figure donc pas en tant que géométrie dans les classes du cycle d'observation.

Les dessins géométriques ne constituent pas la géométrie. On présentera donc aux élèves sous le vocable de "diagrammes géométriques" certains diagrammes d'ensembles d'éléments qui seront précisés plus tard. Les constructions géométriques constituent un travail manuel, qui relève plus de la physique que de la mathématique.

Cette méthode a trois avantages:

1) elle ne présente pas de raisonnement géométrique, raisonnements déjà bien complexes, à des élèves qui ne comprennent rien à un raisonnement logique.

2) Elle servira de base concrète à l'étude de la géométrie abstraite, car l'élève a ainsi dans ses mains les diagrammes d'Euler de cette géométrie abstraite.

3) Si un élève peu doué change d'orientation pour entrer dans la vie professionnelle, les connaissances acquises de dessin géométrique lui seront très utiles.

Enfin, et cela est très important, en partant des ensembles on peut, pendant cette période, commencer à donner des notions élémentaires de logique; ces notions seront utilisées par la suite. Il est particulièrement fructueux de présenter ces notions de logique en dehors du monde mathématique et d'emprunter les exemples dans les connaissances non mathématiques de l'enfant. Par la suite ces éléments de logique seront mobilisés dans la théorie des nombres.

L'entraînement au calcul mental, ou mieux au calcul semimental est rentable si ce calcul est commencé et si le professeur en tire tout ce qui est possible sur le plan des propriétés des opérations et sur le plan logique. On ne peut, évidemment, dans ce domaine, se limiter à l'acquisition de techniques et de réflexes.

Cycle d'orientation

Pendant cette période de deux années (4ème et 3ème) le point le plus délicat pour le professeur est de former le sens du raisonnement; cette éducation a été commencée l'année précédente, en Cinquième.

En partant des ensembles, d'exemples pris dans la vie courante, puis des nombres on peut arriver à mettre au point, de façon sûre, la logique de l'élève. C'est là le test le plus important pour l'orientation de l'élève. La pensée formelle doit être bien établie dans une classe de Quatrième, après trois mois, chez au minimum 50% des élèves; ce pourcentage doit atteindre 80% à la fin de la Quatrième.

La géométrie sera présentée à partir de la notion de nombres réels; le plan ponctuel R^2, puis l'espace ponctuel R^3. Aucune difficulté ne se présente; l'élève manie parfaitement bien les points (x, y). L'espace R^2 est progressivement structuré, couples de points (ou vecteurs liés), vecteurs libres, droites. Les propriétés des opérations vectorielles sont mises en évidence et la notion de structure d'espace vectoriel prend forme dans la pensée de l'enfant.

Les diagrammes d'Euler des ensembles rencontrés sont les "diagrammes géométriques" étudiés dans les deux années du cycle d'observation. L'enfant se sert des diagrammes surtout lorsqu'il rencontre des difficultés; dans cette initiation à des connaissances qui, pour l'élève, sont abstraites, celui-ci peut revenir à un support concret; il faut le laisser faire; ce travail de retour au concret est souvent une forme d'intelligence. Il est indispensable de se persuader que dans une classe de Quatrième tous les élèves ne s'ouvrent pas à la pensée formelle en même temps.

Une part très importante est donnée à l'étude des symétries dans l'exposé de la géométrie. Presque toutes les démonstrations peuvent se faire par les symétries, et elles sont toujours plus simples que les démonstrations traditionnelles. En présentant les notions de rotation et de translation, on peut se demander si les cas d'égalité des triangles sont encore utiles?

Les vecteurs sont aussi largement utilisés, et le calcul vectoriel élémentaire doit devenir aussi familier que le calcul sur les nombres, ou sur les polynômes.

A la fin de cette période une possession convenable de la pensée formelle, des connaissances d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et une technicité opératoire sont indispensables à une orientation de l'élève vers des études mathématiques ou scientifiques.

Second Cycle

Pendant les trois années de ce cycle, il est très intéressant de reprendre l'ensemble des mathématiques indispensables pour l'entrée à l'université en vue d'études scientifiques, ou dans les classes mathématiques supérieures.

A partir d'un exposé assez copieux de la théorie des ensembles, on peut construire les nombres et traiter des généralités sur l'arithmétique, dégager à nouveau les structures classiques et montrer la nécessité de l'axiomatisation afin de réaliser une économie de pensée. Il devient alors possible au niveau des classes terminales de présenter une étude axiomatique des structures algébriques.

La notion d'espace vectoriel est d'abord présentée à l'aide des espaces vectoriels R^2, R^3, ... R^n. L'élève s'aperçoit alors qu'il est aussi simple de travailler dans un espace de dimension n que dans un espace de dimension 2 ou 3. L'espace vectoriel des polynômes met en contact avec les espaces dont la dimension est infinie.

On peut introduire, dans R^3 par exemple, la notion de produit scalaire par la forme bilinéaire $\langle \vec{V};\vec{V}' \rangle = XX'+YY'+ZZ'$. Cela permet l'extension de cette notion de produit scalaire aux formes définies positives.

L'orthogonalité est définie par

$$\vec{V} \perp \vec{V}' \iff \langle \vec{V} ; \vec{V}' \rangle = 0.$$

Cela est naturel, car cette définition est alors étendue facilement aux fonctions orthogonales.

Aucun diagramme d'Euler n'est nécessaire. Mais ultérieurement l'étude des géométries réelles ponctuelles utilisera les propriétés de l'espace vectoriel R^3, et alors les diagrammes géométriques déjà connus des élèves pourront être utilisés.

Les équations sont présentées à l'aide de la notion de fonction.

Si $f : x \in E \rightarrow f(x) \in F$,
la solution générale de l'équation $f(x) = a$ est:

$$S = \left\{ x/x \in E;\ f(x) = a \right\} = f^{-1}(a)$$

Les transformations sont étudiées dans l'optique de l'algèbre linéaire. En effet, symétries, rotations, translations, affinités, dilatations, homothéties, similitudes, sont des transformations ponctuelles affines, et leur étude se ramène à des transformations linéaires.

L'introduction de notions simples de topologie (ouverts, voisinages...) permet un développement acceptable des premières notions d'analyse. Des notions de géométrie différentielle, de cinématique, terminent l'exposé en donnant des utilisations des connaissances acquises.

Mathématiques et Physique

Un autre problème se pose. Partant du concret, les études mathématiques aboutissent pour les élèves valables à une connaissance axiomatisée initiale, qui doit être complétée en faculté ou dans les classes préparatoires aux concours d'entrée dans les grandes écoles. Cela représente, pour l'ensemble des études primaires et secondaires, les deux premiers volets de notre dialectique. Le troisième volet sera l'utilisation des mathématiques modernes en physique et en chimie.

Cela nécessite une collaboration des professeurs des divers domaines scientifiques. En particulier les manuels de physique doivent être élaborés par un "couple" formé d'un physicien assisté d'un mathématicien. Le physicien ne peut que gagner à cette collaboration, mais il est tout aussi certain que le mathématicien en tire aussi profit; et ce profit peut avoir des conséquences sur le cours de mathématiques.

Conclusion

Cette façon de présenter et d'enseigner la Mathématique contemporaine tient compte du plus grand nombre des données du problème mais surtout elle évite d'amener les élèves dans une impasse, de les conditionner pour avoir à les déconditionner ensuite. C'est là certainement le principal mérite d'une telle présentation.

La dialectique tryptique tient compte des données psychologiques et sociales du problème.

Au début, partant d'un matériel idéo-visuel peu coûteux, on amène progressivement l'enfant vers l'abstraction en l'habituant à cesser de voir concrètement pour voir mentalement d'innombrables fois. La pensée formelle, abstraite, apparaît progressivement et se développe pour se fixer sérieusement vers la fin des études secondaires. Elle est ensuite utilisée en mathématiques et dans les autres domaines scientifiques.

Plus est sans doute possible, mais la méthode est sans prétention; et elle cherche à "toucher" le plus grand nombre d'élèves, à sortir du domaine du laboratoire pour passer à la production en série. En un mot elle cherche à former d'honnêtes élèves qui pourront utiliser leurs connaissances mathématiques, et non à fabriquer des "acrobates" pour le "cirque mathématique".

VERSCHIEDENE ASPEKTE DER AXIOMATISCHEN METHODE IM UNTERRICHT 1)

von
Hans-Georg Steiner
(Münster)

I. Axiomatische Methode und Mathematik am Gymnasium

Wenn man zu Fragen des mathematischen Unterrichts sich aussert, sollte man zunächst Klarheit über die Zielsetzung eines solchen Unterrichts haben. Für den Mathematikunterricht am Gymnasium möchte ich das allgemeine Ziel grob so umreissen: Es kommt darauf an, dem Schüler unter Konzentration auf die fundamentalen Einsichten und Fertigkeiten in elementarer Weise ein angemessenes Bild von dem zu geben, was Mathematik und mathematische Wissenschaft heute ist. Dies setzt voraus, dass man vom Gesamtphänomen Mathematik ausgeht und es in seiner ganzen Reichweite versteht, inhaltlich: von den Anwendungsgebieten und den hier liegenden Modellbereichen der Mathematik bis zu den logischen und philosophischen Grundlagen; in der Methode: vom Erfinden und Entwickeln der Mathematik unter Beachtung ihrer konstruktiven Realisierungen bis zur Darstellung in axiomatisch-deduktiven Systemen.

Ohne im einzelnen auf einen entsprechenden stofflichen und methodischen Kanon der Elementarmathematik am Gymnasium einzugehen, möchte ich mich gleich der Frage nach der Stellung der axiomatischen Methode im Mathematikunterricht zuwenden. Dabei scheint es mir wichtig, zunächst die verschiedenen Seiten der axiomatischen Methode zu beleuchten und voneinander abzusetzen. Dies ist umso dringender, als in früheren Dis-

1) Erweiterte Fassung eines Vortrags, gehalten auf der IMUK-Tagung in Echternach (Luxemburg) am 31.5.1965.

kussionen über unser Problem häufig sehr Verschiedenes unter "axiomatischer Methode" verstanden wurde und dadurch erhebliche Verwirrung entstand [1].

1. Verschiedene Aspekte der axiomatischen Methode

Meines Erachtens sind drei Arten von Axiomatik zu unterscheiden: a) die bereichsinterne, konkrete Axiomatik, b) die abstrakte Axiomatik (als Strukturtheorie), c) die formalistische Axiomatik [2]. Wir werden zu ihrer näheren Kennzeichnung im folgenden systematische und methodische Unterscheidungsmerkmale angeben:

a) Die bereichsinterne, konkrete Axiomatik:

Als systematische Merkmale dieser Axiomatik führen wir an: Sie ist ontologisch verankert, d.h. sie ist bezogen auf ein durch Anschauung oder Evidenz, genetisch, konstruktiv, als Erfahrungsmaterial oder sonstwie objektiv Gegebenes, das der Mathematik als Gegenstand zugrundeliegt. Die Grundbegriffe einer solchen Axiomatik haben eine absolute Bedeutung, die Axiome sind wahre Aussagen.

In methodischer Hinsicht ist hier zunächst die Tätigkeit des Axiomatisierens als logisches Ordnen der Aussagen und Begriffe hervorzuheben. Dieses Ordnen kann "lokal" geschehen, das heisst in Teilkomplexen des jeweiligen inhaltlich gegebenen Gebietes, oder sie kann "global" das vollständige Gebiet betreffen. Ziele solchen Vorgehens sind unter anderem das klare Abgrenzen von Voraussetzungen (als evidenten Grundtatsachen, gesicherten Erfahrungstatsachen usw.) und die dieser Abgrenzung entsprechende Sicherung der übrigen Tatsachen durch das strenge deduktive Verfahren. Das Problem der Widerspruchs-

---

1) Siehe etwa die Diskussionen auf der IMUK-Tagungin Aarhus 1960, abgedruckt in Elementaer Afdeling Nr.7:Lectures on modern teaching of geometry and related topics.Aarhus Universet, Matematisk Institut.

2) Siehe hierzu auch: H.Freudenthal, Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?Der Mathematikunterricht 4/1963. Dort wird ebenfalls eine Dreiteilung angegeben, die sich von unserer etwas unterscheidet: traditionelle Axiomatik (im Sinne Euklids), vollständige Axiomatik, abstrahierende Axiomatik.

freiheit existiert nicht, wohl aber kann die Frage nach der Unabhängigkeit und der Vollständigkeit des Axiomensystems, letztere im Hinblick auf die Definierbarkeit und Ableitbarsämtlicher zum Gebiet gehörigen Begriffe und Sätze. Die Aufgabe, Definitionen im Rahmen des jeweiligen deduktiven Systems zu geben, kann sich dabei als Problem der Begriffsanalyse und der Begriffsexplikation mit entsprechenden Adäquatheitsansprüchen stellen.

Wird eine mathematische Theorie ideell-inhaltlich verstanden, wie etwa die euklidische Geometrie bei Kant, so entsteht als besonderes Problem noch das der Anwendung z.B. in der Physik, zu dessen Bewältigung erkenntnistheoretische Hypothesen erforderlich sind, wie wir sie in Kants Transzendentalphilosophie finden.

Der ersten Art von Axiomatik begegnen wir in praxi bei Euklid. Auch gewisse ihrer Prinzipien sind schon früh dargestellt worden durch Aristoteles in der Analytica posteria [1]. Zur Beleuchtung der Rolle der Evidenz in der Geschichte der Axiomatik zitieren wir das Aristotelische Evidenzpostulat an die "Grundwahrheiten" einer Wissenschaft [2]: "Eine Grundwahrheit ist eine Aussage, die ihre Evidenz sich selbst und nicht irgendwelchen anderen Aussagen verdankt; denn die Prinzipien einer Wissenschaft dürfen nicht mehr einer Begründung bedürfen, sondern müssen unmittelbar evident sein." Diese Evidenzverankerung finden wir dann durchgängig vor allem für die Geometrie deutlich bei Descartes, Pascal und bis über die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie hinaus sogar noch bis Frege.

Wir erinnern hier beispielsweise an Pascals Regeln für das Beweisen aus dem "Vermächtnis eines grossen Herzens" [3]:

---

1) Neuere Forschungen zeigen allerdings, dass man mit der Anwendung der Aristotelischen Theorie der Axiomatik auf die mathematische Axiomatik der Griechen vorsichtig sein muss. Hierzu und vor allem zum neueren Verständnis der euklidischen Axiomatik selbst: Á.Szabó, Anfänge des euklidischen Axiomensystems. Archive for History of exact Sciences. Berlin-Göttingen-Heidelberg Vol. 1, Number 1 (1960). Ferner die dort angegebene Literatur.

2) zitiert nach der Uebersetzung von H. Scholz in: Mathesis universalis, Basel-Stuttgart 1961. Erster Aufsatz: "Die

"1. Keines von den Dingen beweisen wollen, die so selbstevident sind, dass es nicht noch Klareres gibt, um sie zu beweisen. 2. Alle etwas dunklen Satze beweisen und zu ihrem Beweise nur sehr evidente Axiome oder schon anerkannte oder bewiesene Sätze verwenden."

Ferner weisen wir auf das hin, was Frege über die Axiome der Geometrie schreibt [1]: "Axiome nenne ich Sätze, die wahr sind, die aber nicht bewiesen werden, weil ihre Erkenntnis aus einer von der logischen verschiedenen Erkenntnisquelle fliesst, die man Raumanschauung nennen kann. Aus der Wahrheit der Axiome folgt von selbst, dass sie einander nicht widersprechen." Für Frege ist demgemäss selbstverständlich, "dass axiomatische Sätze keinen Eigennamen, kein Begriffswort, kein Beziehungswort enthalten dürfen, dessen Bedeutung nicht vorher feststande."

Die Bindung der axiomatisch aufgebauten Geometrie an empirische Tatsachen finden wir deutlich ausgesprochen bei Helmholtz und Pasch. In seinen "Vorlesungen über neuere Geometrie" (1882) schreibt Pasch: "Nach Ausscheidung der auf Beweise gestützten Satze, der Lehrsätze, bleibt eine Gruppe von Sätzen zurück, aus denen alle übrigen sich folgern lassen, die Grundsätze; diese sind unmittelbar auf Beobachtung gegründet"... "Die Grundbegriffe sind nicht definiert worden; keine Erklarung ist imstande, dasjenige Mittel zu ersetzen, welches allein das Verständnis der einfachen, auf andere nicht zurückführbaren Begriffe erschliesst, nämlich den Hinweis auf geeignete Naturobjekte." ..."Die Grundsätze sollen das von der Mathematik zu verarbeitende empirische Material vollständig umfassen, so dass man nach ihrer Aufstellung auf

---

Axiomatik der Alten, S. 32.

3) Die kleineren Schriften. Uebertragen und herausgegeben von W. Rüttenauer. Leipzig 1938.

1) Hierzu und zu Freges ontologischem Standpunkt siehe: H.G. Steiner: Frege und die Grundlagen der Geometrie I,II. Mathematisch-phys. Semesterberichte Bd X, 2 (1963), Bd. XI, 1 (1964).

die Sinneswahrnehmungen nicht mehr zurückzugreifen bauchi." ....Der Wert jener Methode besteht darin, dass die ihr entsprechende Auffassung des Beweisverfahrens alle Willkür ausschliesst, während bei jeder anderen Auffassung die Unanfechtbarkeit der Beweise aufhört, weil der Beurteilung keine scharfe Grenze gezogen werden kann. Die Unanfechtbarkeit der Beweise, durch welche die Lehrsätze auf die Grundsätze zurückgeführt werden, im Verein mit der Evidenz der Grundsätze selbst, welche durch die einfachsten Erfahrungen verbürgt sein sollen, gibt der Mathematik den Charakter höchster Zuverlässigkeit, den man ihr zuzuschreiben pflegt."

Die Auffassung von Pasch - wenn auch in abgewandelter Form - liegt allgemein den seit Newton auftretenden Bemühungen zugrunde, Gebiete der theoretischen Physik axiomatisch aufzubauen. Eine genauere Analyse dieses Vorgehens zeigt, dass dabei zwischen "Wirklichkeit" und Theorie Modellwelten gestellt werden, die das Problem der Realität in der Physik zu einem fundamentalen erkenntnistheoretischen Problem machen. Auf der Grundlage eines kritischen Realismus können wir hinsichtlich der Axiomatik in der theoretischen Physik von einer bereichsinternen, konkreten Axiomatik sprechen.

Eine Ontologie der gesamten Mathematik im Platonischen Sinne scheint heute immer noch vielen Mathematikern vorzuschweben. Als Grundbestand wird dabei vorwiegend eine inhaltlich verstandene, axiomatisch geregelte Mengenlehre angesehen. Eine Axiomatik der Mengenlehre ist dann in der Tat ebenfalls eine Axiomatik der ersten Art, wenn auch der Grundbereich nahezu universellen Charakter hat [1].

Schliesslich gehört hierher auch eine auf die konstruktiv-konkrete Mathematik bezogene Axiomatik soweit sie an ein konstruktives Modell fest gebunden ist. Die Ableitung der Peano-Axiome aus der operativ-konstruktiven Begründung der natürlichen Zahlen durch P. Lorenzen lässt sich so als konkrete Axiomatik interpretieren, nämlich als Herausstellung von

---

1) Siehe hierzu: H. Scholz und G. Hasenjäger, Grundzüge der mathematischen Logik. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961.

Grundaussagen über den die konkrete Arithmetik ausmachenden Strichmengenkalkül [1].

b) Die abstrakte Axiomatik:

Gemeint ist hier die den modernen abstrakten Theorien wie Gruppentheorie, Topologie, Ordnungstheorie zugrundeliegende Auffassung. Diese Axiomatik ist nicht bereichsgebunden, und zwar zunächst im Sinne der Unbestimmtheit bis auf Isomorphie, darüber hinaus im Sinne der Unvollständigkeit oder Polymorphie, die besagt, dass es nichtisomorphe Deutungen des Axiomensystems gibt. Hinsichtlich der Grundbegriffe und Grundsätze herrscht ein relativer Bedeutungs- und Wahrheitsstandpunkt: Die Grundbegriffe erhalten eine Bedeutung erst innerhalb eines Modelles. Sie haben Variablencharakter und sind in diesem Sinne "undefinierte Begriffe". Die Axiome sind Aussageformen. Sie lassen sich als Ausdrücke für Eigenschaften konkreter Gebilde auffassen. Gebilde, die alle in einem Axiomensystem aufgeführten Eigenschaften besitzen, erscheinen dann als Modelle des Axiomensystems. Manche Gebilde sind durch geeignete Axiomensysteme bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Der abstrakte Standpunkt besteht dann gegenüber einer konkreten Axiomatik nur noch in der gleichzeitigen Anerkennung verschiedener isomorpher Deutungen.

Interessante Ansätze zu dieser Axiomatik finden wir bereits bei Euklid, etwa in seinen "Axiomen" (für Grössen) oder in der Eudoxischen Proportionenlehre, auf die sich Aristoteles vermutlich mit dem folgenden Text aus der Analytica priora bezieht [2]: "Dass die Innenglieder einer Proportion vertauschbar sind, wurde früher gesondert bewiesen für Zahlen, Strecken, Körper, Zeiten, während das doch gezeigt werden kann für alle durch einen einzigen Beweis. Aber weil dies alles keine einheitliche Bezeichnung hatte, Zahlen, Strecken, Zeiten und Körper, und der anschaulichen Gestalt nach sich voneinander unterschied, wurde jedes gesondert erfasst; denn

---

1) Siehe: P. Lorenzen, Einführung in die operative Logik und Mathematik. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955, S.135.
2) Zitiert nach: O. Becher, Grundlagen der Mathematik, Freiburg-München 1954.

der Sachverhalt besteht ja nicht für die Strecken als solche oder die Zahlen als solche, sondern für das, was als im Ganzen bestehend angenommen wird."

Den Variablencharakter der Grundbegriffe der Geometrie hatte Hilbert in einem Brief an Frege drastisch so ausgedrückt [1]: "Wenn ich unter meinen Punkten irgendwelche Systeme von Dingen, z.B. das System: Liebe Gesetz, Schornsteinfeger... denke und dann nur meine sämtlichen Axiome als Beziehungen zwischen diesen Dingen annehme, so gelten meine Sätze... auch von diesen Dingen." Frege vergleicht diese Auffassung mit der Vorgabe eines Systems von Gleichungen mit mehreren Unbekannten, ohne jedoch eine solche Auffassung der Axiomatik zu akzeptieren. Er hat in diesem Vergleich interessanterweise einen Vorgänger, nämlich J.H. Lambert, der in seiner bekannten "Theorie der Parallellinien" (1766) schreibt: "Und da Euklids Postulata und übrigen Grundsätze einmal mit Worten ausgedrückt sind, so kann und soll gefordert werden, dass man sich in dem Beweise nirgends auf die Sache selbst berufe, sondern den Beweis durchaus symbolisch vortrage - wenn er möglich ist. In dieser Absicht sind Euklids Postulata gleichsam wie eben so viele algebraische Gleichungen, die man bereits vor sich hat und aus welchen x, y, z etc. herausgebracht werden soll, ohne dass man auf die Sache selbst zurücke sehe". Freilich hat Lambert hier noch nicht an mögliche andere Deutungen neben der "Sache selbst", das heisst der anschaulichen Geometrie, gedacht.

Zu den methodischen Möglichkeiten und Aufgaben der abstrakten Axiomatik gehört zunächst die <u>Präzisierung des (semantischen) Folgerungsbegriffs:</u> Eine einschlägige Aussage(form) A folgt aus einem Axiomensystem $\mathfrak{A}$ genau dann, wenn jedes Gebilde, das Modell von $\mathfrak{A}$ ist, auch Modell ist von A. Mit Hilfe dieses Begriffs lassen sich dann Fragen der <u>Unabhängigkeit</u> und <u>Vollständigkeit</u> behandeln. Ein berühmtes Beispiel ist der Unabhängigkeitsbeweis für das Parallelenaxiom

1) Siehe meinen unter 1) S.28 zitierten Aufsatz.

durch die Angabe geeigneter Modelle von Klein und Poincaré. Die grosse Bedeutung der abstrakten Axiomatik für die heutige Mathematik liegt in der Möglichkeit der Ordnung und des Aufbaus der Mathematik nach Strukturtypen, wofür das grosse Werk von Bourbaki ein berühmtes Beispiel gibt. In diesen Zusammenhang gehört dann die axiomatische Definition abstrakter Begriffe. Zunächst sind das solche Begriffe wie Gruppe, Körper, topologischer Raum, Mannigfaltigkeit, Vektorraum, Ordnung, usw., bei deren Aufstellung häufig das Problem einer Begriffsanalyse mitgespielt hat. Heute steht dieser Gesichtspunkt insbesondere bei der axiomatischen Präzisierung von Begriffen in modernen Anwendungsgebieten im Vordergrund, wozu wir im zweiten Teil dieser Arbeit ein ausführlich behandeltes einfaches Beispiel geben werden. Sodann gehören zu den axiomatisch fundierten Begriffen die allgemeinen Begriffe innerhalb der abstrakten Theorien, wie etwa der Begriff der Stetigkeit von Abbildungen in der Theorie der topologischen Räume oder der Begriff der Dimension in der Theorie der Vektorräume.

c) Die formalistische Axiomatik:

Diese sieht in konsequenter Fassung gänzlich ab von einem Bezug auf mathematische Objekte als ontologische Gegebenheiten. Mathematische Theorien sind dann formale Systeme, das heisst Kalküle, in denen die Axiome nichts als gewisse Ausgangsfiguren und die Sätze nach bestimmten Umformungsregeln abgeleitete Figuren (Zeichenreihen) sind [1].

Diese Auffassung der Axiomatik und entsprechend der ganzen Mathematik hat in mancher Hinsicht einen Vorläufer in Leibniz. Sie setzt zu ihrer vollen Realisierung die Entwicklung der von Leibniz geahnten Logik-Kalküle voraus, wobei vor allem Frege, der selbst den formalistischen Standpunkt ablehnte, bahnbrechend gewesen ist. Viele Grundlagenforscher, insbesondere Hilbert, fühlten sich zum Formalismus gedrängt

---

1) Zum formalistischen Standpunkt siehe etwa: H.B.Curry, Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics. Amsterdam 1958.

durch den Verlust des Vertrauens, das man in die Evidenz gesetzt hatte. Dazu hat neben der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien vor allem das Auftreten von Antinomien in den Grundlagen der Mengenlehre und Logik wesentlich beigetragen.

Zu den methodischen Merkmalen der formalistischen Axiomatik gehört zunächst die Einbeziehung der Logik in die exakte Darstellung. Geht man von inhaltlichen Theorien zur formalistischen Darstellung über, so hat sich an die mathematische Axiomatisierung noch die Formalisierung und die Kodifizierung, (d.h. die Angabe aller logischen und mathematischen Zeichen und der aus diesen gebildeten Ausgangsfiguren nebst der Umformungsregeln) anzuschliessen. Dem semantischen Folgerungsbegriff entspricht jetzt der syntaktische Begriff der Ableitung, dem absoluten oder relativen Wahrheitsbegriff die Ableitbarkeit. An die Stelle der Existenz mathematischer Objekte tritt die syntaktische Widerspruchsfreiheit des jeweiligen formalen Systems. Auch hier gibt es "konkrete" und "abstrakte" Theorien. Die "konkreten Theorien" werden gegeben durch die syntaktisch vollständigen formalen Systeme.

Die Reichweite des formalistischen Standpunktes wird beleuchtet durch die berühmten Sätze von Gödel. Dabei besagt der Gödelsche Unvollständigkeitssatz unter anderem, dass die Mathematik sich schon in hinreichend grossen Teilen (geschweige denn als Ganzes) nicht als ein einziges formales System darstellen lässt, dass es dazu vielmehr nicht abbrechender Reihen immer reicherer Systeme bedarf.

2. Unterrichtliche Möglichkeiten

Die Mathematik wird in der Schule zunächst auf einer halbempirischen, naiv anschaulichen Basis als die Lehre von den Zahlen und den geometrischen Figuren entwickelt. Es geht hier darum, dass die Schüler einige elementare mathematische Objektbereiche inhaltlich kennen und beherrschen lernen. Dabei spielen axiomatische Gesichtspunkte zuerst explizit überhaupt keine Rolle, höchstens implizit in der Hand des Lehrers als

Mittel zur Auswahl und Rechtfertigung bestimmter inhaltlicher Einkleidungen und Realisierungen..Ist jedoch erst ein gewisser "Inhalt" durch Rechnen, Messen, Zeichnen, Vorstellen usw. vorhanden, so ergeben sich bald auch Ansatzpunkte für die axiomatische Methode. Dabei handelt es sich selbstverständlich zuerst um bereichsinterne, konkrete Axiomatik.

In der euklidischen Geometrie ist die Situation am Gymnasium etwa die folgende: Im Alter von 10 bis 12 Jahren lernt der Schüler propädeutisch die grundlegenden geometrischen Gestalten und Vorstellungen kennen: Körper, Flächen, Figuren, Geraden, Punkte, elementare Symmetrien usw.. In Verbindung mit der Ausübung einfacher Konstruktionen wird er dabei in die "ideale Wirklichkeit der euklidischen Geometrie" eingeführt. Das eigentliche Schwergewicht im fortgeführten Geometrieunterricht (der 13 bis 14-jährigen) ist dann die Analyse des Kongruenzbegriffs, die heute besonders fruchtbar von Kongruenzabbildungen aus unter Auszeichnung der Geradenspiegelungen vorgenommen werden kann. Es handelt sich hier um ein lokales Ordnen und partielles Axiomatisieren. Inzidenz- und Anordnungszusammenhänge werden noch nicht einer vollständigen Analyse unterworfen, sondern im wesentlichen als anschaulich bekannter Tatsachenhintergrund genommen. Anders beim Kongruenzbegriff. Die Rückführbarkeit aller Kongruenzabbildungen auf die Geradenspiegelungen wird phänomenologisch herausgearbeitet und eine Zusammenstellung von Eigenschaften der Geradenspiegelungen dann als Axiome für die Theorie der Kongruenz verwendet [1].

Die Begriffe Punkt und Gerade sind auf dieser Stufe also noch ganz an die anschauliche Geometrie der Tafelebene gebunden, freilich gereinigt in dem Sinne, dass der Schüler z.B. akzeptiert und beachtet: durch zwei Punkte geht genau eine Gerade. Auf der Oberstufe ist es dann aber erforderlich, dass der Schüler diese problematische "ontologische Bindung"

---

1) Siehe hierzu etwa: H.Nickelsen, Unterrichtserfahrungen mit Abbildungsgeometrie. Der Mathematikunterricht 9. Jg. 1963, Heft 1.

abwirft, zunächst in dem Sinne, dass er Hilberts einleitende Worte zu den "Grundlagen der Geometrie" versteht: "Wir denken uns drei verschiedene Systeme von Dingen..." Dazu kann im Unterricht hervorragend eine Beschäftigung mit der ebenen Inzidenzgeometrie dienen, in deren Rahmen Modelle mit endlich vielen "Punkten" und "Geraden" betrachtet werden und besonders einfach (ohne Anordnung) der Uebergang zur projektiven Geometrie studiert werden kann [1]. Zur drastischen Verdeutlichung der Interpretierbarkeit der Axiome im Sinne der abstrakten Axiomatik kann man für die räumlichen Inzidenzaxiome Hilberts etwa folgende Deutung verwenden: Wir wollen sagen
"ist Mitglied der Familie Meier" statt "ist ein Punkt",
"ist ein Ferientag" statt "ist eine Gerade",
"ist ein besonders schöner Ausflugsort" statt "ist eine Ebene".
Ferner wollen wir die Inzidenzrelation AI_1a (der Punkt A inzidiert mit der Geraden a) deuten: "A macht am Tage a einen Ausflug mit dem Auto der Familie Meier". Ferner deuten wir die Relationsaussage $AI_2\alpha$ (der Punkt A inzidiert mit der Ebene α): "A besucht den besonders schönen Ausflugsort α." Man kann dann beweisen: Die Familie Meier ist nicht leer. Im Minimalfall hat sie 4 Mitglieder. In diesem Fall gibt es (wie man am Tetraedermodell sich sofort klar macht) 4 besonders schöne Ausflugsorte, die Dauer der Ferien ist genau 6 Tage, jeder Ausflug wird genau von zweien der Meiers mitgemacht, jeder darf dreimal mit, jeder besucht drei besonders schöne Ausflugsorte, jeder besonders schöne Ausflugsort wird von genau drei Meiers besucht.

Schon verhältnismässig früh können Uminterpretationen im Geometrieunterricht in Verbindung mit dem Kugelmodell oder dem durch eine offene Kreisscheibe (oder eine Postkarte als offene Menge) gegebenen Modell erörtert werden. Die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms kann man so schon 14-jährigen wenigstens plausibel machen.

---

1) Siehe hierzu: G. Pickert, Ebene Inzidenzgeometrie. Hamburg 1958.

Als Fragenkomplexe aus der Elementargeometrie, die sich als Uebungsbeispiele für das lokale Ordnen auf der Stufe einer bereichinternen konkreten Axiomatik eignen, nenne ich noch: die Winkelsätze [1], die verschiedenen Winkelbegriffe, die verschiedenen Fassungen des Parallelenaxioms [2], die Viereckslehre, ein Lehrstück über kommensurable und inkommensurable Strecken, die Satzgruppe um den Pythagoras.

Aehnlich wie in der Geometrie kann man in der Arithmetik vorgehen, hier also das Zahlensystem etwa bis zu den rationalen Zahlen konkret aufbauen und dann die logischen Zusammenhänge zwischen den Rechen- und Anordnungseigenschaften dieser Gebilde untersuchen [3].

Von stärkerer Wirksamkeit dürften aber solche Axiomatisierungsübungen sein, die frühzeitig auf die abstrakte Axiomatik, also auf die Erschliessung solcher Begriffe wie Gruppe, Ring, Körper, Vektorraum, geordnete Menge usw. abzielen, soweit diese Begriffe im Unterricht fruchtbar werden können. Letzteres ist in starkem Masse sicher für den Gruppenbegriff der Fall [4]. Entscheidend ist dabei, dass dieser Begriff sich induktiv erschliessen lässt, wobei das Studium von Verknüpfungsgebilden bereits für 13-14-jährige eine angemessene Induktionsbasis liefert [5]. Von den Gruppen zu den Ringen und Körpern ist dann kein grosser Schritt mehr. Die entsprechenden abstrakten Begriffe vermögen im Unterricht ausserordentlich wirksam zu werden [6], insbesondere erlauben sie solche

---

1) Siehe etwa: H. Griesel, Lokales Ordnen und Aufstellen einer Ausgangsbasis, ein Weg zur Behandlung der Geometrie der Unter- und Mittelstufe. Der Mathematikunterricht 9. Jg. (1963), Heft 4.

2) Siehe hierzu: K. Fladt, Ein Kapitel Axiomatik: Die Parallelenlehre. Frankfurt-am-Main-Hamburg 1956.

3) Hierzu: A. Kirsch, Die Anordnungseigenschaften der Zahlen als Gegenstand für Axiomatisierungsübungen. Erscheint in den Math.-phys. Semesterberichten.

4) Siehe etwa: H. G. Steiner, Zur Didaktik der elementaren Gruppentheorie. Der Mathematikunterricht 11. Jg. (1965), Heft 1.

5) Siehe hierzu auch: H. G. Steiner, Einfache Verknüpfungsgebilde als Vorfeld der Gruppentheorie. Erscheint in: Der Mathematikunterricht.

6) Siehe etwa: H. G. Steiner, Quadratische Gleichungen und Quadratwurzelfunktionen in Körpern (Eine Thematik des Algebra-Unterrichts der Oberstufe). Mathem.-phys. Semesterberichte Bd XII, Heft 2 (1965).

im Unterricht häufig angewendete Prinzipen wie das Permanenzprinzip beim Aufbau des Zahlensystems mit der nötigen logischen und begrifflichen Klarheit zu formulieren und für die Hand des Schülers anwendungsfähig zu machen [1].

Eine Induktionsbasis für die Erschliessung des Begriffs der geordneten Menge können die Relationsgebilde sein, also Mengen mitsamt einer in ihnen gegebenen zweistelligen Relation. Ueber den Begriff der angeordneten abelschen Gruppe und des angeordneten Körpers sind dann nach der Methode der Strukturenverbindung die Grundlagen für eine axiomatische Charakterisierung der rationalen und vor allem der reellen Zahlen gegeben. Dabei kann die Frage der Archimedizität der Anordnung und die Präzisierung des Begriffs der unendlich kleinen und unendlich grossen Elemente in einem nicht-archimedisch angeordneten Körper eine bedeutsame Thematik im Oberstufenunterricht abgeben [2].

Mit der Aufstellung eines Axiomensystems für die reellen Zahlen ist zugleich eine axiomatische Grundlage für die reelle Analysis gewonnen. Aehnlich kann im Oberstufenunterricht mit Hilfe des Axiomensystems für den zwei- bzw. dreidimensionalen euklidischen Vektorraum eine Grundlage für die euklidische Geometrie gewonnen werden [3]. Als für den elementaren Unterricht bedeutsame abstrakte Begriffe seien hier ferner genannt: der Massbegriff und der Begriff des Verbandes [4].

Wie schon angedeutet, bietet die abstrakte Axiomatik hervorragende Möglichkeiten zur semantischen Begründung der Logik, insbesondere zur Präzisierung des Folgerungsbegriffs

---

1) Siehe etwa: H.G. Steiner, Moderne begriffliche Methoden bei der Behandlung der komplexen Zahlen. Der Math.Unterr. 10 Jg. (1964), Heft 2.

2) Siehe hierzu: H.G. Steiner, Aequivalente Fassungen des Vollständigkeitsaxioms für die reellen Zahlen. Erscheint in den mathematisch-physikalischen Semesterberichten.

3) Hierzu: J. Dieudonné, Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, Paris 1964. Ferner: J. Dieudonné, Winkel, Trigonometrie,komplexe Zahlen. Der Mathematikunterricht, 12. Jg. (1966), Heft 1.

4) Siehe hierzu im ganzen: H.G. Steiner, Menge, Struktur, Abbildung als Leitbegriffe für den modernen mathematischen Unterricht. Der Mathematikunterricht, 11. Jg. (1965),Heft 1.

und damit solcher Begriffe wie Unabhängigkeit und Vollständigkeit, Polymorphie, die für das moderne strukturelle Mathematikverständnis grundlegend sind. Auch dazu liegen bereits interessante didaktische Ueberlegungen und Erfahrungen vor [1].

Zur <u>formalistischen Praxis und Auffassung der Axiomatik</u> sind Beschäftigungen mit <u>Kalkülen</u> wesentlich, wozu insbesondere wenigstens teilweise auch Kalküle aus der Logik im Unterricht behandelt werden sollten. Während sonst vor allem der <u>klassische Grundlagenstandpunkt</u> im Vordergrund stand und die im Unterricht gelehrte Methodologie beherrschte, kann jetzt auch der <u>konstruktive Standpunkt</u> zur Geltung kommen [2]. Der moderne Mathematikunterricht muss wie die mathematische Wissenschaft selbst <u>polyglott</u> sein. Die Beschäftigung mit Kalkülen, die damit zusammenhängenden Fragen der Formalisierung und Kodifizierung stellen die Verbindung zur Theorie und Praxis der modernen <u>programmgesteuerten Rechenautomaten</u> her [3].

II. <u>Ein Beispiel zur axiomatischen Methode im Unterricht: Mathematisierung einer politischen Struktur.</u>

Wir wollen im folgenden an einem Beispiel im einzelnen zeigen, in welcher Weise die axiomatische Methode sachlich wie pädagogisch im Unterricht zur Geltung kommen kann. Dabei stellen wir solche richtungsweisenden Ideen in den Vordergrund, wie sie neuerdings gerade im Zusammenhang mit der Frage nach der Lehrbarkeit der axiomatischen Methode hervorgetreten

---

1) Siehe hierzu: (1) H.G. Steiner, Die Verbindung von Logik und Mathematik im mathematischen Unterricht. Mathem.-phys. Semesterberichte 9. Bd. (1963), (2) A. Eisenbach, Elementare Beispiele zur Axiomatik. Der Mathematikunterricht 7. Jg. (1961), Heft 1. (3) A. Kirsch, Endliche Gruppen als Gegenstand für axiomatische Uebungen. Der Mathematikunterricht 9. Jg. (1963), Heft 4.

2) Zur Bewertung dieser Standpunkte für den Aufbau des Mathematikunterrichts siehe: H.G. Steiner, Mathematische Grundlagenstandpunkte und Reform des Mathematikunterrichts. Math.-phys. Sem. Ber. Bd. XII, Heft 1 (1965).

3) Siehe hierzu: H.G. Steiner, Kalküle und Rechenautomaten im Unterricht. Der Mathematikunterricht 11.Jg. (1965), Heft 2.

sind [1]: Entwickeln der Mathematik von Situationen aus, Mathematisieren, lokales Ordnen, Axiomatisieren. Das Beispiel, das wir ausführlich erörtern entstammt dem Unterricht in einer Oberprima (13. Schuljahr, 19. Lebensjahr) des mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasiums. Es ist in seinen Voraussetzungen und Anforderungen jedoch nicht an diesen Schultyp gebunden. Auch dürfte es sich bereits für eine Behandlung in einer früheren Klasse eignen.

1. Abstimmungsmengen.

Bei der unterrichtlichen Einführung in unser Thema [2] gehen wir von Situationen aus, wie sie in der menschlichen Gesellschaft vorliegen, wenn eine Gruppe von Menschen Entscheidungen durch Abstimmungen zu treffen hat. Die Schüler bringen schnell eine Fülle von Beispielen: der Rat einer Stadt, der die Frage, ob eine neue Schule gebaut werden soll, entscheidet, eine Schulklasse, die für oder gegen einen Kandidaten zum Klassensprecheramt stimmt, eine Aktionärsversammlung, ein Schöffengericht, eine Prüfungskommission, der Bundestag usw. Es wird herausgefunden, dass dabei jedesmal eine (extensional) wohlbestimmte Menge von Menschen vorausgesetzt wird, die für die jeweilige Betrachtung die Grundmenge A bildet [3]. Eine

---

1) Hierzu: (1) H. Freudenthal, Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben. Der Mathematikunterricht 9. Jg. (1963), Heft 4, S. 5 ff. (2) H.G. Steiner, Wie steht es mit der Modernisierung unseres Mathematikunterrichts? Mathematisch-physikalische Semesterberichte Bd. IX (1965), Heft 2, S. 186 ff. (3) OECD-Schrift: mathematics to-day. Resolutions and recommendations, S. 306, Uebersetzung in: H. Athen, Internationale Arbeitstagung der OECD über neue Methoden im Mathematikunterricht. MNU, 17. Bd. (1964), Heft 2, S. 78.

2) Auf das ich durch den Abschnitt "Voting Coalitions" in dem Buch "Introduction to finite mathematics" von Kemeny, Snell, Thompson (Prentice-Hall, Inc., 1957) gestossen bin.

3) Abstimmungsfragen zwingen zur extensionalen Auffassung solcher Einrichtungen wie Rat eine Stadt oder Bundestag als Mengen. Schon bei der ersten Einführung in die Mengenlehre ist es wichtig, die extensionale von der intensionalen Auffassung abzusetzen. Die Klasse "Sexta b" einer Schule ist intensional unverändert, wenn ein neuer Schüler hinzukommt, nicht aber extensional. Bereits 12-14-jährige sind

solche Menge A heisse eine Abstimmungsmenge [1].

Bei einer Abstimmung soll es sich stets nur um die Alternative "dafür oder dagegen" handeln. Stimmenthaltungen wollen wir der Einfachheit halber ausschliessen oder nach der Regel "qui tacet, consentire videtur" behandeln. Die Mitglieder der Menge A können eine verschiedene Anzahl von Stimmen ≥ 0 haben. Die Teilmengen der Menge A nennen wir (mögliche) Koalitionen. Eine Koalition $K \subseteq A$ heisse dann eine Gewinnkoalition, wenn auf sie genügend viele Stimmen entfallen, um je nach der Entscheidungsregel (etwa: einfache Mehrheit oder 2/3-Mehrheit) die Entscheidung für sich erzwingen zu können.

Aus den Beispielen, die von den Schülern zusammengetragen oder für die Diskussion verschiedener Situationen ausgedacht wurden, wählen wir einige aus:

Beispiel 1: Es sei $A = \{a,b,c,d\}$, d.h. A bestehe aus vier mit "a", "b", "c", "d" bezeichneten Mitgliedern. Jedes Mitglied habe eine Stimme. Es gelte einfache Mehrheit. Eine Gewinnkoalition muss also wenigstens 3 Stimmen haben. Die Gewinnkoalitionen sind demnach die Mengen: $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$ und $\{a,b,c,d\}$.

Beispiel 2: A sei dieselbe Menge wie in Beispiel 1 mit dem Zusatz, dass a Vorsitzender ist und bei Stimmengleichheit der

---

an solchen Fragen brennend interessiert und steuern von sich aus eine (oft in Oberklassen nicht mehr zu findende) Vielzahl von Beispielen und Präzisierungsvorschlägen bei.

1) Welche Bezeichnungen wir verwenden wollen, ist natürlich Angelegenheit von Diskussionen in der Klasse. In nicht standardisierten Theorien wie der vorliegenden sind wir da ganz frei. Sonst ist im allgemeinen eine Standarbezeichnung zu übernehmen, dabei jedoch die meistens in der Wahl der Bezeichnung steckende Intention herauszuarbeiten. Im Laufe einer längeren Unterrichtsperiode kann den Schülern so ein Einblick in die Probleme einer Wissenschaftssprache gegeben werden. Den Begriff "Abstimmungsmenge" werden wir später noch genauer fassen.

Vorsitzende den Ausschlag gibt. Zu den Gewinnkoalitionen von Beispiel 1 kommen jetzt noch hinzu: $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$. Dieser Fall ist z.B. realisiert durch eine Prüfungskommission beim juristischen Referendarexamen (in Nordrhein-Westfalen) oder durch ein erweitertes Schöffengericht beim Amtsgericht, bestehend aus zwei Berufsrichtern und zwei Schöffen.

<u>Beispiel 3:</u> Es sei wieder $A = \{a,b,c,d\}$, die Stimmenverteilung jedoch (der Reihe nach): 6,5,5,1. Es seien wenigstens 13 Stimmen zum Erfolg erforderlich. Die Gewinnkoalitionen sind jetzt $\{a,b,c\}$ und $\{a,b,c,d\}$. Da insgesamt 17 Stimmen vertreten sind, könnten wir hier von einer 13/17-Mehrheit sprechen. Bei Anwendung des 3/4-Mehrheitsprinzips kommen aber dieselben Gewinnkoalitionen heraus. Dieses Prinzip wird angewendet in Aktionärsversammlungen bei Abstimmungen über Satzungsänderungen.

<u>Beispiel 4:</u> $A = \{a,b,c,d\}$ mit der Stimmverteilung 5,2,1,1. Eine Gewinnkoalition soll wenigstens 5 Stimmen haben. Dies entspräche einer 5/9-Mehrheit, die hier aber mit der einfachen Mehrheit übereinstimmt. Gewinnkoalitionen sind $\{a\}$ und alle Obermengen von $\{a\}$. Solch eine Situation könnte wiederum in einer Aktionärsversammlung gegeben sein, wenn a mehr als die Hälfte aller Aktien hat und es sich um gewöhnliche Abstimmungen handelt.

<u>Beispiel 5:</u> $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Jedes der n Mitglieder habe genau eine Stimme. Zum Gewinn sind n Stimmen erforderlich, d.h. A selbst ist einzige Gewinnkoalition. Diese Situation liegt vor, wenn Einstimmigkeit erforderlich ist.

Anhand der Beispiele machen die Schüler gewisse <u>Beobachtungen,</u> die wir zusammenstellen. Die Beobachtungen veranlassen, dass Begriffe eingeführt werden, die zum Erfassen der verschiedenen Situationen besonders geeignet sind:

<u>Beobachtung 1: Mit jeder Teilmenge K von A sind auch alle Obermengen von K Gewinnkoalitionen. Es genügt offensichtlich, die "minimalen Gewinnkoalitionen" zu kennen.</u>

Damit ist Anlass gegeben, (in einer Definitionsübung) festzulegen, was unter einer "minimalen Gewinnkoalition" verstanden werden soll [1].

Definition 1: Eine Teilmenge K von A heisst minimale Gewinnkoalition genau dann, wenn K, aber keine echte Teilmenge von K, Gewinnkoalition ist.

Es ist eine einfache Aufgabe, für die Schüler, in den verschiedenen Beispielen jeweils die minimalen Gewinnkoalitionen herauszusuchen. Im Beispiel 4 etwa ist dies nur $\{a\}$, also die Menge, deren einziges Element a ist.

Beobachtung 2: Wenn K eine Gewinnkoalition ist, so ist die komplementäre Koalition $\bar{K}$ eine "Verlustkoalition", keine Gewinnkoalition.

Unter den verschiedenen (äquivalenten) Vorschlägen zur Definition von "Verlustkoalition", von denen einige wieder auf die Stimmenzahl zurückgehen, wählen wir denjenigen Vorschlag aus, der den Begriff Verlustkoalition auf den inzwischen geläufig gewordenen Begriff "Gewinnkoalition" zurückführt:

Definition 2: K heisst Verlustkoalition genau dann, wenn $\bar{K}$ Gewinnkoalition ist.

Beobachtung 3: Es gibt Abstimmungsmengen, in denen Koalitionen vorkommen, die weder Gewinn- noch Verlustkoalitionen sind, z.B. $\{a,b\}$ in Beispiel 1 oder a in Beispiel 3. Solche Koalitionen "blockieren" die Entscheidung. Wir geben ihnen einen besonderen Namen:

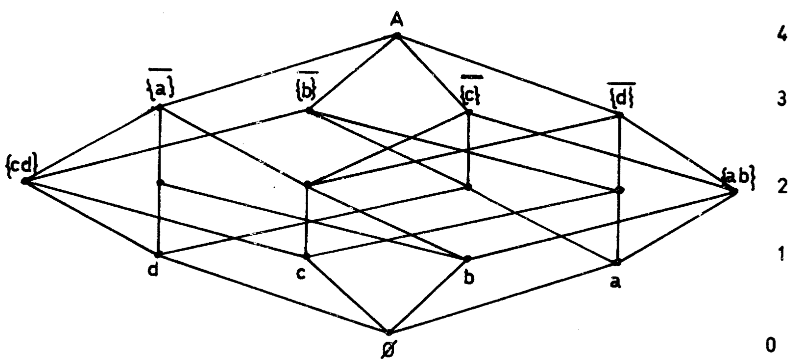
Definition 3: K heisst Blockkoalition genau dann, wenn K weder Gewinn- noch Verlustkoalition ist.

---

1) Es würde für diese Darstellung zu weit führen, hier schon verschiedene Schülervorschläge zu nennen und zu diskutieren. Wir haben weiter unten noch fruchtbarere Gelegenheiten, auf Definitions- und Präzisierungsübungen einzugehen. Es sei allerdings wenigstens hingewiesen auf die Bedeutung der Verwendung von "heisst" anstelle von "ist" und auf das "genau dann, wenn" etwa in der folgenden Definition, was im Unterricht bereits an Beispielen aus anderen Gebieten erörtert worden war. Ebenso möchte ich mich hier mit der Andeutung begnügen, dass den Schülern die Symbolsprache der mathematischen Logik bekannt war, so dass sich an die Definitionsübungen noch äusserst wichtige Formalisierungsübungen anschlossen, also Uebungen, die Definitionen (und später die Axiome und Sätze) in formalisierter Gestalt wiederzugeben.

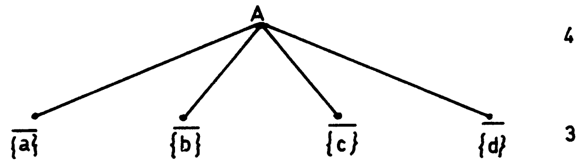
Die in Beobachtung 1 getroffene Feststellung, dass es zur Kenntnis der Struktur einer bestimmten Abstimmungsmenge offensichtlich genügt, die minimalen Gewinnkoalitionen zu kennen, wird noch einmal folgendermassen verdeutlicht: durch die Obermengen der minimalen Gewinnkoalitionen sind alle Gewinnkoalitionen gegeben, durch deren Komplemente alle Verlustkoalitionen und durch die übrigen Koalitionen die Blockkoalitionen. Die Schüler gewinnen so erstmals den Eindruck, dass es auf ein vorheriges Verteilen von Stimmen auf die Mitglieder einer Abstimmungsmenge garnicht ankommt. Insbesondere macht ja die Einführung eines ausschlaggebenden "Vorsitzenden" im Beispiel 2, deren Sinn für Abstimmungsfragen darin erkannt wird, das Auftreten von Blockkoalitionen wie in Beispiel 1 zu vermeiden, bereits von dieser Tatsache Gebrauch. Es wird die einfache Aufgabe gestellt, für Beispiel 2 eine Stimmenverteilung anzugeben, bei der genau die dort genannten minimalen Gewinnkoalitionen herauskommen. Offensichtlich ist die einfachste derartige Verteilung: 2,1,1,1 bei einfacher Mehrheit.

Es ist nützlich, für die verschiedenen Beispiele den Ausschnitt, den die Gewinnkoalitionen im vollen Teilmengenverband einer Abstimmungsmenge bilden, durch ein <u>Ordnungsdiagramm</u> (Hasse-Diagramm) darstellen zu lassen. Die Schüler gewinnen so einen tieferen Einblick in die mengentheoretische Struktur der Abstimmungsmengen. Ist $A = \{a,b,c,d\}$ wie in unseren obigen Beispielen, so stellt sich das volle Koalitionssystem von A folgendermassen dar:

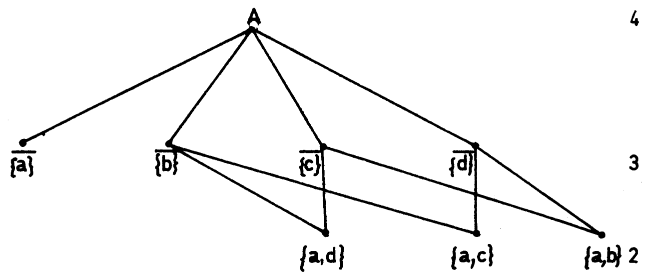


Für die Beispiele 1 und 2 erhalten wir dann die folgenden von den Gewinnkoalitionen gebildeten Ausschnitte:

Beispiel 1:



Beispiel 2:



Die nun sich stellende Frage nach dem <u>Zusammenhang zwischen dem Typ und der relativen Stimmenzahl einer Koalition</u> ergibt eine Thematik, die völlig selbständig von den Schülern bearbeitet wird. Es sei $\sigma(K)$ die Anzahl der Stimmen, die in K vereinigt sind. Die Anzahl aller Stimmen von A sei α, also $\sigma(A) = \alpha$. Die Schüler finden:

a) <u>bei einfacher Mehrheit</u>:

K ist Gewinnkoalition $\Longleftrightarrow \sigma(K) > \alpha/2$

K ist Verlustkoalition $\Longleftrightarrow \sigma(K) < \alpha/2$

K ist Blockkoalition $\Longleftrightarrow \sigma(K) = \alpha/2$

b) bei p/q-Mehrheit ($\frac{1}{2} < p/q \leq 1$):

K ist Gewinnkoalition $\Longleftrightarrow \sigma(K) > \alpha\, p/q$

K ist Verlustkoalition $\Longleftrightarrow \sigma(K) \leq \alpha(1 - p/q)$

K ist Blockkoalition $\Longleftrightarrow \alpha(1 - p/q) < \sigma(K) < \alpha\, p/q$

Die Bedeutung dieser Ergebnisse wird an verschiedenen Beispielen diskutiert. Besonders die Ergebnisse von b) sind für einige Schüler überraschend.

2. Analyse von Machtpositionen. Logische Durchdringung.

Die Beurteilung der Machtstellung, die einem Mitglied in einer Abstimmungsmenge zukommt, führte unter anderem zur

Beobachtung 4: Das Mitglied d hat im Beispiel 3 wie im Beispiel 4 keinerlei Einfluss auf die Entscheidung. d ist eine "machtlose Figur".

Die Betrachtung der zu den Beispielen 3 und 4 gehörenden Gewinnkoalitionen und das Auftreten von d in ihnen machte dann deutlich, worin die "Machtlosigkeit" von d begründet ist.

Definition 4: $x \in A$ heisst machtlose Figur genau dann, wenn x zu keiner minimalen Gewinnkoalition gehört.

Diese Definition eröffnet unerwartete Möglichkeiten. Offensichtlich waren wir in der Lage, machtpolitische Begriffe zu definieren. Das veranlasste uns, unmittelbar die Definition weiterer solcher Begriffe zu versuchen. Ich stellte zunächst die Aufgabe, zu definieren, was ein Diktator ist.

Den meisten Schülern war klar, dass diese Definitionsaufgabe im Rahmen des bereits entwickelten begrifflichen Systems zu behandeln war. Andere brachten jedoch Merkmale eines Diktators ins Spiel, die diesen Rahmen bei weitem überschritten. Es ist zur unterrichtlichen Verdeutlichung dessen, was Mathematisieren heisst, entscheidend, dass die Schüler erkennen, wie durch mathematische Ansätze im allgemeinen nur gewisse Ausschnitte und Teilaspekte einer Wirklichkeit erfasst werden. Hier war die Gelegenheit gegeben, in einem Klassengespräch solche fundamentalen methodologischen Fragen zu erörtern. Es würde hier zu weit führen, näher darauf einzugehen.

Nachdem wir uns entschieden hatten, die Versuche im bisher entwickelten begrifflichen Rahmen vorzunehmen und die damit gegebenen Beschränkungen in Kauf zu nehmen, kamen von den Schülern drei verschiedene Vorschläge [1], bei deren Anschrei-

1) Dieselben Vorschläge wurden interessanterweise auch von einer Gruppe von Mathematiklehrern auf einer Studienwoche

bung wir der Reihe nach für "x ist Diktator" setzen:

$D_1(x)$, $D_2(x)$, $D_3(x)$:

$D_1(x) \Longleftrightarrow_{df}$ Alle von x verschiedenen Elemente von A sind machtlose Figuren.

$D_2(x) \Longleftrightarrow_{df}$ x gehört zu jeder minimalen Gewinnkoalition.

$D_3(x) \Longleftrightarrow_{df}$ $\{x\}$ ist (einzige) minimale Gewinnkoalition.

Es erhebt sich die Frage, wie wir uns zu dem Nebeneinander von drei Definition zu stellen haben. Bei ihrer Analyse wurde folgendes klar: Definitionen sind nicht wahr oder falsch, können also nicht unter diesem Gesichtspunkt akzeptiert oder verworfen werden. Definitionen stellen höchstens eine Präzisierung einer bestimmten Intention in einem gewissen begrifflichen Rahmen dar oder - wie man in der Methodologie der exakten Wissenschaften auch sagt - eine Begriffsexplikation [1]. Dabei geht es dann nicht um Wahrheit, sondernum Adäquatheit der Definition. Es gilt, Kriterien für die Adäquatheit aufzustellen, die auf ein begriffliches System bezogen oder auch sehr allgemein sein können, so dass die Präzisierungsversuche innerhalb eines Systems möglicherweise schon deshalb verworfen werden müssen, weil das System zu eng ist [2]. Bei Beschränkung auf unseren begrifflichen Rahmen ergibt sich eine erste Beurteilungsgrundlage aus der Frage, ob nicht überhaupt alle drei Definitionen dasselbe besagen, also logisch äquivalent sind. Ist das der Fall, so wird man darin eine Bestätigung für die Adäquatheit sehen. Ist das nicht der Fall, so

---

gemacht, denen ich den hier dargelegten Unterrichtsversuch in einer dem Arbeitsunterricht der Schule verwandten Form entwickelt habe. Ebenso war es bei den Definitionsvorschlägen zum "Vetorecht", auf die ich noch eingehe.

1) Hierzu der Abschnitt "Ueber die Explikation von Begriffen" in: R. Carnap, Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit. Wien 1958. In unserem Beispiel handelt es sich nur angenähert um eine Explikation im Carnapschen Sinne.

2) Dies entspricht dem ersten von Carnap (loc. cit.) angegebenen Kriterium.

wird man - soweit nicht noch andere Kriterien ins Spiel kommen - derjenigen Definition mehr Gewicht geben, für die unter Berücksichtigung äquivalenter Formulierungen die Mehrzahl der "Fachleute" eintritt 1).

Wir hatten also zunächst einmal zu untersuchen, welche der drei Definitionen äquivalent sind. Einige Schüler behaupteten sogleich, dass $D_1(x) \Longleftrightarrow D_3(x)$, was zutrifft. Die Schüler lieferten selbst die entsprechenden Beweise. Dabei ist zu bemerken, dass sie von dieser Stelle des Unterrichtsgangs an eine ganz besondere Aktivität im Aufwerfen neuer Probleme und im Beweisen zeigten. Eine Anzahl von Beweisideen war freilich unbrauchbar. Ihre Kritik aber war lehrreich, weil sie jeweils unter starker Beteiligung der Klasse vorgenommen wurde. Die Schüler verfolgten die Probleme ausserhalb der Unterrichtsstunden intensiv weiter. Ich kann die Vielfalt der Vermutungen, Ueberlegungen, Vorschläge hier nicht wiedergeben, sondern beschränke mich auf die Darstellung solcher Beiträge, die hinsichtlich der zur Diskussion stehenden Sache zu neuen Einsichten führten.

<u>Beweis für</u> $D_1(x) \Longrightarrow D_3(x)$: Sind alle von x verschiedenen Elemente aus A machtlose Figuren, so ist $\{x\}$ die einzige Menge, die als minimale Gewinnkoalition in Frage kommt. Der Schüler schliesst weiter: Also ist $\{x\}$ (einzige) minimale Gewinnkoalition.

Hier ist von mir die Frage gestellt worden: "Gibt es denn in jedem Falle Gewinnkoalitionen?" Die Schüler entgegneten: "In einer vernünftigen Abstimmungsmenge ist das der Fall, z.B. immer dann, wenn überhaupt von 0 verschiedene Stimmenzahlen

---

1) Als "Fachleute" gelten im Unterricht natürlich alle Schüler der Klasse. Ein interessantes Beispiel für die Bestätigung der Adäquatheit durch die logische Uebereinstimmung verschiedener Präzisierungen ist die sog. Churchsche These, die sich auf die Präzisierung des Begriffs "Algorithmus" bezieht. Siehe hierzu H. Hermes: Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1961. Ferner D. Titgemeyer: Einführung in die Theorie der Kalküle und Algorithmen, Der Mathematikunterricht, 11. Jg. (1965), Heft 2, S. 5 ff.

vergeben sind." Wir konnten also festhalten als

Beobachtung 5: In einer Abstimmungsmenge gibt es wenigstens eine Gewinnkoalition.

Eine hierzu von einem Schüler gestellte Frage lautete: "Kann nicht eventuelle die leere Menge Gewinnkoalition sein?" Einige Schüler argumentierten von den Stimmenverteilungen aus. Ein Schüler schloss auf der Grundlage der bisherigen Beobachtungen: Wäre die leere Menge $\emptyset$ Gewinnkoalition, so auch A als Obermenge von $\emptyset$. Andererseits ist $A = \overline{\emptyset}$, also als Komplement einer Gewinnkoalition eine Verlustkoalition. Das kann nicht beides zugleich sein.

Es entstand das Problem, wie wir diese Einsicht festhalten sollten. Sicher war auch sie an allen Abstimmungsmengen als Beobachtung zu bestätigen. Andererseits aber hatten wir sie durch logisches Schliessen aus den bereits zusammengestellten Beobachtungen gewonnen. Die Schüler entschieden sich einmütig dafür, hier von einem Satz zu sprechen. Wir hatten damit also

Satz 1: Die leere Menge ist stets Verlustkoalition.

Beweise für $D_3(x) \Longrightarrow D_1(x)$: a) Ist $\{x\}$ einzige minimale Gewinnkoalition, so kann kein Element $a \neq x$ zu einer minimalen Gewinnkoalition gehören. b) Ist $\{x\}$ minimale Gewinnkoalition und gibt es ausser x noch Elemente $a_1,\ldots,a_k$ in A, so kann eine von $\{x\}$ verschiedene minimale Gewinnkoalition nicht auch x enthalten, muss also eine Teilmenge von $M = \{a_1,\ldots,a_k\}$ sein. M ist als Komplement von $\{x\}$ jedoch eine Verlustkoalition. Mit M sind aber auch alle Teilmengen von M Verlustkoalitionen. Die a_i können also zu keiner minimalen Gewinnkoalition gehören.

Es fällt auf, dass der Beweis b) nicht davon ausgeht, dass $\{x\}$ einzige minimale Gewinnkoalition ist. Vielmehr wird durch ihn gezeigt, dass, wenn $\{x\}$ minimale Gewinnkoalition ist, keine weitere minimale Gewinnkoalition existiert. Die Bemerkung "einzige" im Definienz von $D_3(x)$ kann also wegbleiben. Allerdings bleibt in b) noch etwas zu zeigen, was wir wiederum als Satz aussprechen:

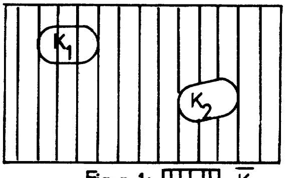
Satz 2: Mit jeder Teilmenge K von A sind auch alle Untermengen Verlustkoalitionen.

Beweis: Nach Definition 2 gilt: K ist Verlustkoalition genau dann, wenn $\overline{K}$ Gewinnkoalition ist. Wegen $K' \subseteq K \Longleftrightarrow \overline{K}' \supseteq \overline{K}$ und Beobachtung 1 ist mit K auch $K' \subseteq K$ Verlustkoalition.

Ein Schüler brachte dann noch einen direkten Beweis dafür, dass mit $\{x\}$ keine weitere Teilmenge minimale Gewinnkoalition sein kann. Durch diesen Beweis wurde ein anderer Schüler zur Formulierung einer etwas allgemeineren Feststellung gebracht:

Satz 3: Der Durchschnitt zweier Gewinnkoalitionen ist niemals leer.

Beweis: K_1 und K_2 seien Gewinnkoalitionen und es gelte $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Letzteres ist (nach Figur 1) gleichbedeutend mit $K_1 \subseteq \overline{K}_2$. Als Komplement einer Gewinnkoalition wäre K_2 dann Verlustkoalition, als Obermenge der Gewinnkoalition K_1 Gewinnkoalition. Widerspruch!



Figur 1: $\overline{K}_2$

Nach den vorangehenden Ueberlegungen war nun auch sofort klar, dass $D_3(x) \Longrightarrow D_2(x)$. Die Versuche $D_2(x) \Longrightarrow D_3(x)$ zu beweisen, scheiterten jedoch. Es gab eine Reihe von unbrauchbaren Ansätzen und falschen Beweisen zu analysieren, was insbesondere durch Betrachten von Gegenbeispielen geschah. Gegenbeispiele zeigten dann auch, dass $D_2(x) \Longrightarrow D_3(x)$ nicht zutrifft: Im Beispiel 3 etwa gilt $D_2(a)$, aber nicht $D_3(a)$. Es sind also nur $D_1(x)$ und $D_3(x)$ äquivalent. Wir entschieden uns, das Definiendum von $D_3(x)$ zur Definition für "x ist Diktator" zu wählen:

Definition 5: $x \in A$ heisst Diktator in A genau dann, wenn $\{x\}$ minimale Gewinnkoalition ist.

Die Entscheidung für diese Definition war umso einfacher, als $D_2(x)$ einen anderen Sachverhalt zu treffen schien, den einige Schüler mit "x hat Vetorecht" bezeichneten. Wir kommen darauf zurück. Zunächst war es wichtig, alle im Zusammenhang mit der Definitionsauswahl gewonnenen Einsichten festzuhalten. Die Feststellung, dass $D_1(x) \Longrightarrow D_3(x)$, ergab jetzt einen Satz:

Satz 4: x ist genau dann Diktator in A, wenn alle von x verschiedenen Elemente in A machtlose Figuren sind.

Ferner hat Satz 3 unmittelbar zur Folge

Satz 5: In einer Abstimmungsmenge gibt es höchstens einen Diktator.

Es ist bemerkenswert, wie einzelne Schüler auf die Aufforderung, diesen Satz zu beweisen, reagierten. So meinten sie, das sei doch selbstverständlich und brauche nicht bewiesen zu werden; es wäre doch unmöglich, dass zwei Diktatoren in derselben Abstimmungsmenge wären.

Hier galt es erneut, grundsätzliche methodologische Fragen zu klären. Jene Schüler argumentierten offensichtlich von ihren inhaltlichen Vorstellungen von "Diktator", also vom Explikandum und nicht vom Explikans aus. Im Rahmen einer Theorie, wie wir sie entwickeln, müssen solche Aussagen aber unter Verwendung des Explikans bewiesen werden. Die Bedeutung der Bemerkung "das ist doch selbstverständlich", liegt dann in ihrem Bestätigungscharakter für die Adäquatheit der Definition. Dies konnte in Parallele gesetzt werden zu einem anderen Unterrichtsgebiet. Auch die etwa mit Hilfe von Folgenkonvergenz im Unterricht gegebene Definition der Stetigkeit einer Funktion (an einer Stelle und in einem Intervall) ist eine Begriffsexplikation. Aus bestimmten Gründen verwendet man dabei nicht die intuitiv naheliegende Zwischenwerteigenschaft. Diese wird erst später (unter Verwendung der Vollständigkeit der reellen Zahlen) für stetige Funktionen bewiesen. Wäre sie nicht beweisbar, so würde man allerdings die Stetigkeitsdefinition als nicht adäquat verwerfen müssen, ebenso wie unsere Definition von Diktator zu verwerfen wäre, wenn Satz 4 nicht gälte.

Als nächstes wurde jetzt die Aufgabe gestellt, "x hat Vetorecht" zu definieren, wozu insbesondere $D_2(x)$ Anlass gab. Aus der Klasse kamen wiederum drei Vorschläge:

$V_1(x) \Longleftrightarrow_{df}$ x gehört zu jeder minimalen Gewinnkoalition.

$V_2(x) \Longleftrightarrow_{df}$ x gehört zu keiner Verlustkoalition.

$V_3(x) \Longleftrightarrow_{df}$ $\{x\}$ ist Blockkoalition

Alle Schüler waren zunächst von der Gleichwertigkeit der drei Definitionen überzeugt. Der Aequivalenzbeweis zu V_1 und V_2 war einfach.

Beweis für $V_1(x) \Longleftrightarrow V_2(x)$: Zunächst ist klar, dass $V_1(x)$ gleichbedeutend damit ist, dass x zu jeder Gewinnkoalition gehört. Nun ist aber $x \in K \Longleftrightarrow x \notin \overline{K}$, was nach Beobachtung 2 unmittelbar die Aequivalenzaussage bedeutet.

Beweis für $V_3(x) \Longrightarrow V_1(x)$: Ist $\{x\}$ Blockkoalition, so auch $\overline{\{x\}}$ (nach Definition 3). Gäbe es nun eine Gewinnkoalition K ohne x, so wäre $K \subseteq \overline{\{x\}}$, also $\overline{\{x\}}$ eine Gewinnkoalition. Widerspruch!

Ausserordentlich eifrig war das Bemühen der Schüler, eine Ableitung für $V_1(x) \Longrightarrow V_3(x)$ zu finden. Keiner der Schüler sah sogleich das Gegenbeispiel, das jeder Diktator bildet, insbesondere also a in Beispiel 5. Es gilt hier $V_1(a)$, aber nicht $V_3(a)$. Der Beweisversuch eines Schülers führte jedoch voran:

Beweisversuch für $V_1(x) \Longrightarrow V_3(x)$: Angenommen, x gehört zu jeder minimalen Gewinnkoalition und $\{x\}$ ist keine Blockkoalition. Dann ist $\{x\}$ Gewinn- oder Verlustkoalition. Im zweiten Falle wäre $\overline{\{x\}}$ Gewinnkoalition, was aber im Widerspruch dazu steht, dass x zu jeder Gewinnkoalition gehört. Der erste Fall - so merkte der Schüler - lässt sich nicht allgemein widerlegen. Ist x Diktator, so $\{x\}$ Gewinnkoalition. Die interessante Einsicht brach sich durch: $V_1(x)$ und $V_2(x)$ sind dann und nur dann äquivalent, wenn es in A keinen Diktator gibt.

Die Erörterung dieser Situation führe zur Einführung zweier Begriffe von Vetorecht. Einige Schüler traten dafür ein, dass das Vetorecht keinem Diktator zukommen könne; es setze wenigstens eine "halbdemokratische Struktur" voraus. Wir entschieden uns demgemäss, der Definition $V_3(x)$ die erste Stelle zu geben:

Definition 6: $x \in A$ hat Veto$_1$-Recht in A genau dann, wenn $\{x\}$ Blockkoalition ist.

Definition 7: $x \in A$ hat Veto$_2$-Recht in A genau dann, wenn x zu jeder Gewinnkoalition von A gehört.

Wir haben sodann den

Satz 6: Genau dann, wenn es in A keinen Diktator gibt, sind Veto$_1$- und Veto$_2$-Recht äquivalent.

Ein erster Rückblick auf die Entwicklung unserer Ueberlegungen zeigte, dass wir in überraschendem Ausmass unabhängig von der Verteilung von Stimmen auf die Mitglieder einer Abstimmungsmenge waren, dass wir ohne Bezug auf Stimmenverteilungen definitorisch und beweisend vorgehen konnten. In diesem Zusammenhang stellte ein Schüler die Frage, ob es möglich sei, die Funktion eines ausschlaggebenden Vorsitzenden bei Abstimmungen genau zu definieren, möglichst ohne dabei auf Stimmen zurückzugreifen.

Vorbild zur Orientierung war das Beispiel 2. Unter Verwendung von Stimmen liess es sich nach Vorschlag von Schülern folgendermassen verallgemeinern: A habe 2n Mitglieder ($n > 1$). Haben dann alle von $x \in A$ verschiedenen Mitglieder $k > 0$ Stimmen, während x selbst $k+1$ Stimmen hat, so werden wir bei Gültigkeit des einfachen Mehrheitsprinzips sagen, dass x ausschlaggebender Vorsitzender in A ist.

Betrachten wir hierzu nun die minimalen Gewinnkoalitionen, so gehören von den $(n+1)$-elementigen Teilmengen genau diejenigen dazu, die x nicht enthalten, von den n-elementigen genau diejenigen, die x enthalten. Dies wurde zum Definiendum erhoben unter Beachtung der Tatsache, dass damit schon alle minimalen Gewinnkoalitionen festgelegt sind:

Definition 8: $x \in A$ heisst genau dann ausschlaggebender Vorsitzender in A, wenn es 2n (mit $n > 1$) Elemente in A gibt und von den n-elementigen Teilmengen genau diejenigen, die x enthalten, und von den $(n+1)$-elementigen Teilmengen genau diejenigen, die x nicht enthalten, die minimalen Gewinnkoalitionen bilden [1].

Als einfach zu beweisende Sätze wurden festgehalten:

Satz 7: Ein Vorsitzender ist kein Diktator.

Satz 8: Ein Vorsitzender hat weder Veto_1- noch Veto_2-Recht.

Satz 9: In einer Abstimmungsmenge gibt es höchstens einen Vorsitzenden.

Von den weiteren Diskussionen gebe ich noch die folgende an. Eine Schülergruppe war auf die Frage gestossen, ob es eine Blockkoalition aus lauter machtlosen Figuren geben könne. Das ist nicht der Fall. Wir haben den

Satz 10: Eine Blockkoalition kann nicht nur aus machtlosen Figuren bestehen.

Beweis: Ist K Blockkoalition, so ist K von $\emptyset$ und A verschieden. Sind nun alle Elemente von K machtlose Figuren, so sind alle minimalen Gewinnkoalitionen Teilmengen von $\overline{K}$. Also wäre $\overline{K}$ Gewinnkoalition, während es als Komplement von K Blockkoalition ist. Widerspruch!

Anstelle dieses Beweises wurde von einem Schüler zunächst anders argumentiert: Sei $K = \{a_1,\ldots,a_k\}$ eine Blockkoalition aus lauter machtlosen Figuren. Dann kann $A = K \cup \overline{K}$ keine Gewinnkoalition sein, sonst gäbe es eine minimale Gewinnkoalition $\overline{K} \cup T$ mit $T \subseteq K$ und $T \neq \emptyset$, die machtlose Figuren als Mitglieder hätte. Der Schüler benutzte hier als Argument, dass jede Blockkoalition in einer minimalen Gewinnkoalition enthalten sei. Dieser Auffassung waren viele Schüler. Beispiel 3 zeigt aber, dass das nicht zutrifft: $\{a,d\}$ ist dort eine Blockkoalition und nicht Teilmenge der einzigen minimalen Gewinnkoalition $\{a,b,c\}$.

3. Axiomatisierung

Eine Zusammenstellung der im Rahmen unserer Theorie entwickelten Definitionen und Sätze und die nochmalige Durchsicht der verwendeten Definitions- und Beweismittel zeigte,

---

1) Es wurde klargestellt, dass der Begriff des ausschlaggebenden "Vorsitzenden" auch in einem weiteren Sinne gebraucht werden könnte.

dass wir als Voraussetzungen zum Aufbau der Theorie nicht mehr benötigten, als in den Beobachtungen 1, 2 und 5 ausgedrückt wird. Alles andere liess sich daraus mit Hilfe einfacher logischer und mengentheoretischer Methoden gewinnen.

Nun hatten wir anfangs eine sehr ungenaue Definition des die gesamte Theorie bezeichnenden Begriffs "Abstimmungsmenge" gegeben. Wir hatten eine Menge A (von Menschen) eine Abstimmungsmenge genannt, wenn in A bestimmte Verhältnisse gegeben sind. Diese "Verhältnisse" geben der Menge eine gewisse Struktur. Es galt, diese Struktur genauer zu kennzeichnen.

Eine solche Kennzeichnung konnte zunächst mit Hilfe von Stimmenverteilungen erfolgen. Dabei liess sich der Begriff "Stimmenverteilung" auf einer nichtleeren endlichen Menge **A** als Abbildung s der Menge A in die Menge $\mathbf{N}_0$ aller natürlichen Zahlen mitsamt der 0 verstehen:

$$s : A \longrightarrow \mathbf{N}_0 .$$

Mit $a_i \in A$ ist dann $s(a_i)$ die Anzahl der Stimmen, die auf a_i entfallen. Also ist

$$\sigma(K) = \sum_{a_i \in K} s(a_i)$$

Wir hatten uns bereits klar gemacht, dass $\sigma(a) > 0$ sein muss. Das ist gleichbedeutend damit, dass wir die konstante 0-Abbildung nicht zu den Stimmenverteilungen rechnen. Damit ist eine Abstimmungsmenge noch nicht genau bestimmt. Es muss ausser s auch der Mehrheitsquotient p/q mit $\frac{1}{2} \leq p/q \leq 1$ gegeben sein. Eine Abstimmungsmenge ist danach ein Tripel $(A, s, \frac{p}{q})$, bestehend aus einer nichtleeren endlichen Menge A, einer von der überall nullwertigen verschiedenen Abbildung $s: A \longrightarrow \mathbf{N}_0$ und einer rationalen Zahl p/q mit $\frac{1}{2} \leq p/q \leq 1$.

Eine derartige Analyse war mit den Schülern im einzelnen durchzuführen. Der dabei zu verdeutlichende Begriff der strukturierten Menge ist für das heutige Mathematikverständnis fundamental. Er war im Unterricht schon in anderen Zusammenhängen aufgetreten, etwa bei der Einführung der Begriffe Gruppe, Ring, Körper, denen der Begriff des einfachen bzw. zweifachen Verknüpfungsgebildes zugrundeliegt. Verknüpfungsgebilde sind ebenso wie die Abstimmungsmengen im obigen Sinne nicht nur nackte Mengen M, sondern Mengen mit einer Struktur, hier Paare (M,∇) bzw. Tripel (M,∇_1,∇_2) worin ∇, ∇_1, ∇_2 innere Verknüpfungen in M sind und die Struktur in M ausmachen [1].

In einer eigenartigen Diskrepanz zur so gewonnenen ersten genaueren Definition des Begriffs "Abstimmungsmenge" stand nun aber die Tatsache, dass wir die Theorie der Abstimmungsmengen weitgehend unabhängig von den Daten s und p/q, nämlich allein mit Hilfe des Begriffs der Gewinnkoalition, aufbauen konnten. Die Schüler suchten demgemäss wie schon vorher bei den Begriffen innerhalb der Theorie nach einer stimmenfreien Definition des die Theorie umfassenden Begriffs. Dabei wurde bald klar: Während wir sonst auf den Begriff der Gewinnkoalition und daraus abgeleitete Begriffe zurückgehen konnten, stand dieser Begriff nun selbst zur Diskussion. Waren s und p/q in einer Menge A gegeben, so war festgelegt, was Gewinnkoalitionen in A sind. Wie sollte solch eine Festlegung aber allgemein ohne s und p/q vorgenommen werden?

Hier halfen Beispiele wie 2 oder das unten noch näher betrachtete Beispiel des Sicherheitsrates der Vereinten Nationen weiter. Im Sicherheitsrat sind gewisse Teilmengen als Gewinnkoalitionen ausgezeichnet, ohne dass überhaupt von Stimmenzahlen die Rede ist. Es genügt anscheinend, gewisse Teilmengen in A direkt als Gewinnkoalitionen auszuzeichnen. Allerdings darf eine solche Auszeichnung nicht willkürlich sein, z.B. darf man nicht eine Teilmenge K und zugleich ihr Komplement $\overline{K}$ zu den Gewinnkoalitionen rechnen. Der richtige Gebrauch wird offensichtlich durch unsere obigen Beobachtungen geregelt. Schlagartig brach bei einigen Schülern die Erkenntnis durch, dass wir auf eine nähere Definition des Begriffs

---

1) Hierzu meine Aufsätze: (1) Zur Didaktik der elementaren Gruppentheorie I. Der Mathematikunterricht 11. Jg.(1965), Heft 1, (2) Einfache Verknüpfungsgebilde als Vorfeld der Gruppentheorie. Der Mathematikunterricht 12. Jg. (1966).

"Gewinnkoalition" verzichten können, wenn wir beachten, dass als Bedingungen erfüllt ist, was in den Beobachtungen 1,2 und 5 über Gewinnkoalitionen ausgesagt wird. Damit ergab sich die folgende axiomatische Fundierung unserer Theorie:

Eine nichtleere endliche Menge A, in der ein nichtleeres System $\mathfrak{G}$ von Teilmengen, genannt Gewinnkoalitionen, ausgezeichnet ist (genauer: das Paar (A, $\mathfrak{G}$)), heisst Abstimmungsmenge genau dann, wenn folgendes gilt:

(I) $K \in \mathfrak{G} \wedge L \supseteq K \Longrightarrow L \in \mathfrak{G}$

(II) $K \in \mathfrak{G} \Longrightarrow \bar{K} \notin \mathfrak{G}$

Die Beobachtung 5 wird dabei schon in der einleitenden Forderung, dass $\mathfrak{G}$ nicht leer sein darf, berücksichtigt. Die Axiome (I) und (II) entsprechen genau den Beobachtungen 1 und 2. Zu den methodologischen Erörterungen, die sich an den jetzt vollzogenen Umschlag zur axiomatischen Einstellung und Darstellung anschlossen, gebe ich nur einige Hinweise: Der Begriff der Gewinnkoalition ist (undefinierter) Grundbegriff. Einer einzelnen Menge kann man nicht ansehen, ob sie Gewinnkoalition ist. Vielmehr kann bei passend gewählter Grundmenge A jede nichtleere endliche Menge Gewinnkoalition sein. Demgegenüber ist der Begriff "Abstimmungsmenge" vollständig definiert. Erst hinsichtlich einer bestimmten Abstimmungsmenge ist genau festgelegt, was "Gewinnkoalition" bedeutet. Diese eigenartige logische Stellung der Grundbegriffe wird häufig durch die Bemerkung "implizit definiert" gekennzeichnet. Relativ zu den Grundbegriffen erscheinen demgegenüber alle anderen Begriffe der Theorie als "explizit definiert"; absolut sind sie ebenso undefiniert wie die Grundbegriffe. Unser Axiomensystem ist widerspruchsfrei und unabhängig, wie entsprechende Beispiele von Abstimmungsmengen und Mengen mit Teilmengensystemen zeigen, in denen (I) bzw. (II) nicht erfüllt ist.

Ein besonders interessantes Problem war die Klärung der Beziehungen zwischen den beiden Definitionen, die wir für den Begriff "Abstimmungsmenge" gegeben hatten. Zur genaueren Unterscheidung bezeichneten wir die (A, s, p/q) als "s-gebundene Abstimmungsmengen" und die $(A, \mathfrak{G})$ als "s-freie Abstimmungsmengen". Es war klar, dass durch s und p/q in A stets ein System $\mathfrak{G}(s, p/q)$ bestimmt ist derart, dass $(A, \mathfrak{G}(s, p/q))$ eine s-freie Abstimmungsmenge ist. Dabei können - wie einfache Beispiele zeigen - verschiedene s-gebundene Abstimmungsmengen auf dieselbe s-freie Abstimmungsmenge führen. Ausschlaggebend für alle Abstimmungsangelegenheiten sind allein die jeweiligen s-freien Abstimmungsmengen. Andererseits wird in der Praxis meistens mit s und p/q gearbeitet. Das führte auf die von einem Schüler aufgeworfene entscheidende Frage: Gibt es zu jeder s-freien Abstimmungsmenge $(A, \mathfrak{G})$ eine Stimmenverteilung s und einen Mehrheitsquotienten p/q derart, dass $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(s, p/q)$?

Ist diese Frage zu verneinen, so wird daran deutlich, dass die begrifflich-axiomatische Methode weiter reicht als die konkret-numerische Methode. Die Schüler konnten die Frage nicht entscheiden. Ich werde abschliessend zeigen, dass sie tatsächlich zu verneinen ist. Das entsprechende Beispiel ist so einfach, dass es unmittelbar im Unterricht vorgeführt werden konnte.

Es möge noch erwähnt werden, dass die Schüler in diesem Stadium der Untersuchung die Hausaufgabe erhielten, eine vollständige Deduktion aller bisherigen Resultate aus dem Axiomensystem vorzunehmen und dabei die Definitionen und Sätze möglichst vorteilhaft anzuordnen, wobei nötigenfalls neue Beweise zu finden waren. Hierbei wurde von einigen Schülern der Einfluss des Dualitätsprinzips der Mengenalgebra auf unsere Theorie entdeckt: Schon in den Axiomen konnten an die Stelle der Gewinnkoalitionen die Verlustkoalitionen treten, wenn man $\subseteq$ durch $\supseteq$ ersetzte und umgekehrt. Der Satz 2 ist gerade die Dualisierung des Axioms (I) [1]. Bei der Dualisierung hat fer-

---

1) Nachdem ich über den hier dargelegten Unterricht auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1965 in Freiburg vorgetragen habe, machte mich Herr A. Kirsch in einem Brief darauf aufmerksam, dass unser obiges Axiomensystem auch in folgender Weise ersetzt werden kann: Man nehme anstelle von $\mathfrak{G}$ eine Abbildung f der Potenzmenge $\mathfrak{P}$ A auf $\{0,1\}$, wobei als einziges Axiom zu gelten hat:

ner der Durchschnitt an die Stelle der Vereinigung und die leere Menge an die Stelle von A und umgekehrt zu treten [1]. So werden als Dualisierungen zu Satz 1 und Satz 3 (hier in Fortführung unserer Satznumerierung) formuliert:

Satz 11: A ist stets Gewinnkoalition.

Satz 12: Die Vereinigung zweier Verlustkoalitionen ist stets von A verschieden.

Die Schüler lernten jetzt in dem bescheidenen Rahmen, in dem sich der Unterricht bewegte, nach dem Stadium der Entwicklung einer Theorie das Stadium der systematischen Darstellung mit seinen spezifischen Aufgaben und Schwierigkeiten kennen.

4. s-freie Abstimmungsmengen und Stimmenverteilungen

Ich gehe abschliessend auf das Problem ein, zu vorgegebenen s-freien Abstimmungsmengen $(A, \mathfrak{G})$ eine Stimmenverteilung s und einen Mehrheitsquotienten p/q anzugeben, derart, dass $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(s, p/q)$ in A. Entsprechende Aufgaben ergaben sich vor allem in Verbindung mit der Behandlung der Abstimmungsstruktur des Sicherheitsrates der Vereinten Nationen. Dieses Beispiel wurde erstmals innerhalb einer Klassenarbeit eingeführt. Die zugehörige Aufgabe lautete:

"Der Sicherheitsrat der Vereinten Nationen besteht aus den 5 ständigen Mitgliedern, genannt die grossen Fünf, und 6 (wechselnden) Vertretern kleinerer Nationen, genannt die kleinen Sechs. Es sei F = $f_1, f_2, \ldots, f_5$ die Menge der grossen Fünf, S = $s_1, s_2, \ldots, s_6$ die Menge der kleinen Sechs. Die minimalen Gewinnkoalitionen sind die Mengen

---

(I^*) $K, L \in \mathfrak{P}A \wedge K \cap L = \emptyset \Longrightarrow f(K) + f(L) \leq f(K \cup L)$. Mit $\mathfrak{G} = \{K \in \mathfrak{P}A;\ f(K) = 1\}$ ist dann (I), (II) erfüllt, während umgekehrt jedes $\mathfrak{G}$ mit (I), (II) gemäss $f(K) = \begin{cases} 1 & \text{falls } K \in \mathfrak{G} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ zu einem f führt, das (I^*) erfüllt.

1) Zum Dualitätsprinzip der Mengenalgebra siehe: H. Griesel: Elementare Mengenlehre und Klassenlogik auf dem Schulniveau. Der Mathematik Unterricht 1959, Heft 4 (logische Probleme I)

$$F \cup \{s_i, s_j\}, \quad i \neq j .$$

a) Wie gross ist die Anzahl aller möglichen Koalitionen, aller minimalen Gewinnkoalitionen, aller Verlustkoalitionen, aller Blockkoalitionen? Gibt es Mitglieder mit Veto_1-Recht? Welche? Gibt es machtlose Figuren?
b) Ist es möglich, eine Stimmenverteilung s festzulegen, bei der sich mit $p/q = \frac{1}{2}$ genau die angegebenen minimalen Gewinnkoalitionen ergeben? Ist dies bei einem anderen p/q möglich?"

Die Antworten auf die Fragen in a) sind leicht zu finden: die Anzahl aller Koalitionen ist die Kardinalzahl der Potenzmenge von $A = F \cup S$, also $2^{11} = 2048$. Es gibt

$\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \ldots + \binom{6}{6} = 2^6 - 7 = 57$ Gewinnkoalitionen, darunter sind $\binom{6}{2} = 15$ minimal. Die Anzahl der Verlustkoalitionen ist so gross wie die Anzahl der Gewinnkoalitionen, also 57, so dass 1934 Blockkoalitionen vorliegen. Veto_1-Recht haben genau die f_i. Es gibt keine machtlosen Figuren.

Wie die Fragen von a) so wurde auch die erste Frage von b) von den meisten Schülern richtig beantwortet. Das geschah etwa in folgender Weise: Es kann keine Stimmenverteilung s der gefragten Art mit $p/q = \frac{1}{2}$ geben. Für eine Blockkoalition K müsste dann nämlich $\sigma(K) = \alpha/2$ mit $\alpha = \sigma(A)$ gelten. Nun sind $\{f_1\}$, $\{f_2\}$, $\{f_3\}$ Blockkoalitionen, also $\sigma(\{f_1\}) = \sigma(\{f_2\}) = \sigma(\{f_3\}) = \alpha/2$, also $\sigma(\{f_1, f_2, f_3\}) = \frac{3}{2}\alpha > \sigma(A)$, was nicht sein kann.

Mit der zweiten Frage von b) waren nur wenige Schüler fertig geworden. Drei von vierzehn Schülern gaben als Verteilung an:
$s(f_i) = 5$, $s(s_j) = 1$, also $\sigma(A) = 31$ und $p/q = 27/31$. Dazu wurden unter anderem folgende Argumente aufgeführt:
Die s_i und die f_i sind unter sich ihrer Machtposition nach gleichwertig, erhalten also jeweils gleichviele Stimmen. Da die s_i nicht machtlos sind, erhalten sie wenigstens je 1 Stimme. Die Macht der f_i ist grösser, also muss ihre Stimmenzahl grösser sein. Ferner kann in einer minimalen Gewinnkoalition ein f_i nicht durch die nicht in ihr enthaltenen 4

Mitglieder von S ersetzt werden, ohne dass die Koalition die Eigenschaft verliert, Gewinnkoalition zu sein. Also muss $s(f_i) > 4$ sein. Mit $s(f_i) = 5$ erhalten wir bei $p/q = 27/31$ eine geeignete Verteilung.

Im Unterricht wurde dann allgemein das Problem diskutiert Gesichtspunkte zur Aufstellung von Stimmenverteilungen zu vorgegebenen s-freien Abstimmungsmengen anzugeben. Das war keine leichte Aufgabe. Immerhin führte die Analyse von Beispielen, insbesondere des Sicherheitsrats, zu einigen partiell brauchbaren Begriffen und Regeln.

Zunächst wurde versucht, zu präzisieren, wann Mitglieder a_i, a_j einer Abstimmungsmenge gleichmächtig heissen sollten und wann auf sie die Relation "ist weniger mächtig als" zutreffen sollte. Diesen Relationen gemäss, für die wir die Zeichen "$\sim$" bzw. "$\prec$" verwendeten, sollte dann die Stimmenverteilung vorgenommen werden, nämlich unter Beachtung der Regeln:

(S_1) $\quad a_i \sim a_j \implies s(a_i) = s(a_j)$,

(S_2) $\quad a_i \prec a_j \implies s(a_i) < s(a_j)$.

Die Schüler schlugen vor, wie bei der Definition der Machtpositionen Diktator, Veto_2-Recht, machtlose Figur von den minimalen Gewinnkoalitionen auszugehen und die relative Anzahl der minimalen Gewinnkoalitionen, deren Mitglied a_i ist, direkt als Mass für die Macht von a_i zu verwenden. Ist $m(a_i)$ die Anzahl der minimalen Gewinnkoalitionen mit a_i und μ die Anzahl der minimalen Gewinnkoalitionen überhaupt, so sollte $\frac{m(a_i)}{\mu}$ dieses Mass sein. Genau die machtlosen Figuren hatten dann die Macht 0, während genau die Mitglieder mit Veto_2-Recht, also insbesondere die Diktatoren, die Macht 1 hatten. Für unsere Zwecke erwies sich dieser Massbegriff jedoch als ungeeignet. Im Beispiel 4 hatten sowohl b als auch c und d die Macht $\frac{1}{2}$. Sie wären danach als "gleichmächtig" anzusehen, also nach (S_1) mit derselben Stimmenzahl auszustatten. Eine derartige Stimmenverteilung kann aber niemals zu einer s-gebundenen Abstimmungsmenge führen, in der $\{a,b\}$ und $\{a,c,d\}$

die minimalen Gewinnkoalitionen sind [1].

Es lag nun nahe, statt der minimalen Gewinnkoalitionen jeweils alle Gewinnkoalitionen zu betrachten, in denen a_i liegt. Während ein entsprechendes mit der Anzahl $g(a_i)$ aller a_i enthaltender Gewinnkoalitionen gebildetes Machtmass den Schülern unpassend erschien, weil jetzt auch den machtlosen Figuren eine von 0 verschiedene Macht zugesprochen werden musste, wurde, ohne die Einführung eines Machtmasses, folgender Definitionsvorschlag gemacht:

$$a_i \sim_1 a_j \iff_{df} g(a_i) = g(a_j)$$

$$a_i \prec a_j \iff_{df} g(a_i) < g(a_j)$$

Daneben brachte ein Schüler eine am Beispiel des Sicherheitsrates erprobte zweite Definition für $\sim$ ins Spiel, die wir durch die Verwendung der Zeichen $\sim_1$ und $\sim_2$ von der ersten absetzten:

$a_i \sim_2 a_j \iff_{df}$ Jede Gewinnkoalition, zu der a_i gehört, geht nach Vertauschen von a_i mit a_j wieder in eine Gewinnkoalition über.

Es konnte von den Schülern sofort gezeigt werden, dass $\sim_1$ und $\sim_2$ Aequivalenzrelationen sind. Ferner war klar, dass $a_i \sim_1 a_j$ aus $a_i \sim_2 a_j$ folgt. Dagegen war für die Schüler lange offen, ob auch $a_i \sim_1 a_j \Longrightarrow a_i \sim_2 a_j$ gilt, was tatsächlich nicht zutrifft. Sodann konnte ohne Schwierigkeiten erkannt werden, dass $\sim_1$ und $\sim_2$ mit $\prec$ verträglich sind, d.h. dass gilt:

$$a_i \sim a_j \wedge a_k \sim a_m \wedge a_i \prec a_k \Longrightarrow a_j \prec a_m.$$

Während aus $a_i \not\sim_1 a_j$ unmittelbar auf $a_i \prec a_j \vee a_j \prec a_i$ geschlos-

---

1) Es möge erwähnt werden, dass die Schüler zur Kennzeichnung der Macht eines Mitgliedes einer Abstimmungsmenge noch weitere Vorschläge machten, die wir hier nicht diskutieren wollen. In s-gebundenen Abstimmungsmengen wurde unter anderem die Zahl $s(a_i)/\alpha$ erörtert, aber als schlechtes Mass verworfen. Sodann wurde als Massgrundlage die Anzahl genommen, wie oft jemand "Zünglein an der Waage" ("Pivot") ist. Siehe hierzu auch: Kemeny, Snell, Thomson loc. cit.

sen werden konnte, gelang es den Schülern nicht, das Entsprechende für $a_i \not\sim_2 a_j$ zu entscheiden. Dies hängt mit der obigen "offenen Frage" zusammen [1].

Selbstverständlich reichten die Regeln (S_1) und (S_2) bei weitem nicht aus, verhältnismässig schnell zu einer geeigneten Stimmenverteilung zu gelangen. Insbesondere das Beispiel des Sicherheitsrates zeigte, dass mehr zu beachten war. Die oben bereits erörterten Gesichtspunkte führten unter anderem noch zu der Regel:

(S_3) Ist v die maximale Stimmenzahl der Verlustkoalitionen, so setze man für alle a_i, die in allen minimalen Gewinnkoalitionen liegen, $s(a_i) > v$.

Sodann erschien es als selbstverständlich, folgendes zu vereinbaren:

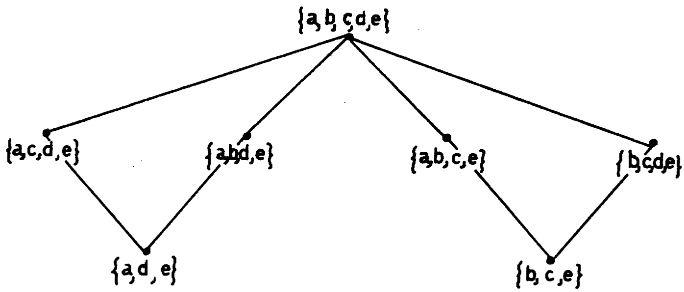
(S_4) Machtlose Figuren erhalten die Stimmenzahl 0. Gleichmächtige Elemente, die keine machtlose Figuren sind und weniger mächtig sind als alle übrigen nicht machtlosen Figuren erhalten die Stimmenzahl 1.

Die Brauchbarkeit unserer Regeln prüften wir ausser am Beispiel des Sicherheitsrates insbesondere an den einleitend betrachteten Beispielen, wobei wir jetzt von den zugehörigen Gewinnkoalitionen ausgingen. In allen diesen Beispielen stimmt - wie man sofort bestätigt - $\sim_1$ mit $\sim_2$ überein. Beispiel 1 führt unmittelbar zu $s(a) = s(b) = s(c) = s(d) = 1$ bei einfacher Mehrheit. Im Beispiel 2 ist $b \sim c \sim d$ und $b,c,d \prec a$. Wir erhalten bei einfacher Mehrheit $s(a) = 2$, $s(b)=s(c)=s(d)=1$. Im Beispiel 3 ist $c \sim d \prec b \prec a$. Mit $s(c)=s(d)=1$, $s(b)=2$ und $s(a)=3$ gewinnen wir bei $p/q = 5/7$ eine geeignete Verteilung. Im Beispiel 4 ist d machtlos, während $a \sim b \sim c$. Mit $s(d)=0$ und $s(a)=s(b)=s(c)=1$ ist dann bei $p/q = 2/3$ das gewünschte Ziel erreicht. Für das Beispiel 4 wählen wir einfach

1) Hier war Gelegenheit, auf die Unterscheidung von klassifikatorischen, komparativen und quantitativen Begriffen einzugehen. Siehe hierzu: R. Carnap loc. cit.

$s(b) = s(c) = s(d) = 0$ und $s(a) = 1$. Dies ist dann die gesuchte Verteilung bei einfacher Mehrheit. In Beispiel 5 haben wir $s(a_i) = 1$ zu setzen bei $p/q = 1$.

Abschliessend soll nun ein Beispiel angegeben werden, welches zeigt, dass nicht zu jeder s-freien Abstimmungsmenge $(A, \mathfrak{G})$ eine Stimmenverteilung s und ein Mehrheitsquotient p/q mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(s, p/q)$ existiert, dass es also insbesondere unmöglich ist, unsere Regeln so zu vervollständigen, dass sie in jedem Falle zum Ziele führen. Dazu betrachten wir die fünfelementige Menge $A = \{a,b,c,d,e\}$ mit den minimalen Gewinnkoalitionen $\{a,d,e\}$ und $\{b,c,e\}$, also folgendem Hasse-Diagramm der Gewinnkoalitionen :



Man überzeugt sich sofort, dass durch $(A, \mathfrak{G})$ die obigen Axiome für eine s-freie Abstimmungsmenge erfüllt sind. Wir nehmen nun an, es gäbe s und p/q, so dass $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(s, p/q)$. Mit $p/q = \varepsilon > \frac{1}{2}$ bzw. $p/q = \frac{1}{2}$ und $\sigma(A) = \alpha$ wäre dann – da $\{a,d,e\}$ und $\{b,c,e\}$ Gewinnkoalitionen sind – ,

$s(a) + s(d) + s(e) \geqslant \varepsilon\alpha \qquad$ (bzw. $> \alpha/2$)

$s(b) + s(c) + s(e) \geqslant \varepsilon\alpha \qquad$ (bzw. $> \alpha/2$)

Also:

$s(a) + s(b) + s(c) + s(d) + 2s(e) \geqslant 2\,\varepsilon\alpha \qquad$ (bzw. $> \alpha$)

Andererseits sind $\{a,b,e\}$ und $\{c,d,e\}$ Blockkoalition, d.h. es galte

$s(a) + s(b) + s(e) < \varepsilon\alpha$ (bzw. $= \alpha/2$)
$s(c) + s(d) + s(e) < \varepsilon\alpha$ (bzw. $= \alpha/2$)

Also
$s(a) + s(b) + s(c) + s(d) + 2s(e) < 2\varepsilon\alpha$ (bzw. $= \alpha$).

Dies steht im Widerspruch zur obigen Ungleichung.

Das Beispiel zeigt zugleich, dass zwar $a \sim_1 b$, nicht aber $a \sim_2 b$, also dass nicht $a_i \sim_1 a_j \Longrightarrow a_i \sim_2 a_j$. Es zeigt damit auch, dass aus $a_i \not\sim_2 a_j$ nicht auf $a_i \prec a_j \vee a_j \prec a_i$ geschlossen werden kann.

ZUR AXIOMATISCHEN BEHANDLUNG DER NATURLICHEN ZAHLEN IM UNTERRICHT

von
Arnold Kirsch
(Giessen)

A. Die vielfältigen Bestrebungen um eine Modernisierung des mathematischen Unterrichts haben zu verschiedenen Vorschlägen geführt, die natürlichen Zahlen an der Schule axiomatisch einzuführen – oder jedenfalls Axiomensysteme für die natürlichen Zahlen mehr oder weniger explizit im Unterricht zu behandeln. Die wichtigste Rolle spielt in diesen Vorschlägen das wohlbekannte Axiomensystem von Peano aus dem Jahre 1891, etwa in der folgenden Form, die es in den "Grundlagen der Analysis" von E. Landau (0) hat (und die heutzutage schon ein wenig altertümlich anmutet). Es sei eine Menge von Dingen, natürliche Zahlen genannt, gegeben; diese Menge habe die Eigenschaften:

Axiom 1. 1 ist eine natürliche Zahl.

Axiom 2. Zu jedem x gibt es genau eine natürliche Zahl, die der Nachfolger von x heisst und mit x' bezeichnet werden möge.

Axiom 3. Stets ist $x' \neq 1$.

Axiom 4. Aus $x' = y'$ folgt $x = y$.

Axiom 5 (Induktionsaxiom). Es sei M eine Menge natürlicher Zahlen mit den Eigenschaften: (I) $1 \in M$, (II) wenn $x \in M$, so $x' \in M$. Dann umfasst M alle natürlichen Zahlen.

Die erwähnten Vorschläge scheinen mir in dreierlei Richtung zu zielen: Erstens werden in dem Bestreben, Un-

---

(0) Siehe Literaturverzeichnis [8].

terstufenlehrbücher zu modernisieren, die Peano-Axiome, vor allem die ersten vier, als "Grundeigenschaften der natürlichen Zahlen" hingestellt. Man will zwar nicht streng deduktiv vorgehen, aber doch irgendwie den Aufbau nach Peano zur Richtschnur des elementaren Unterrichts wählen. Zweitens gibt es Vorschläge zur "Modernisierung" des Unterrichts in dem Sinne, dass man die Peano-Axiome explizit nennt, ohne aber mit ihnen weiterarbeiten zu wollen, sondern gleichsam als eine wissenschaftliche Sehenswürdigkeit, die man den Schülern einmal vorführen sollte - so als wenn man ihnen eine Photographie des berühmten Experimentiertisches von O. Hahn zeigen würde. Demgegenüber haben die Vorschläge der dritten Art eine korrekte Einführung des Zahlbegriffs auf der Basis der Peano-Axiome zum Ziel, aus der naheliegenden Vorstellung heraus, dass die natürlichen Zahlen als ein Gegenstand des elementaren Unterrichts dort auch korrekt behandelt werden sollten, und dass sie in gewissem Sinn das "Einfachste" seien, was man korrekt behandeln kann.(1)

Nun ist die wissenschaftliche Bedeutung der Peano-Axiome zwar nicht unbestritten; es geht hier aber nicht um eine grundlagentheoretische Kritik und auch nicht darum, das Für und Wider der verschiedenen äquivalenten Fassungen dieses Axiomensystems zu diskutieren. Ohne Zweifel ist es für jeden "naiven" Mathematiker höchst eindrucksvoll zu sehen, dass ein so knappes Axiomensystem als Fundament für einen Aufbau des gesamten Zahlsystems ausreicht. Doch damit ist sein Wert für die Didaktik noch keineswegs erwiesen; vielmehr sind - wie schon hier betont werden soll - für jede der drei skizzierten Richtungen Bedenken anzumelden.

Al. Was die zuerst genannten Bestrebungen angeht, so wäre es durchaus denkbar, dass ein Axiomensystem, das sich theoretisch so gut bewährt, auch eine geeignete Richtschnur zur Orientierung für den elementaren Unterricht abgibt - dass in dem Axiomensystem sozusagen komprimiert das "Wesen der Zahl" oder des "Zählprozesses" eingefangen wäre. In der Tat darf man wohl in der Nachfolgerbeziehung in diesem Sin-

1) Siehe hierzu etwa J.Dieudonné in [12], S. 174.

ne etwas Fundamentales sehen; es besteht nur die Gefahr, dass dabei mehr in das sehr suggestive Wort Nachfolger hineingelegt wird, als tatsächlich durch die Axiome gegeben ist.

Betrachten wir einmal das folgende Axiomensystem: "Gegeben seien eine Menge A und in ihr ein ausgezeichnetes Element a sowie eine Abbildung v von A in sich (dies wären die Grundbegriffe), derart dass folgende Axiome gelten: v bildet A in $A \setminus \{a\}$ ab, v ist injektiv, v bildet keine echte Teilmenge von A, die a enthält, in sich ab." Seine Gleichwertigkeit mit dem Peanoschen Axiomensystem ist leicht einzusehen. Es handelt sich offenbar im wesentlichen um die bekannte Charakterisierung der natürlichen Zahlen durch R. Dedekind, formuliert schon 1888 (also vor Peano) und ohne die Termini "1", "Nachfolger", aber im übrigen mit Begriffen, die heutzutage in der Schulmathematik durchaus gang und gäbe sind: trotzdem wird man darin nicht mehr so leicht den Zahlprozess und die natürlichen Zahlen wiedererkennen!

Der Grund hierfür dürfte darin liegen, dass zwar durch das Wort "Nachfolger", nicht aber durch die Dedekindsche Formulierung das Vorhandensein einer linearen Ordnung in der Menge der natürlichen Zahlen, nämlich der Kleinerbeziehung, suggeriert wird. Dies kann man etwa daran erkennen, dass in manchen Darstellungen die Peano-Axiome als die Grundeigenschaften der "Reihenfolge" der natürlichen Zahlen bezeichnet werden; man spricht sogleich von "allen vorhergehenden" und "allen nachfolgenden" Zahlen oder auch von der "ersten" und der "kleinsten" Zahl einer Zahlenmenge – oder schliesslich direkt von der "durch die Grundeigenschaften gegebenen Ordnung". Wegen dieser Gefahr einer Missdeutung (oder "Ueber-Deutung") ist es fraglich, ob man die Peanosche Fassung der Axiome (die gelegentlich als Vereinfachung bezeichnet wird) als einen Fortschritt gegenüber der ursprünglichen Dedekindschen Fassung anzusehen hat.

Gewiss spielt der Begriff "Nachfolger" in der Theorie der geordneten Mengen eine wichtige Rolle; es ist aber deshalb noch keineswegs ganz einfach, von der Peanoschen Nachfolgerbeziehung zu einer linearen Ordnung zu kommen. Anfanger schlagen hierfür vor: $x < y$ werde dadurch definiert, dass man durch wiederholte Anwendung der Nachfolgeroperation von x zu y kommen kann, geschrieben etwa in der Form $((x')')'... = y$. Aber was heisst "wiederholt" - heisst es vielleicht "endlich oft"? Nun wäre "endlich" in diesem Aufbau zu erklären als "äquivalent mit einem Anfangsstück der Zahlenreihe", und "Anfangsstück" wäre mit Hilfe der Kleinerbeziehung zu definieren. Damit würde man also die Ordnung der natürlichen Zahlen, die man gerade einführen will, bereits inhaltlich zum Zählen der betreffenden Schritte benutzen! Hier wird die starke ontologische Verankerung (2) des Gegenstandes "natürliche Zahl" deutlich: die anschauliche und unbewusste Vertrautheit mit diesem Gegenstand macht es dem Lernenden sehr schwer, sich ausschliesslich an das in den Axiomen Gegebene zu halten.

Es ist durchaus möglich, die Kleinerrelation auf Grund der Nachfolgerbeziehung korrekt zu definieren. Dies wird schon bei Dedekind durchgeführt, ungefähr so (3): Man bezeichnet mit $N(x)$ die kleinste Menge natürlicher Zahlen, die erstens x enthält und zweitens mit jeder Zahl auch ihren Nachfolger. Nun definiert man $x < y$ durch $N(y) \subset N(x)$, wobei $\subset$ echtes Enthaltensein ausdrückt. Dann ergibt sich leicht die Transitivität der Relation $<$ und mit Hilfe des Induktionsaxioms (nicht so leicht) auch die Trichotomie. Aber dies ist ein begrifflicher Aufwand, der im elementaren Unterricht wohl kaum vereinfacht nachvollzogen oder auch nur für die Orientierung des Lehrers nutzbar gemacht werden kann. Und der bekannte Umweg, bei der Definition der Kleinerbeziehung über die (auch nicht einfach zu begründende) rekursive Definition der Addition zu ge-

---

(2) Die Bedeutung dieses Begriffs für ein Verständnis des axiomatischen Standpunkts wurde besonders v. H. Freudenthal in [5] hervorgehoben.

(3) Dies kann heutzutage auch etwas einfacher als der Uebergang zur transitiven Hülle der gegebenen Nachfolgerrelation beschrieben werden, vgl. [4].

hen, ist ein logischer Kunstgriff, der sich didaktisch sicher erst recht nicht fruchtbar machen lässt; denn die Nachfolgerbeziehung fordert ihre unmittelbare Erweiterung zur Kleinerbeziehung heraus. Die Definition von $x < y$ durch "es gibt eine natürliche Zahl z mit $x + z = y$" wäre im Unterricht nur dann gerechtfertigt, wenn man die Addition als Grundbegriff gewählt hatte.

Die vorstehenden Betrachtungen machen wohl hinreichend deutlich, dass die Einführung der natürlichen Zahlen nach dem Peanoschen Axiomensystem sicher nur mit Vorbehalten als Richtschnur für den elementaren Unterricht annehmbar ist. Die Knappheit an Grundbegriffen, die gerade den theoretischen Reiz dieses Axiomensystems ausmacht, erweist sich didaktisch gesehen eher als ein Nachteil. - Allerdings ist es nicht ausgeschlossen, dass eines der bekannten modifizierten Axiomensysteme, in denen die lineare Ordnung (4) oder auch die Addition (5) primär auftritt, für die angedeuteten Zwecke geeigneter ist. Wir wollen aber diese Frage hier nicht weiter verfolgen, sondern uns nun den Vorschlägen zuwenden, welche die explizite Behandlung der Peano-Axiome im Unterricht betreffen.

A 2. Auf die an zweiter Stelle genannten Bestrebungen, die darauf hinauslaufen, dem Unterricht mehr einen äusseren Anstrich von Modernität zu geben, braucht wohl nicht weiter eingegangen zu werden. Die blosse Formulierung eines Axiomensystems ist allenfalls für den geübten Mathematiker nicht wertlos. Im Unterricht hat eine solche Formulierung nur dann einen Sinn, wenn man den Schülern wenigstens andeutungsweise zeigen kann, dass sich alle weiteren Begriffe und Regeln auf die in dem Axiomensystem genannten zurückführen lassen.

---

(4) Ein Beispiel hierfür ist das bekannte Axiomensystem von E. Schmidt, vgl. [10].
(5) Ein Beispiel hierfür ist das in [7] zugrundelegte Axiomensystem.

A 3. Die zuletzt genannte Auffassung liegt denn auch den Vorschlägen der dritten Richtung zugrunde (die sich nicht etwa nur auf den Oberstufenunterricht beziehen). Hier muss jedoch wieder auf die Schwierigkeiten hingewiesen werden, die in der schon erwähnten starken ontologischen Bindung des Gegenstandes liegen und die im Unterricht dazu führen, dass in vermeintlich strenge, axiomatisch fundierte Begründungen fast unweigerlich anschauliche Argumentationen mit einfliessen. In diesem Zusammenhang sei auch an die Monomorphie des Peanoschen Axiomensystems erinnert, die ja jedenfalls für den "working mathematician" besteht (also wenn man von grundlagentheoretischen Feinheiten absieht, und etwas anderes kommt für unsere Zwecke nicht in Frage). Die Monomorphie, d.h. die Tatsache, dass das Axiomensystem bis auf Isomorphie nur ein Modell besitzt, erschwert das Lösen der ontologischen Bindung und damit das Verständnis des axiomatischen Vorgehens erheblich (6).

Die Schwierigkeiten sind hier von ähnlicher Art wie bei der axiomatischen Behandlung der euklidischen Geometrie. Zu der ontologischen Verankerung des Gegenstandes treten ferner hier wie dort die zu langen Beweiswege (bis zu den ersten einigermassen interessanten Sätzen) und die Kompliziertheit des Axiomensystems, die bei Peano zwar nicht so ins Auge springt wie etwa bei dem Hilbertschen Axiomensystem der Geometrie, die aber in Wirklichkeit durch die logisch verwickelte Struktur des Induktionsaxioms durchaus gegeben ist. In diesem Axiom ist ja nicht nur von Zahlen, sondern von beliebigen Mengen von Zahlen die Rede.

Es wird heute wohl allgemein anerkannt, dass sich für eine erste Einführung in das axiomatische Denken besser die einfachen nicht monomorphen Axiomensysteme der Gruppe oder der ebenen Inzidenzgeometrie mit ihren endlichen Modellen eignen. Bei diesen benutzt man übrigens ganz naiv die natürlichen Zahlen (schon indem man von "endlichen Mo-

---

(6) Siehe hierzu H. Freudenthal in [5].

dellen" spricht); man rechnet diese, ebenso wie die Gleichheitsrelation, gewissermassen zur Logik. So ist bei der axiomatischen Entwicklung der Gruppentheorie auch eine naive Verwendung der vollständigen Induktion unbedenklich (etwa wenn man die Potenzen a^n für natürliche n durch "$a^1 = a$, $a^2 = a.a$ und so weiter" erklärt). Dagegen wäre bei einer axiomatischen Behandlung der natürlichen Zahlen selber eine Argumentation mit "und so weiter" nicht sinnvoll, wie das Beispiel der Definition der Kleinerrelation zeigt.

B. Völlig unabhängig von den geschilderten Schwierigkeiten ist die Tatsache, dass die Peano-Axiome einen ganz wesentlichen, heute auch schon historisch wichtigen Gegenstand der Elementarmathematik bilden. Man wird sich also trotz dieser Schwierigkeiten wünschen, wenigstens die Schüler der Oberstufe damit bekanntzumachen und vor allem: ihnen ein wirkliches Verständnis dieser Axiome zu vermitteln. Im folgenden soll dafür ein Vorschlag gemacht werden, der aber zweierlei voraussetzt: Einmal muss eine erste Vertrautheit mit der axiomatischen Denkweise vorhanden sein, wie sie etwa am Beispiel des Gruppenbegriffs gewonnen werden kann. Zum andern müssen die Schüler die Methode der vollständigen Induktion inhaltlich beherrschen - dies lernt man nicht beim Peanoschen Aufbau des Zahlsystems (7), sondern beim Beweis "interessanter" Formeln, wie etwa der Bernoulli-Ungleichung oder der Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen.

Wenn ein Verständnis der axiomatischen Methode vermittelt werden soll, dann kommt es, wie H. Freudenthal in [5] überzeugend dargelegt hat, nicht in Frage, den Schülern einfach ein fertiges Axiomensystem in seiner reifsten Form vorzusetzen und sie dann zu zwingen, daraus (psychologisch: rückwärts) alle die wohlbekannten Tatsachen abzuleiten, zu

(7) Wir kommen darauf in B 3 zurück.

deren knappster Erfassung eben dieses Axiomensystem aufgestellt wurde! Vielmehr kommt es darauf an, dass die Schüler den Prozess des Axiomatisierens kennenlernen, d.h. dass sie sehen, wie man durch konsequentes Ordnen des inhaltlich gegebenen umfangreichen Materials schliesslich zu einer solchen ausgereiften Axiomatik gelangt.

B 1. Wir müssen nun also etwas weiter ausholen und zunächst zeigen, wie man im Falle des Zahlbegriffs zu diesem "Material" kommen kann. Hierfür ist es didaktisch sicher zweckmässig (trotz mancher grundlagentheoretischer Bedenken) von der naiven Mengenlehre auszugehen und die natürlichen Zahlen in wohlbekannter Weise als spezielle Kardinalzahlen einzuführen. Diese Zahlen und ihre Eigenschaften bilden dann das inhaltlich gegebene Material, das axiomatisch zu ordnen ist.

Die angedeutete Einführung wird etwa in dem bekannten Buch "Grundlagen der Elementarmathematik" von H. Lenz [8] durchgeführt. Der Verfasser versteht es dabei, die speziell bei den Kardinalzahlen auftretenden grundlagentheoretischen Schwierigkeiten zu umgehen, indem er sich ein für allemal auf ein gegebenes, als genügend umfassend angenommenes Mengensystem $\mathfrak{M}$ bezieht. Die Kardinalzahlen der leeren Menge bzw. der einelementigen Mengen werden mit 0 bzw. mit 1 bezeichnet, und für beliebige Kardinalzahlen wird die Addition + sowie die Multiplikation • in natürlicher Weise durch Rückgang auf die Vereinigungs- bzw. die Produktbildung von Mengen definiert. Es ergeben sich dann zwangslos die folgenden Regeln [9] (gegenüber der Darstellung von Lenz in etwas abgeänderter Schreibweise):

---

(8) Vgl. /9/, Kap. I. Aehnlich geht auch H.G. Steiner in /11/ vor.

(9) Wir unterdrücken hier und im folgenden die Quantoren "für alle", die sich hier auf die Kardinalzahlen eines festen Mengensystems $\mathfrak{M}$ beziehen.

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(2) $b + a = a + b$

(3) $a + 0 = a$

(4) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(5) $b \cdot a = a \cdot b$

(6) $a \cdot 1 = a$

(7) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

(8) $a \cdot 0 = 0$

(9) $a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0$ oder $b = 0$

(10) $a + 1 \neq 0$

(11) $a \neq b \Longrightarrow a + 1 \neq b + 1$

Setzt man jetzt von der Menge K aller Kardinalzahlen bzgl. $\mathfrak{M}$ voraus, dass sie die Eigenschaften

(I) $0 \in K$ (II) $a \in K \Longrightarrow a + 1 \in K$

hat (diese Forderung wird als "Unendlichkeitsaxiom" bezeichnet), und geht man dann zu der kleinsten Kardinalzahlenmenge mit diesen beiden Eigenschaften über, so hat man damit die Menge N der natürlichen Zahlen (bzgl. $\mathfrak{M}$) definiert. 0 und 1 sind natürliche Zahlen, und weiter zeigt sich, dass die Addition und die Multiplikation Verknüpfungen in N (d.h. Abbildungen von $N \times N$ in N) sind, die damit den sämtlichen Regeln (1) bis (11) genügen. Darüber hinaus gilt jetzt noch die Regel:

(12) $(0 \in M \subseteq N;$ für alle $a \in N: a \in M \Rightarrow a+1 \in M) \Longrightarrow M=N$

Offenbar besagt (12), das Induktionsprinzip, nichts anderes, als dass N die kleinste Kardinalzahlenmenge mit (I) und (II) ist: gerade durch dieses Prinzip werden also die natürlichen Zahlen unter den Kardinalzahlen abgegrenzt.

Die angedeutete Einführung der natürlichen Zahlen, die sich eng an die historische Entwicklung anlehnt, ist zweifellos besonders geeignet, wenn es darum geht, interessierten Schülern eine Antwort auf die Frage "wie kommt man zu den natürlichen Zahlen?" zu geben - oder darum, interessierten Lehrern eine theoretische Grundlage für den elementaren Unterricht zu bieten, welche ihnen adäquate (und nicht nur ad hoc gebildete) Veranschaulichungen und Motivierungen der fundamentalen Begriffe an die Hand gibt.

Die Einfachheit dieser Einführung liegt besonders darin, dass die Grundregeln der Addition und Multiplikation schon vor dem Induktionsprinzip gegeben sind und vor allem: dass die Addition und die Multiplikation nicht erst (wie bei einem Ausgehen von den Peano-Axiomen) mit Hilfe des sogenannten Rekursionsprinzips definiert werden müssen. Dieses Prinzip, das bekanntlich die rekursive Definition von Abbildungen von N in irgendwelche Bildmengen B ermöglicht, ist keineswegs automatisch durch (12) gegeben, sondern erfordert einen Beweis, der nicht ganz einfach ist und - hier liegt die Hauptschwierigkeit - dessen Notwendigkeit Anfängern nicht recht einleuchten will. Wir brauchen das Rekursionsprinzip erst zu dem (notfalls entbehrlichen) Nachweis der Tatsache, dass irgendzwei Systeme (N, 0, 1, +, .) und (N^* , 0^* , 1^* , $+^*$, $.^*$) natürlicher Zahlen (bezüglich zweier Mengensysteme $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$) stets isomorphe Gebilde sind, so dass man - wie wir es schon getan haben - von "den" natürlichen Zahlen sprechen kann.

So weit die Einführung der natürlichen Zahlen nach H. Lenz. Die folgenden Betrachtungen sollen zeigen, dass die Regeln (1) bis (12) in jedem Falle eine vorzügliche Basis für die Behandlung der natürlichen Zahlen an der Schule und insbesondere für die angekündigten axiomatischen Uebungen bilden - unabhängig davon, ob diese Regeln in der angedeuteten Weise gewonnen werden oder ob die natürlichen Zahlen nach L. Kronecker einfach als "vom lieben Gott gemacht" gelten sollen: im zweiten Falle wäre also eine Menge N als gegeben anzusehen und in ihr ausgezeichnete Elemente 0, 1 sowie Verknüpfungen + und $\circ$ mit den Eigenschaften (1) bis (12); alles weitere ist dann auf die Grundbegriffe 0, 1, +, • und die Grundregelnoder "Axiome" (1) bis (12) zurückzuführen. Hiermit dürfte eine Präzisierung des vielzitierten (aber wohl nicht authentischen) Ausspruchs von Kronecker gegeben sein!

Selbstverständlich ist das so gewonnene vorläufige Axiomensystem zur Beschreibung der inhaltlich gegebenen natürlichen Zahlen unnötig umfangreich, aber es hat den schon erwähnten Vorzug, dass in ihm die Addition und die Multiplikation bereits als Grundbegriffe auftreten und die Beweise der wichtigen Rechengesetze (so weit sie nicht ohnehin als Axiome vorkommen) nicht unnötig langwierig sind. Die zwölf Axiome gliedern sich in natürlicher Weise in vier Gruppen und lassen sich so leicht einprägen: (1), (2), (3) betreffen die Addition; (4), (5), (6) betreffen die Multiplikation; (7) bis (11) betreffen die Addition (bzw. die Zahl 0) und zugleich die Multiplikation (bzw. die Zahl 1); (12) betrifft speziell die Eigenschaft der Zahlen "natürlich" zu sein. Weiter ist das Axiomensystem im üblichen Sinne monomorph; es leistet die vollständige Beschreibung eines inhaltlich und anschaulich gegebenen Materials.

B 2. Eine kritische Diskussion unseres Axiomensystems kann sich an der Frage nach seiner Unabhängigkeit entzünden. In dieser Hinsicht besitzt es eine zumindest didaktisch bemerkenswerte Eigenschaft: Jedes der Axiome (1) bis (12) ist unabhängig von allen vorangehenden Axiomen. Bei der sukzessiven Einführung dieser "Grundregeln" bringt also jeder Schritt wirklich etwas Neues, oder mit anderen Worten: die naheliegende Frage nach der Ableitbarkeit aus vorangehenden Regeln ist jeweils zu verneinen. Diese Aussage lässt sich ohne Mühe noch verschärfen: So sind zum Beispiel die Axiome (1) bis (6) untereinander unabhängig, und jedes der Axiome (6), (7), (10), (11), (12) ist von allen anderen elf Axiomen unabhängig.

Zum Nachweis dessen konstruieren wir zu jedem der zwölf Axiome ein mit der gleichen Nummer versehenes Beispiel, bei dem das betreffende Axiom nicht erfullt ist, wohl aber (mindestens) alle diejenigen Axiome, von denen das betreffende Axiom unabhängig sein soll. Die Beispiele sind so gewählt, dass sie dem Schulstoff möglichst nahestehen; insbesondere wählen wir bevorzugt natürliche Zahlen als Elemente der betrachteten Mengen, lassen die Zahlen 0 und 1 die Rolle der betreffenden ausgezeichneten Elemente spielen und ändern nur die Verknüpfungen ab, so weit dies erforderlich ist. Die meisten Beispiele sind natürlich nicht neu. Besonders hingewiesen sei aber auf das Beispiel 8, aus dem die vielleicht nicht allgemein bekannte Tatsache hervorgeht, dass (8) nicht aus (1) bis (7) hergeleitet werden kann – sogar auch dann nicht, wenn man noch (9), (10), (11) hinzunimmt. Uebrigens lassen sich mehrere Beispiele vereinfachen, wenn man nur verlangt, dass jeweils alle Axiome mit kleinerer Nummer erfüllt sind; wir führen dies jedoch nicht weiter aus. Es ist klar, dass zum Verständnis dieser Betrachtungen eine gewisse Vertrautheit mit der axiomatischen Methode – die wir ja vorausgesetzt haben – erforderlich ist.

Beispiele

1. $N_1 = \{0, 1, 2\}$;

$+_1$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	0
2	2	0	0

;

$\cdot_1$	1	2	0
1	1	2	0
2	2	0	1
0	0	1	2

2. $N_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $(N_2, 0, +_2)$ sei nicht-abelsche Gruppe; $(N_2, 1, \cdot_2)$ sei abelsche Gruppe.

3. $N_3 = \{0, 1, 2, \ldots\} = N$; $a +_3 b = a + b + 1$;

$$a \cdot_3 b = a \cdot b \; .$$

Jedes der vorstehenden Beispiele $j = 1, 2, 3$ erfüllt alle Axiome (1) bis (6) ausser (j). Wegen der Symmetrie zwischen den Axiomengruppen (1), (2), (3) und (4), (5), (6) liefert jedes der Beispiele j ein entsprechendes Beispiel j+3, wenn man 0 in 1 und + in $\cdot$ umbenennt, und umgekehrt. (Es braucht ja noch kein Distributivgesetz erfüllt zu werden!) Für (6) geben wir noch ein neues Beispiel, das alle

Axiome ausser (6) erfüllt:

6. $N_6 = N$; $a +_6 b = a + b$; $a \cdot_6 b = 2a.b$.

7. $N_7 = N$; $a +_7 b = a + b$;

$$a \cdot_7 b = \begin{cases} \mathrm{kgV}(a,b) & \text{, wenn } a \neq 0 \text{ und } b \neq 0 \\ 0 & \text{, wenn } a=0 \text{ oder } b=0 \end{cases}$$

Hier sind alle Axiome ausser (7) erfüllt; dass (7) nicht gilt, erkennt man an

$$2 \cdot_7 (2 +_7 3) = 2 \cdot_7 5 = 10 \neq 8 = 2 +_7 6 = (2 \cdot_7 2) +_7 (2 \cdot_7 3) .$$

8. $N_8 = N \cup \{\infty\}$, d.h. zur Menge der natürlichen Zahlen werde ein weiteres Element "∞" hinzugenommen.

$$a +_8 b = \begin{cases} a+b, & \text{wenn } a \in N \text{ und } b \in N \\ \infty , & \text{wenn } a = \infty \text{ oder } b = \infty \end{cases} ;$$

$$a \cdot_8 b = \begin{cases} a.b , & \text{wenn } a \in N \text{ und } b \in N \\ \infty , & \text{wenn } a = \infty \text{ oder } b = \infty \end{cases} ;$$

Dieses Beispiel erfüllt alle Axiome ausser (8) und (12); insbesondere ist (8) wegen $\infty \cdot_8 0 = \infty$ verletzt. Mit Hilfe von (12) kann aber (8) aus den übrigen Axiomen hergeleitet werden, wie wir später zeigen wollen.

9. $N_9 = \{0, 1, 2, 3\}$; $(N_9, 0, 1, +_9, \cdot_9)$ sei der Restklassenring mod. 4. Dieses Beispiel erfüllt alle Axiome ausser (9) und (10). Wie wir später sehen werden, kann (9) mit Hilfe von (10) aus den übrigen Axiomen hergeleitet werden.

10. $N_{10} = \{0, 1\}$; $(N_{10}, 0, 1, +_{10}, \cdot_{10})$ sei der Restklassenring mod. 2. Hier sind alle Axiome ausser (10) erfüllt. Mit Hilfe von (10) (und vorangehender Axiome) kann man be-

weisen, dass $1 \neq 0$ ist: im Falle $1 = 0$ wäre nämlich $a + 1 = 0$ mit $a = 0$ erfüllt, im Widerspruch zu (10).

11. $N_{11} = \{0, 1\}$; $\begin{array}{c|cc} +_{11} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$; $\begin{array}{c|cc} \cdot_{11} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$.

Hier sind alle Axiome ausser (11) erfüllt.

12. N_{12} sei die Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen; $+_{12}$ bzw. $\cdot_{12}$ sei die übliche Addition bzw. Multiplikation. Hier sind alle Axiome ausser (12) erfüllt; dass (12) verletzt ist, zeigt etwa die Menge $\{0, 1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen, genommen für M. – Mit Hilfe von (12) (und vorangehender Axiome) kann nun $a + 1 \neq a$ bewiesen werden: Ist $M = \{a \mid a + 1 \neq a\}$, dann ist $0 \in M$ wegen $1 \neq 0$, und nach (11) gilt

$$a + 1 \neq a \Longrightarrow (a + 1) + 1 \neq a + 1,$$

d.h. $a \in M \Longrightarrow a + 1 \in M$; damit ist (12) anwendbar und liefert $M = N$.

B 3. Das recht umfangreiche Axiomensystem (1) bis (12) fordert trotz der vorstehenden Ergebnisse den Versuch einer Reduzierung heraus. Es wird für den Lehrer nicht schwierig sein, bei den Schülern den Wunsch zu wecken, unter den vielen "Grundregeln" nach solchen zu suchen, die sich auf Grund der übrigen beweisen lassen. Wir wollen im folgenden andeuten, wie man hierbei vorgehen und im wesentlichen bis zu dem Peanoschen Axiomensystem gelangen kann.

Als erstes ist wohl zu sehen, dass sich (2) aus (1), (3) und (12) herleiten lässt. Wir stellen den Beweis kurz dar, um eine Vorstellung von den erforderlichen Schlüssen zu geben (die natürlich genau durchzuführen sind, wenn das Ganze im Unterricht sinnvoll sein soll). Zunächst beweist man $0 + a = a$ $(= a + 0)$: ist

$$A = \{a \mid 0 + a = a\},$$

dann gilt wegen (3) offenbar $0 \in A$, und wenn man schon $a \in A$ hat, folgt nach (1) weiter

$$0 + (a + 1) = (0 + a) + 1 = a + 1 ,$$

also $a + 1 \in A$; damit ist (12) anwendbar und liefert $A = N$. In ähnlicher Weise ergibt sich sodann $1+a = a+1$. Zum Beweis der allgemeinen Behauptung (2), d.h. von $b + a = a + b$ betrachten wir endlich die Menge

$$B = \{ b \mid b + a = a + b \text{ für alle } a\} .$$

Nach dem bereits Bewiesenen ist $0 \in B$. Hat man nun $b \in B$, so folgt hieraus mit $1 + a = a + 1$ und wiederholter Anwendung von (1):

$$(b+1)+ a = b+(1+a) = b+(a+1) = (b+a)+1 = (a+b)+1 = a+(b+1).$$

Somit ist $b + 1 \in B$, und nach (12) folgt $B = N$, d.h. (3).

Aus dem Vorstehenden wird klar, dass sich derartige "langweilige" Beweise keineswegs zur ersten Einübung des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion eignen! Eine Schwierigkeit für den Anfänger liegt vielleicht auch darin, dass die Behauptung "$b+a = a+b$" eine Aussage in <u>zwei</u> Variablen ist, so dass man versucht sein könnte, irgendeine Form doppelter Induktion anzuwenden. Unsere Schreibweise

$$B = \{b \mid b + a = a + b \text{ für alle } a\}$$

zeigt indessen deutlich, dass nur b als Induktionsvariable fungiert, während a durch den Quantor "für alle" gebunden ist.

Weiter ergeben sich auf Grund von (1), (3), (10), (11), (12) leicht die beiden Aussagen

(10') $\qquad a \neq 0 \Longrightarrow a + b \neq 0 ,$

(11') $\qquad a \neq b \Longrightarrow a + c \neq b + c .$

Mit ihrer Hilfe können dann (9), (8), (4), (5) aus den übrigen Axiomen hergeleitet werden. Wir führen dies nur für (9) durch: es ist also zu zeigen, dass (für alle a, b $\in$ N)

$$a.b \neq 0 \quad \text{oder} \quad a = 0 \quad \text{oder} \quad b = 0$$

gilt. B sei die Menge der b, für die dies richtig ist (für alle a). Ersichtlich hat man $0 \in B$, und wegen (6) ist auch $1 \in B$, weil natürlich $a \neq 0$ oder $a = 0$ oder $1 = 0$ gilt. Es sei nun $0 \neq b \in B$, d.h. es gelte (für alle a) $a.b \neq 0$ oder $a = 0$. Im Falle $a.b \neq 0$ folgt wegen $a.(b+1) = a.b + a$ nach (10') $a.(b+1) \neq 0$; andernfalls ist $a = 0$. Also hat man $b + 1 \in B$. – Im übrigen sei hier wieder auf das Buch von Landau verwiesen.

Um das nunmehr erhaltene, schon wesentlich "kleinere" Axiomensystem

(1), (3), (6), (7), (10), (11), (12)

noch weiter zu vereinfachen, ist es naheliegend, die bisher als Grundbegriff angesehene Multiplikation durch die übrigen Grundbegriffe 0, 1, + auszudrücken. In einer derartigen Reduzierung der Grundbegriffe kommt ein weiterer wichtiger Aspekt des Axiomatisierungsprozesses zum Ausdruck. Wir streichen also die Grundregeln (6), (7) und <u>definieren a.b rekursiv durch</u>:

(a) $\quad a \cdot 0 = 0$; $\qquad$ (b) $\quad a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a$

Dies entspricht der an der Schule geläufigen Auffassung der Multiplikation als wiederholter Addition. Hierbei (und nicht früher!) wird das Rekursionsprinzip benutzt (10). Nach diesem gibt es für jedes a eine (eindeutig bestimmte) Abbildung $b \longrightarrow a.b$ von N in sich mit den Eigenschaften

(10) Will man den (auch grundlagentheoretisch problematischen) Beweis des Rekursionsprinzips vermeiden, so empfiehlt es sich, die Multiplikation $\cdot$ als Grundbegriff beizubehalten und (a), (b) als Axiome zu nehmen. Siehe hierzu [1], S. 77.

(a) und (b); wir haben also eine Verknüpfung $(a,b) \longrightarrow a.b$ mit diesen Eigenschaften definiert. Auf Grund von (1), (3), (10), (11), (12) weist man jetzt nach, dass die so definierte Multiplikation wieder die Eigenschaften (6) und (7) besitzt. Für diesen Nachweis wird die oben aus (1), (3), (12) hergeleitete Aussage $0 + a = a$ benutzt; im übrigen bietet die Durchführung nichts Neues und kann hier übergangen werden.

Man kann nun noch (1) und (3) durch die etwas schwächer aussehenden Axiome

(1') $$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

(3') $$0 + 0 = 0$$

ersetzen und zeigen: hieraus und aus (10), (11), (12) ergeben sich wieder (1) und (3). Wir führen dies nur für (3) durch: Bereits aus (1'), (3') und (12) folgt $0+a = a$ wie oben bei der Herleitung von (2); insbesondere gilt damit $0 + 1 = 1$. Nun ist $a + 1 = a + (0+1) = (a+0) + 1$, und daraus folgt nach (11) offenbar $a = a + 0$, also (3).

Mit (1'), (3'), (10), (11), (12) hat man im wesentlichen das Peanosche Axiomensystem erhalten, wie es etwa in [7] dargestellt ist. Hierbei ist wie bisher eine Menge N mit ausgezeichneten Elementen 0, 1 und einer Verknüfung + zugrundegelegt. Die Axiome (1'), (3'), (10), (11), (12) sind voneinander unabhängig.

Man kann nun auch noch die 0 "amputieren"; hierdurch kommt man auf das folgende Axiomensystem für eine Menge P mit den Grundbegriffen 1, +, das in einem naheliegenden (und genau präzisierbaren) Sinn mit unserem Axiomensystem gleichwertig ist [11];

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1 ;$$
$$a + 1 \neq 1;$$
$$a \neq b \Longrightarrow a + 1 \neq b + 1 ;$$

(11) Es wird in [7] als "Peanosches Axiomensystem" bezeichnet.

$(1 \in M \subseteq P;$ für alle a: $a \in M \Longrightarrow a+1 \in M) \Longrightarrow M = P$.

Schliesslich kann man die als Grundbegriff auftretende Addition auf die Nachfolgerbeziehung zurückführen, um das Peanosche Axiomensystem in seiner klassischen Form zu erhalten. Diese Schritte bringen aber keine wesentliche Vereinfachung mehr. Insbesondere erweist es sich aus den eingangs diskutierten Gründen als unzweckmässig, die Addition als Grundbegriff aufzugeben.

Das Peanosche Axiomensystem erscheint im Vorstehenden als das Ergebnis eines langen Vereinfachungsprozesses, dessen Darstellung dem Lehrer manche Gelegenheit zur "Dramatisierung" gibt. Nur das Nachvollziehen eines solchen Prozesses dürfte dem Lernenden das Peanosche Axiomensystem erschliessen. Hier wird erst recht deutlich, wie wenig mit einer blossen Aufzählung und Erläuterung der Axiome gewonnen ist - und wie zweifelhaft es bleibt, ob eine noch so ausführliche und sorgfältige Darstellung des Peanoschen Aufbaus (wie sie übrigens in geradezu vorbildlicher Weise in [7] gegeben wird) dem Schüler einen Zugang zu seinem Verständnis öffnet, wenn dabei dieses Axiomensystem an die Spitze der Erörterungen gestellt wird.

\+ \+ \+

Literatur

[1] H. Behnke/K. Fladt/W. Süss (Hsgb.), Grundzüge der Mathematik, Band I, insb. Teil A und Teil B, Kap. 1.

[2] R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1888, 8. unveränderte Aufl. 1960.

[3] L. Félix, Mathematische Strukturen als Leitfaden für den Unterricht, übers. aus dem Französischen, Göttingen 1963.

[4] W. Felscher/J. Schmidt, Natürliche Zahlen, Ordnung, Nachfolge, Arch. Math. Logik 4, S. 81-94.

/5/ H. Freudenthal, Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben? Der Math.unterr., Heft 4/1963, S. 5-29.

/6/ O. Hahn/E.V. Hanxleden, Mathematik für Gymnasien, 5. Schuljahr, Braunschweig 1964.

/7/ L. Henkin/W.N. Smith/V.J. Varineau/M.J.Walsh, Retracing Elementary Mathematics, New York 1962.

/8/ E. Landau, Grundlagen der Analysis, Leipzig 1930.

/9/ H. Lenz, Grundlagen der Elementarmathematik, Berlin 1961.

/10/ H. Rohrbach, Das Axiomensystem von Erhard Schmidt für die Menge der natürlichen Zahlen, Math. Nachr. 4 (1950/51), S. 315-321.

/11/ H.G. Steiner, Kardinal- und Ordinalzahlen, in: Fischer-Lexikon Mathematik I, Frankfurt/Main 1964.

/12/ J. Dieudonné, Moderne Mathemaik und Unterricht auf der Höheren Schule, Math.-Phys. Sem.-Ber. VIII (1962), S. 166-178.

AXIOMATISATION ET GEOMETRIE ELEMENTAIRES

par
W. Servais
(Morlanwelz)

I. INTRODUCTION

1.1. La géométrie élémentaire est pour l'élève l'occasion de la première rencontre avec les structures mathématiques complexes.

Dans l'enseignement traditionnel, il abordait la géométrie sans préparation mathématique, les mains vides.

C'est sur la présentation de la géométrie au jeune débutant qu'a porté, en Belgique, un des plus vigoureux efforts pédagogiques. La géométrie élémentaire considérée d'un point de vue supérieur intéresse toujours le mathématicien.

Il suffit de citer trois ouvrages récents:

Geometric Algebra
de Emile Artin,

L'enseignement de la géométrie
de Gustave Choquet,

Algèbre linéaire et géométrie élémentaire
de Jean Dieudonné,

pour prouver combien la modernisation algébrique de l'enseignement de la géométrie est un sujet d'actualité.

La "voie royale" de cette construction de la géométrie, comme l'appelle G. Choquet, est bien connue, depuis d'ailleurs assez longtemps, puisqu'elle fut tracée par Grassmann et Cayley avant d'être popularisée par Klein.

1.2. Il y a plus de vingt-cinq ans que l'expérience des classes nous a montré tout le profit que des élèves de 17 et de 18 ans peuvent tirer de l'étude des vecteurs et de la géométrie affine suivie de l'introduction du produit scalaire et de la géométrie euclidienne. Ce qui est nouveau, c'est qu'une présentation clairement axiomatisée du vectoriel réel peut commencer dès quinze ans si on a eu soin de mettre en place les vecteurs et les nombres réels de 12 à 14 ans. C'est à cet âge que nous commençons en Belgique.

G. Papy vous donnera le détail de ce qui peut être entrepris à quinze ans, au seuil du second cycle des humanités.

1.3. Nous voudrions vous parler du début de l'enseignement de la géométrie, dès douze ans, en particulier du point de vue axiomatique.

Il n'est pas possible de parachuter les notions de vecteurs et de nombres réels dans des têtes des quinze ans. Ces notions doivent être élaborées dans le premier cycle par une voie qui soit acceptable tant du point de vue mathématique que du point de vue pédagogique.

De plus, il faut apprivoiser l'élève au raisonnement mathématique qui est autre chose que des constatations empiriques relatives à des collages ou à des pliages.

Il y a peu de génération spontanée du raisonnement mathématique mais un apprentissage progressif où la répétition et l'imitation ont leur part.

Parfois, pour faire bien les choses, on imagine un enseignement expérimental pratiqué pendant toute une période, auquel succéderait un enseignement déductif. C'est se bercer d'illusions. On oublie qu'il doit y avoir une expérience de raisonnement sans laquelle la moindre déduction organisée est une énigme, à moins qu'elle ne devienne une fable obscure à apprendre par coeur avec les lettres du livre!

Nous pensons qu'il faut apprendre à démontrer et à définir aussitôt que possible, c'est-à-dire dès que l'enfant fait preuve de conduites intelligentes à ce propos. Il ne s'agit donc pas, avec une hâte inconsidérée, de dresser de façon précoce des élèves à une déduction forcée, mais de raisonner avec eux et de les conduire à raisonner quand ils montrent la capacité de le faire.

L'expérience des classes montre que des enfants qui entrent à l'école secondaire sont capables de s'exercer au raisonnement de façon significative.

II. CONNAISSANCES DE BASE

2.1. Comme on sait, dans les écoles secondaires belges qui ont adopté un programme moderne de mathématique, les élèves sont, à 12 ans, dès la première année, introduits activement aux notions d'ensembles, de relations et de fonctions grâce aux diagrammes de Venn et aux graphes multicolores avec flèches.

Relativement aux ensembles, ils apprennent, avec le symbolisme consacré, l'appartenance, l'inclusion, l'intersection l'union, la différence et le produit cartésien.

2.2. Les notions de réciproque d'une relation et de composée de deux ou plusieurs relations successives leur sont rendues familières. Ils constatent la réflexivité, la symétrie ou la transitivité de certaines relations.

En liaison avec la partition d'un ensemble, ils font la connaissance des relations d'équivalence. L'inclusion d'ensembles et d'autres exemples les conduisent aux relations d'ordre.

2.3. Parmi les fonctions et applications, un sort particulier est fait à celles dont la réciproque est elle-même une fonction. A partir de ces fonctions bijectives, est définie l'équipotence des ensembles. Les élèves remarquent que des ensembles équipotents ont le même nombre d'éléments. Ils retrouvent les opérations sur les nombres naturels, avec leurs propriétés, au départ des opérations sur les ensembles.

III. PRIORITE DE LA GEOMETRIE AFFINE

3.1. En géométrie concrète, un enfant de douze ans a déjà tout un bagage de connaissances implicites dont seule une partie a été rendue consciente.

Aussi, lorsque l'on commence l'enseignement de la géométrie rationnelle, a-t-il des difficultés à comprendre qu'on démontre ce qu'il voit et sait avec évidence!

Pour mathématiser le capital de notions intuitives inanalysées que l'enfant possède, il y a plusieurs voies.

L'enseignement traditionnel et certaines tendances plus modernes s'en prennent d'emblée à la géométrie métrique dont l'agencement est cependant complexe. Pourquoi en est-il ainsi? Sans doute la prégnance des notions de longueurs dans certaines conceptions crée-t-elle une sorte de préséance, toute contestable d'ailleurs.

3.2. En Belgique, pour plusieurs raisons, nous commençons délibérément par la géométrie affine.

Tout d'abord, on sait que la géométrie affine est autonome par rapport à la géométrie euclidienne. Cette autonomie est malaisée à voir après-coup lorsque l'on veut dégager la géométrie affine de sa gangue euclidienne.

Cependant, nous en avons une longue expérience, la détermination du groupe d'invariance d'une propriété géométrique est très précieuse du point de vue pédagogique puisqu'elle permet de sélectionner les modes de démonstration adéquats à la nature affine ou métrique ou projective d'une question.

3.3. D'autre part, la géométrie affine, comme modèle mathématique, est très utile en physique où des disciplines entières, telle la thermodynamique, font usage d'un outillage affin. Pour les questions physiques qui nécessitent une métrique, il est souvent profitable d'introduire celle-ci, au moment propice, dans le cadre de la géométrie affine.

3.4. C'est, dira-t-on, aller chercher bien loin des justifications! Pourquoi, quand cela est possible, ne pas démêler assez tôt, ce qui est distinct?

D'autant plus que la géométrie affine se présente d'une façon beaucoup plus simple que la métrique et que les propriétés de base y sont moins nombreuses. Cette circonstance constitue un net avantage pédagogique lorsqu'il s'agit, pour un débutant, de chercher et de trouver une démonstration.

Comme les règles de jeu sont moins nombreuses en géométrie affine qu'en géométrie euclidienne, il est plus simple de les respecter et de ne pas faire des prélèvements inconscients à l'évidence physique.

Enfin, nous tenons, en fait, à marcher vers la construction des vecteurs et des réels par une voie aussi dégagée et aussi rapide que possible.

IV. PLAN ET DROITES

4.1. Les axiomes initiaux que nous avons choisis sont communément reçus.

A_1 Le plan est un ensemble de points. (1)

A_2 Toute droite est une partie propre du plan.

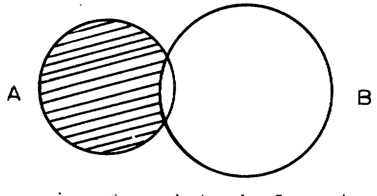
A_3 Toute droite contient au moins une paire de points.

A_4 Toute paire de points est contenue dans une seule droite.

Ces propriétés sont dégagées de dessins.

Leur sens intuitif est parfaitement clair.

4.2. Pour amener les élèves à prendre conscience de la signification logique de ces propositions, des exercices sont résolus où les droites sont représentées par des diagrammes de Venn qu'on demande de compléter en indiquant les parties qui sont nécessairement vides. Par exemple, si A et B sont des droites et si $A \setminus B = \emptyset$



on doit avoir une paire de points incluse à $A \cap B$, d'où $A = B$ et $B \setminus A = \emptyset$

De tels exercices obligent à raisonner au lieu de voir.

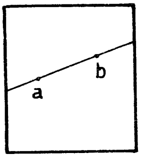
1) En géométrie plane, tous les points dont il est question appartiennent à un même plan.

4.3. Jusque là cependant, les élèves ne se rendent pas compte de ce que les axiomes sont autre chose qu'une description fidèle des propriétés intuitives des dessins des droites dans un plan.

Nous leur avons proposé des exercices d'interprétation des axiomes. Tout d'abord, des interprétations physiques.

Si dans les propositions A_1, A_2, A_3, A_4, nous interprétons la droite qui contient une paire de points comme le trait à la règle joignant ces derniers, est-ce que les propositions sont valables? Non!

La classe a découvert une interprétation baptisée de la "carte postale": le trait passant par deux points doit être prolongé jusqu'au bords de la carte. Alors les axiomes sont vérifiés.



Ils ont fait des essais analogues en interprétant le plan comme l'ensemble des points d'une sphère et les droites comme des cercles tracés sur celle-ci.

Une interprétation qui surprend et amuse à la fois les élèves consiste à considérer que le plan est un ensemble quelconque d'éléments et que les droites sont simplement des paires de ceux-ci. De la sorte, on a des modèles finis.

Les élèves ont trouvé que les axiomes étaient satisfaits par un modèle minimum à trois éléments.

V. PARALLELES

5.1. La définition, désormais classique de deux droites parallèles comme des droites disjointes ou égales, est introduite sans difficulté. Ce sont certains professeurs qui refusent d'accepter que l'on puisse dire qu'une droite est parallèle à elle-même.

L'ensemble des paralleles à une droite donnée est appelée direction. L'axiome d'Euclide est présenté sous deux formes, équivalentes en vertu de la définition d'une partition d'ensemble.

P. A toute droite donnée, passe, par tout point, une parallèle et une seule
ou
Toute direction est une partition du plan.
Le parallélisme est une relation d'équivalence dans l'ensemble des droites.

5.2. Dans le modèle à trois éléments, il n'y a aucune paire de parallèles, l'axiome de la parallèle est faux.

Il en est de même dans l'interprétation carte-postale où, par tout point étranger à une droite, passent autant de paralleles que l'on veut.

Si on garde l'interprétation de la droite comme paire d'éléments d'un ensemble, le modele à quatre éléments convient: chaque droite est parallele à son complement. On a un parallélogramme dont les diagonales sont parallèles.

Des modèles à 5, 6... éléments admettent 2, 3... parallèles à une droite par un point étranger.

5.3. Suivant cette voie, les élèves constatent, d'une façon naïve, deux faits importants:

1° un système d'axiomes peut recevoir plusieurs interprétations dont certaines peuvent paraître inattendues même à celui qui a exprimé les axiomes.

2° comme l'axiome P de la parallèle n'est pas satisfait par tous les modèles valables pour les axiomes précédents, cet axiome "apporte du neuf".

5.4. Grâce aux axiomes introduits, on définit la projection du plan sur une droite parallèlement à une direction. C'est une application du plan sur la droite.

La projection d'une droite A sur une droite B, suivant une direction sécante, établit une bijection entre A et B.

Toutes les droites sont donc équipotentes: elles ont le même cardinal de points λ. Le cardinal d'une direction est aussi λ puisqu'il y a une bijection entre l'ensemble des droites d'une direction et l'ensemble des points d'une sécante.

Les projections coordonnées sur deux sécantes montrent que le plan est équipotent au produit cartésien de deux droites. Le cardinal du plan est donc λ^2.

On trouve sans peine le cardinal de l'ensemble des directions du plan, $\lambda + 1$, et celui de l'ensemble des droites du plan, $\lambda^2 + \lambda$.

Il est intéressant d'illustrer ces formules par un modèle à 9 points où chaque droite en comprend 3.

Ce qui précède est vu dès que les élèves ont les notions ensemblistes indispensables.

VI. ORDRE LINEAIRE

6.1. Sur une paire $\{a,b\}$ il y a deux ordres totaux stricts $\{(a, b)\}$ et $\{(b, a)\}$.

Dans un ensemble de trois éléments et plus, on peut définir plus de deux ordres totaux stricts.

Quand on parcourt une droite dans un sens, on la munit d'un ordre total naturel. Cette observation intuitive conduit à admettre l'axiome:

O_1 A toute droite sont associés deux ordres totaux réciproques dits naturels. Ces deux ordres sont donnés dès que la droite est donnée. Chacun d'eux détermine son réciproque.

A partir de cet axiome, on définit: droite orientée, demi-droite, ouverte ou fermée, intervalle ouvert, fermé (segment), semi-ouvert, contour polygonal, partie convexe du plan, enveloppe convexe d'une partie, avec application aux polygones élémentaires.

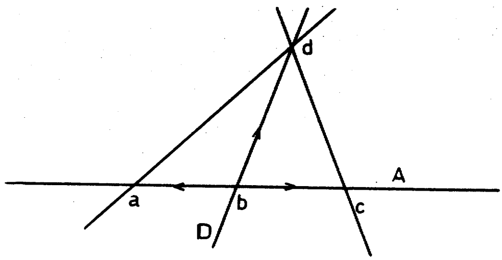
6.2. La liaison entre les deux ordres d'une droite et les deux ordres d'une autre est assurée par l'axiome.

O_2 Une projection parallèle d'une droite sur une autre transfere un ordre naturel de la première sur un ordre naturel de la seconde.

ou

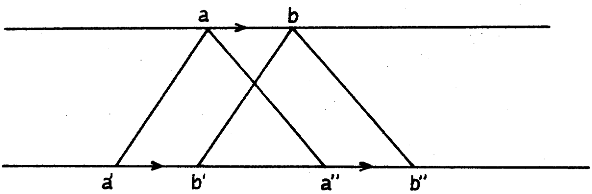
Toute projection parallèle d'une droite orientée sur une autre est une fonction croissante ou décroissante.

Les axiomes O_1 et O_2 sont vérifiés dans le cas du modèle à 4 éléments.



Soit une droite A, sur laquelle a<b<c . Si d$\notin$ A, les projections, sur A, de l'ordre déterminé par (b, d) suivant les directions des droites ad et cd donnent les ordres réciproques déterminés par (b, a) et (b, c).

6.3. O_3 Si on considère la projection d'une droite orientée sur une droite parallèle, l'ordre obtenu sur celle-ci est le même quelle que soit la direction de projection.



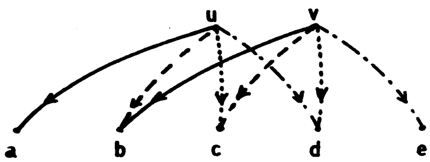
Cet axiome, vérifié sur la figure, n'est pas valable dans le modèle à 4 éléments.

Il apporte du neuf!

On définit des droites orientées parallèles et de même sens ou de sens contraires.

A partir de l'axiome O_3, il est aisé d'établir que, sur toute droite, il y a une infinité de points.

Il suffit d'effectuer une suite de projections parallèles.



On a successivement $a < b$, $b < c$, $c < d$, ... de sorte que deux points de la suite $a < b < c < d$ .... ne peuvent coïncider.

Cette proposition fait exclure dorénavant les modèles finis que nous avions considérés.

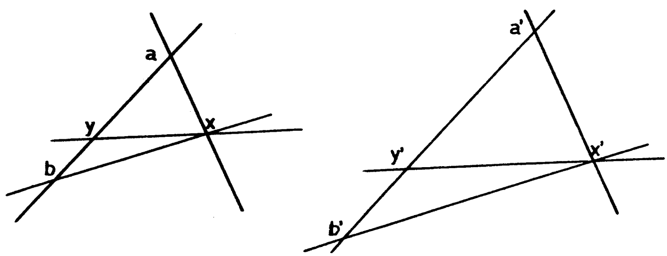
VII. GROUPE DES DILATATIONS

7.1. Sur la base de situations concrètes: ombres chinoises, agrandissement photographique, projection cinématographique, translation d'une porte coulissante, les élèves sont amenés à considérer les dilatations.

Définition: une d i l a t a t i o n est une bijection du plan sur lui-même dans laquelle une droite a pour image une droite parallèle (1).

La bijection identique est une dilatation.

7.2. Par construction de droites parallèles, on établit qu'une dilatation est déterminée quand on en donnait deux points et leurs images. Une dilatation qui a deux points fixes est donc la transformation identique.



(1) cfr. W. Servais, Dilatations, Mathematics teaching, no 26.

7.3. Nous admettons un seul axiome d'existence.

D. Il y a au moins une dilatation dans laquelle deux points distincts donnés a, b ont pour images deux points distincts donnés a', b' appartenant à une droite parallèle à la droite a b.

Il suit de 7.2 que cette dilatation est unique.

7.4. Il est manifeste que l'ensemble des dilatations du plan muni de la composition est un groupe.

En effet, les bijections du plan sur lui-même forment un groupe et le parallélisme est une relation d'équivalence.

7.5. Dans une dilatation, la droite joignant un point à son image est invariante: on l'appelle une t r a c e de la dilatation.

Deux dilatations réciproques ont les mêmes traces.

On reconnaît sans peine que, dans une dilatation qui n'est pas identique, toutes les traces sont, soit parallèles, soit concourantes en un même point C.

Dans le premier cas, la dilatation est, par définition, une t r a n s l a t i o n, dans le second, une h o m o t h é t i e de centre C.

La transformation identique est considérée comme translation: toute droite est une trace parallèle à elle-même et comme homothétie: tout point du plan est point d'intersection de traces.

7.6. L'ensemble des homothéties qui admettent un même point pour centre est un groupe pour la composition.

7.7. Il est aisé de prouver que si la composée de deux translations a un point fixe, elle en a un second. Elle est donc la transformation identique.

Par suite, la composée de deux translations est une translation. L'ensemble des translations du plan constitue un groupe pour la composition.

VIII. GROUPE DES VECTEURS

8.1. Une partie du plan est é q u i p o l l e n t e à une partie B s'il y a une translation qui transforme A en B.

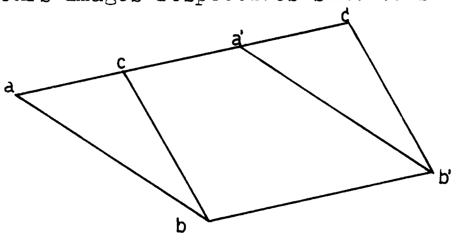
Comme les translations constituent un groupe, l'équipollence est une relation d'équivalence, nous la noterons $\uparrow$.

8.2. **Une translation transforme un couple de points (a,b) en un couple (a', b') équipollent:**

$$(a,\ b)\ \uparrow\ (a',\ b')$$

La classe des couples équipollents au couple (a, b) est, par définition, un v e c t e u r , le vecteur $\overrightarrow{a\,b}$.

Dans une translation, les couples déterminés par les points et leurs images respectives sont tous équipollents.



En effet, dans les parallélogrammes, on a

$$(a\ a')\ \uparrow\ (b\ b') \qquad\qquad (b\ b')\ \uparrow\ (c\ c')$$

D'où, par transitivité,

$$(a\ a')\ \uparrow\ (c\ c')$$

Les couples équipollents à (a a') déterminent le vecteur $\overrightarrow{aa'}$ de la translation.

8.3. Lorsque l'on compose un couple de translations, on obtient une translation dont le vecteur est, par définition, la s o m m e d e s v e c t e u r s des translations données.

On a évidemment $\overrightarrow{a\,c} = \overrightarrow{a\,b} + \overrightarrow{b\,c}$.

Les vecteurs sont donc une manière de présenter les translations, la composition de celles-ci correspondant à l'addition vectorielle.

L'ensemble des vecteurs, muni de l'addition, est un groupe isomorphe au groupe des translations.

Les deux groupes sont commutatifs.

On considère les sous-groupes engendrés par un ou par deux vecteurs.

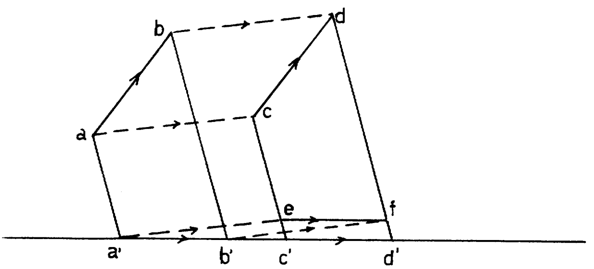
8.4. Il y a une seule translation qui porte un point fixe o du plan en un point a donné.

Par définition, la somme des deux points a et b, est le point c tel que

$$\overrightarrow{oc} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ob}$$

Le plan pointé ainsi muni d'une addition est un groupe commutatif isomorphe au groupe des translations ou des vecteurs.

On étudie les sous-groupes engendrés par un ou par deux points.



8.5. Dans une projection parallèle sur une droite, deux couples équipollents ont pour images des couples équipollents.

En effet, si (a, b) $\uparrow$ (c, d), la translation $\overrightarrow{ac}$ transforme b en d. Cette translation donne pour images de a' et b' les points e et f des droites c c' et d d'.

On a (a' b'). $\uparrow$ (e f) et, ef//c'd'

Donc, (e, f) $\uparrow$ (c', d').

D'où, par transitivité,(a', b') $\uparrow$ (c', d').

Lorsque a b est projetante, les points a' et b', c' et d' sont confondus et l'équipollence précédente subsiste.

Le milieu d'un segment se projette suivant le milieu de la projection de ce segment.

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Une projection parallèle du plan sur une droite transforme un vecteur du plan en un vecteur de la droite. La somme de deux vecteurs a pour projection la somme de leurs projections sur la droite. Par projection parallèle, on construit la moitié, le nieme d'un vecteur.

8.6. Une dilatation transforme deux couples équipollents en des couples équipollents puisque un parallélogramme a pour image un parallélogramme.

Une dilatation transforme un vecteur en un vecteur et la somme d'un couple de vecteurs en la somme de leurs images.

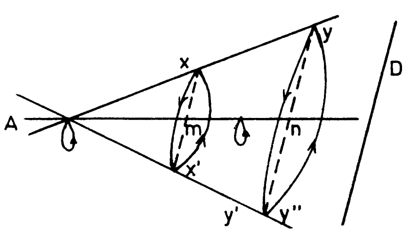
Le groupe des translations est transformé en lui-même par toute dilatation.

8.7. Si une dilatation échange deux points, elle échange les points par paire et transforme un vecteur en le vecteur opposé. C'est par définition une *symétrie centrale*. Son centre est le milieu des segments joignant les points à leurs images respectives.

L'ensemble des translations et des symétries centrales est un groupe pour la composition.

IX. SYMETRIE AXIALE

9.1. La *symétrie* ayant pour axe une droite A et la direction de D (sécante de A) est la bijection du plan dans laquelle un point x et son image x' appartiennent à une droite de direction D, le milieu m de x x' étant un point de A.



Les points de A sont fixes, les droites de la direction de D sont confondues avec leurs images.

Dans une symétrie axiale, une droite a pour image une droite. La proposition est évidente lorsque la droite x y est parallèle a l'axe A puisque l'image de x y est obtenue par la translation de vecteur $2\ \overrightarrow{x\,m}$.

Lorsque xy coupe A en c, soit y' le symétrique de y, l'homothétie de centre c qui transforme x en y, donne pour image a x' le point y" tel que

la droite yy" est parallèle a xx'

et que le milieu m de [x x'] a pour image le milieu n de [y y"] situé sur la droite A.

Par suite, y" = y' et l'image de la droite xy est la droite x'y'.

9.2. La composée d'un couple de symétries ayant des axes parallèles et une même direction est une translation.

La composée d'un couple de symétries ayant des axes secants, appartenant chacun a la direction de l'autre symétrie, est la symétrie ayant pour centre le point d'intersection des axes. (Symétries axiales conjuguées).

X. GRADUATION DE LA DROITE

abcisse d'un point

10.1. Une droite D, munie d'une origine o et de l'addition des points est un groupe $(D_o, +)$.

Ce groupe est commutatif.

De plus, si la droite est orientée, on peut ordonner le groupe.

10.2 Dans le groupe $(D_o, +)$ considérons le sous-groupe engendré par un point u, distinct de l'origine o.

Ce sous-groupe est une graduation de la droite notée $(D_{ou}, +)$

10.3. On admet l'axiome d'Archimède:

Arch. Pour tout point x de la droite o u, il existe un nombre entier n tel que

$$x \in \,]\, n\, u, (n+1)\, u]$$

ou encore, l'ensemble des intervalles $]n\, u, (n+1)\, u]$ pour $n \in \mathbf{Z}$ est une partition de la droite o u.

10.4. Etant donné un point x de o u, il y a un segment

$$[n\, u, (n+1)\, u]$$

qui le comprend.

Pour préciser la position de x sur ce segment, on divise ce dernier en deux segments équipollents, on retient le segment auquel x appartient.

On le divise en deux segments équipollents et ainsi de suite. Un binaire limité permet de noter ce programme d'opérations géométriques jusqu'à un stade donné. On admet que l'on peut continuer indéfiniment, on obtient un binaire illimité.

Un point d'une des subdivisions successives donne lieu à deux développements binaires; les autres points, à un seul.

Réciproquement, un binaire illimité, donné à priori, détermine un programme de subdivisions et de choix successifs de segments emboîtés.

C Axiome de continuité

L'intersection des segments emboîtés obtenus par des divisions successives en deux segments équipollents, continuées indéfiniment, comprend un seul point.

On considère que deux binaires illimités qui déterminent le même point x de o u, sont équivalents.

On les appelle l'a b s c i s s e du point x sur la droite o u rapportée à l'o r i g i n e o et au p o i n t u n i t a i r e u.

10.5. Par projection parallèle, une graduation d'une droite a pour image une graduation de la droite sur laquelle on projette. Relativement à ces graduations, un point et son image ont la même abcisse (Th. de Thalès)

10.6. Dans une homothétie de centre o, deux points distincts de o, u_1 et u_2 ont des images x_1 et x_2 qui ont la même abcisse dans les graduations déterminées par o et u_1, o et u_2.

Cette abcisse commune est le rapport de l'homothétie.

Pour qu'à tout binaire corresponde une homothétie de centre o, on devra admettre que le binaire nul, o, oooo ... est le rapport de l'homothétie dégénérée constante qui applique tout point du plan sur le centre o.

10.7. Dans une homothétie non constante ou une translation, une graduation d'une droite a pour image une graduation de la droite transformée.

Relativement à ces graduations, un point et son image ont la même abcisse.

Il suffit de remarquer qu'une dilatation transforme deux couples équipollents en des couples équipollents et une droite orientée, en une droite orientée.

XI. CORPS DES NOMBRES REELS

11.1. L'addition et la multiplication des binaires sont définies par transfert à partir de la composition des translations et des homothéties.

L'addition des points dans $(D_{ou}, +)$ servira à définir l'addition de leurs abcisses: la somme de celles-ci est, par définition, l'abcisse de la somme des points.

Il suit que l'ensemble des abscisses est un groupe commutatif pour l'addition. Par définition, la composée d'un couple d'homothéties aura pour rapport le produit de leurs rapports (dans l'ordre de composition).

L'ensemble des abcisses non nulles est un groupe pour la multiplication. On établit qu'il est commutatif.

11.2. Enfin, puisque toute homothétie, y compris l'homothétie nulle, transforme la somme d'un couple de vecteurs en la somme de leurs images, la multiplication des abcisses est distributive sur leur addition.

L'ensemble des abcisses des points d'une droite graduée quelconque muni de l'addition et de la multiplication est un corps indépendant de la droite choisie. Ce corps est appelé le c o r p s d e s n o m b r e s r é e l s.

XII. LE VECTORIEL REEL PLAN

12.1. Dans le plan muni de l'origine O, l e p r o d u i t d ' u n p o i n t a p a r u n n o m b r e r é e l α est le point b image de a dans l'homothétie de rapport α et de centre O.

Le groupe des points du plan avec origine, muni de cette multiplication par les réels, est un vectoriel.

Si on opère par rapport à une autre origine O' et si on a $\overrightarrow{Oa} = \overrightarrow{O'a'}$, l'image b' de a' dans l'homothétie de centre O' et de rapport α est telle $\overrightarrow{Ob} = \overrightarrow{O'b'}$

Le vecteur $\overrightarrow{Ob}$ obtenu est appelé le p r o d u i t d u v e c t e u r $\overrightarrow{Oa}$ p a r l e n o m b r e α . On écrit $\overrightarrow{Ob} = \alpha . \overrightarrow{Oa}$

Le groupe des vecteurs du plan muni de cette multiplication par les réels devient un vectoriel réel à deux dimensions isomorphe au vectoriel du plan.

12.2. La construction précédente édifie simultanément la géométrie affine du plan, le corps des réels et le vectoriel réel à deux dimensions. Elle introduit progressivement les axiomes en montrant par des modèles qu'ils apportent une information nouvelle et en déduisant les conséquences importantes de chaque apport.

La voie géométrique suivie fait intervenir dès le début des transformations du plan et les groupes qu'elles constituent éventuellement.

Ce sont les propriétés de deux groupes de translations et d'homothéties qui servent de soutien intuitif et logique à la présentation du corps des nombres réels.

Le programme ci-dessus est couvert dans les deux premières années de l'enseignement secondaire.

XIII. PERPENDICULARITE

13.1. La géométrie métrique est construite au sein de la géométrie affine, déjà constituée, par l'introduction de la perpendicularité de deux directions (1).

La considération des quadrillages conduit à admettre les axiomes suivants:

P_1 Dans l'ensemble des directions du plan, il y a une relation symétrique: la p e r p e n d i c u l a r i t é.

P_2 Toute direction donnée du plan a une seule direction qui lui est perpendiculaire.

P_3 Deux directions perpendiculaires sont distinctes.

13.2. Deux droites sont perpendiculaires si elles appartiennent respectivement à deux directions perpendiculaires.

Des axiomes on déduit:

Deux droites perpendiculaires sont sécantes.

Par tout point donné, il y a une et une seule perpendiculaire à une droite donnée.

XIV. SYMETRIES AXIALES ORTHOGONALES

14.1. Une symétrie d'axe A est dite orthogonale si la direction de cette symétrie est perpendiculaire à l'axe A. Une telle symétrie est donnée par son axe.

En appliquant les propriétés de la symétrie axiale affine à la symétrie axiale orthogonale, on a:

---

(1) W. Servais, Metrical Geometry. Mathematics teaching no 30.

Une symétrie axiale orthogonale transforme une droite en une droite.

La composée de deux symétries orthogonales à axes parallèles est une translation qui est identique si les axes sont égaux.

La composée de deux symétries axiales orthogonales dont les axes sont perpendiculaires est la symétrie ayant pour centre le point d'intersection des axes. (Ce sont des symétries axiales conjuguées).

Pour toute paire de points, il y a une seule symétrie axiale orthogonale qui les échange.

14.2. Par pliage d'une feuille de papier suivant une droite passant par l'origine commune à deux demi-droites, on peut faire coïncider celles-ci.

D'où l'axiome:

B. Il y a (1) une symétrie axiale orthogonale qui échange deux demi-droites d'origine commune. Celle-ci appartient à l'axe.

XV. DEPLACEMENTS

15.1. La composée de deux symétries orthogonales dont les axes ont au moins un point commun est, par définition, u n e r o t a t i o n.

Un point commun aux deux axes est fixe: on l'appelle c e n t r e de la rotation.

S'il y a un second point fixe, la rotation est la transformation identique.

Une symétrie centrale est une rotation.

Etant donné un couple de demi-droites [ax [by, on peut trouver une composée de deux symétries axiales orthogonales qui transforme [ax en [by.

Il y a donc une translation ou une rotation qui transforme une demi-droite donnée en une demi-droite donnée.

---
(1) Il suffit de postuler l'existence sans l'unicité, celle-ci sera établie dans la suite (16.2)

15.2. On construit les images d'un ensemble de points donné par des composées de symétries axiales orthogonales. En faisant glisser un calque de l'ensemble initial sur le plan, on trouve qu'on peut le faire coïncider avec chaque image obtenue par la composée d'un nombre pair de symétries. Cette expérience nous conduit à la définition.

Un déplacement est la composée d'une succession de symétries axiales orthogonales en nombre pair.

Par suite:

La transformation identique est un déplacement.
Les translations et les rotations sont des déplacements.
L'inverse d'un déplacement est un déplacement.
La composée d'un couple de déplacements est un déplacement.
L'ensemble des déplacements est un groupe pour la composition.

15.3. Il est évident que la transformation identique laisse invariante toute demi-droite.

En expérimentant avec un calque, nous trouvons que c'est le seul déplacement qui a cette propriété.

Nous admettrons l'axiome:

I Le seul déplacement qui laisse invariante une demi-droite donnée dans le plan est la transformation identique.

De cet axiome résulte qu'il y a un seul déplacement qui transforme une demi-droite donnée $[ax$ en une demi-droite donnée $[by$.

En effet, si $[ax = [by$, la propriété est vraie en vertu de I. Sinon, soit δ un déplacement qui porte $[ax$ sur $[by$.

Si δ' est un déplacement opérant de même, le déplacement $\delta^{-1} \circ \delta'$ laisse invariante la droite $[ax$.

On a donc $\delta^{-1} \circ \delta' = I$

d'où $\delta' = \delta$

Il s'ensuit que tout déplacement est une translation ou une rotation et qu'une rotation est déterminée par le couple d'une demi-droite issue de son centre et de l'image de cette demi-droite.

La composée de deux rotations de même centre est une rotation de même centre.

Les rotations de même centre constituent un groupe.

Aucun déplacement ne peut être une symétrie axiale orthogonale.

En effet, une telle symétrie a une droite fixe et la seule translation ou rotation qui a au moins une droite fixe est la transformation identique.

XVI. RETOURNEMENTS

16.1. **Quand un ensemble de points non collinéaire E est transformé par une symétrie axiale orthogonale en l'ensemble E', le calque de E ne peut être amené à coïncider avec E' qu'en le retournant sur le plan. Il en est de même quand E' est obtenu à partir de E par une succession d'un nombre impair de symétries axiales orthogonales.**

Cette expérience nous conduit à la définition: Un r e - t o u r n e m e n t du plan est une symétrie axiale orthogonale ou la composée d'une succession d'un nombre impair de symétries orthogonales.

16.2. On démontre les propositions suivantes:

Un retournement qui n'est pas une symétrie axiale orthogonale est la composée d'une telle symétrie par une rotation ou une translation.

Aucun retournement n'est un déplacement.

Il y a un seul retournement qui transforme une demi-droite donnée en une seconde demi-droite donnée.

Un retournement qui admet un point fixe au moins est une symétrie axiale orthogonale dont l'axe passe par ce point fixe.

Dans l'axiome B (14.2), la symétrie axiale orthogonale est unique. Son axe est appelé la b i s s e c t r i c e de l'angle des demi-droites.

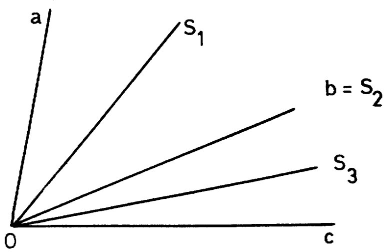
Une symétrie axiale orthogonale transforme une symétrie orthogonale en une symétrie orthogonale.

Par suite:

La symétrie axiale orthogonale transforme

1. la médiatrice d'un segment en la médiatrice de l'image de ce segment.
2. Deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires.
3. La bissectrice d'un angle en la bissectrice de l'image.

16.3. La composition des rotations de même centre est commutative. Soit la rotation ρ_1 qui transforme [oa en [ob et la rotation ρ_2 qui porte [ob sur [oc.



Si on désigne par $\sigma_1 . \sigma_2 . \sigma_3$ les symétries orthogonales qui ont respectivement pour axe la bissectrice S_1 de l'angle $\widehat{a\,o\,b}$

S_2 = ob

la bissectrice S_3 de $\widehat{b\,o\,c}$

on a $\rho_1 = \sigma_2 \circ \sigma_1$ et $\rho_2 = \sigma_3 \circ \sigma_2$

D'où $\rho_2 \circ \rho_1 = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_3 \circ \sigma_1$

Pour établir la commutativité $\rho_2 \circ \rho_1 = \rho_1 \circ \rho_2$

il suffit de démontrer que

$$\sigma_3 \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2$$

ou

$$\sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2 \qquad (1)$$

Le retournement $\sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_1$ a o pour point fixe.

C'est donc une symétrie axiale orthogonale.

De même $\sigma_1 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2$.

Comme une symétrie axiale orthogonale est égale à sa réciproque, l'égalité (1) est établie.

Les rotations de même centre constituent un groupe commutatif.

XVII. ISOMETRIES

17.1. Une isométrie est un déplacement ou un retournement.

L'ensemble des isométries est un groupe pour la composition.

Les déplacements en constituent un sous-groupe.

Un ensemble E est dit isométrique à un ensemble E' s'il y a une isométrie qui transforme E en E'.

La relation d'isométrie est une équivalence.

17.2. La classe d'équivalence des segments isométriques à un segment donné est la longueur de ceux-ci.

Etant donné un segment [a b] et une demi-droite [o x , il y a un seul déplacement δ qui porte la demi-droite [a b sur la demi-droite [o x .

Il y a aussi un seul retournement ρ qui transforme [a b en [o x. Comme ρ est le composé de δ par la symétrie orthogonale d'axe ox, dans les deux isométries δ et ρ , le point b a la même image c sur la demi-droite [o x.

D'où, étant donnés un segment [a b] et une demi-droite [o x il existe un et un seul point c de [o x tel que [o c] soit isométrique à [a b] .

A partir de ce report de longueur, on définit leur somme dont les propriétés découlent de la translation des couples sur la droite. Si la droite est graduée, on obtient la mesure d'une longueur comme nombre réel positif ou nul.

La définition du cercle et ses propriétés élémentaires par rapport aux symétries, aux rotations et aux translations s'introduisent immédiatement.

17.3. La classe d'équivalence des angles isométriques à un angle donné est l' o u v e r t u r e de cet angle.

Lorsque deux figures sont isométriques par déplacement, elles sont dites d i r e c t e m e n t isométriques.

Comme les déplacements constituent un groupe, l'isométrie directe est une relation d'équivalence.

XVIII. GROUPE DES ANGLES ORIENTES

18.1. Soit une rotation ρ dans laquelle [o a et [o b ont pour images respectives [o a' et [o b' .

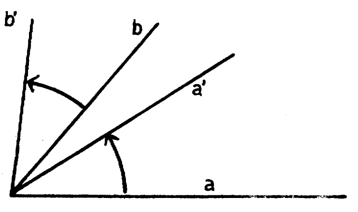
En vertu de la définition, les couples

([o a, [o b) et ([o a' , [o b')

sont isométriques directs.

Démontrons qu'il en est de même des couples

([o a, [o a') et ([o b , [o b') (1)



Soit ρ' la rotation qui transforme [o a' en [o b. La demi-droite [o a est transformée en [o b par la rotation $\rho' \circ \rho$.

La demi-droite [o a' a pour image [o b' dans la rotation $\rho \circ \rho'$.

En vertu de la commutativité

$$\rho \circ \rho' = \rho' \circ \rho$$

La rotation qui transforme [o a en [o b porte [o a' sur [o b' . Par suite, les couples (1) sont isométriques directs.

La classe des couples directement isométriques a un couple ([o a, [o b) est appelée l'a n g l e o r i e n t é de ces couples. Nous le notons

$$(\widehat{[oa\, ,\, [ob})$$

Dans une rotation, on a donc

$$(\widehat{[oa\, ,[oa'}) = (\widehat{[ob\, ,[ob'})$$

les demi-droites issues du centre et de leurs images respectives déterminent le même angle orienté appelé l ' a n g l e d e l a r o t a t i o n .

18.2. On démontre que la translation $\overrightarrow{oo'}$ transforme une rotation de centre o en une rotation de même angle orienté et de centre o'.

A la composée d'un couple de rotations correspond un angle orienté qui est indépendant du centre de rotation. Par définition, cet angle orienté est la s o m m e d e s a n g l e s o r i e n t é s des rotations données.

L'ensemble des angles orientés, muni de l'addition, est un groupe commutatif isomorphe au groupe des rotations de même centre arbitraire.

XIX.

Cette première étude la géométrie euclidienne est complétée par l'introduction du produit scalaire et du groupe des similitudes engendré par les isométries et les homothéties.

Cette partie n'exige plus aucun axiome nouveau et se fait sans peine.

XX. CONCLUSION

La présentation donnée de la géométrie et des reels demande seize axiomes qui sont introduits progressivement sur une base intuitive.

On a ainsi une élaboration génétique par laquelle l'élève se familiarise peu à peu avec le contenu de chaque groupe d'axiomes et sa portée.

Des interprétations variées soulignent la polyvalence des systèmes axiomatiques.

Les dilatations, les vecteurs et les nombres réels sont vus en étroite connexion avant les notions métriques de longueur et d'angle.

Les groupes de transformations interviennent d'une façon constante comme outils de construction. Les équivalences correspondant aux divers groupes servent à définir les notions géométriques fondamentales: vecteurs, longueurs, angles orientés comme classes d'équivalence.

Pareille étude, avec des variantes, est faite dans les trois premières années de l'enseignement secondaire à des élèves de 12 à 15 ans.

Ceux-ci disposent alors, au seuil du cycle supérieur, de tout le bagage de notions qui rend naturel l'exposé fait par la voie royale, plus abstraite, basée sur les axiomes du corps des réels, du vectoriel réel et du vectoriel euclidien, donnés, sans parachutage, à des esprits préparés à les comprendre et à estimer toute l'économie rationnelle que leur emploi fait réaliser.

IL FAUT METTRE L'ACCENT DES QUE POSSIBLE SUR LA NOTION DE MORPHISME

par
André Revuz
Poitiers

Le thème général du séminaire d'Echternach était: "Les répercussions de la recherche mathématique sur l'enseignement". Un mauvais plaisant aurait pu répondre qu'il n'y avait pas matière a discussion, soit en remarquant qu'on n'enseigne rien qui n'ait fait, en son temps, l'objet d'une recherche, soit à l'opposé, en constatant que presque rien de ce qui fait l'objet des recherches contemporaines ne soit matière à enseignement, sauf en quelques rares lieux privilégiés. Cependant les organisateurs du séminaire ont eu pleinement raison de choisir ce thème, car c'est en visant à combler le fossé qui sépare actuellement recherche et enseignement général, que l'on fera de ce dernier un enseignement de qualité.

La recherche devrait féconder l'enseignement de deux manières: en lui donnant l'exemple de l'esprit en activité, et en lui indiquant quels sont en Mathématiques les thèmes essentiels auxquels il faut consacrer la plus grande part d'efforts, qui sont souvent gaspillés dans des directions sans issue.

Le chercheur est au contact de problèmes dont tout le monde ignore la solution; mieux, la formulation même de ces problèmes est un premier et difficile problème. Le chercheur est au bord d'un domaine mal ou incomplètement exploré, il est en face d'êtres mathématiques qui sont encore mystérieux, que l'on ne sait par quel bout attaquer et ce qu'il veut, c'est d'abord trouver la ligne d'attaque, poser et résoudre la "bonne question", celle dont la réponse éclairera et rendra "évident" ce qui l'est encore si peu. Une fois la percée effectuée, il exploitera le succès, rassemblera les résultats, les ordonnera et finalement les publiera dans un exposé cohérent. La période la plus importante, la période à la fois douloureuse et passionnante, mais qui conditionne tout le reste, c'est la première, c'est celle du chaos originel dans lequel l'esprit fera jaillir la lumière. C'est celle où le désir de trouver l'explication anime l'esprit, celle où la motivation première est la plus forte, et où naissent les motivations des démarches ultérieures qui feront progresser la compréhension, mais qui n'apparaissent pas à première vue. C'est celle où le chercheur aura tâtonné, se sera engagé dans des impasses, aura commis des erreurs qui lui paraîtront stupides lorsqu'il aura trouvé la bonne voie, et c'est aussi celle sur laquelle il restera éternellement muet.

Et ce silence est sans doute l'origine de toutes les difficultés de l'enseignement des mathématiques. Car il est impossible de comprendre une théorie mathématique, si elle n'apparaît pas comme la réponse à une question. Sans doute, a-t-on vu au cours de l'histoire, des théories bâties pour répondre a une question connaître un développement considérable et répondre à bien d'autres questions tellement plus importantes que la première,que celle-ci a fini par paraître futile. Mais cela ne justifie pas la prétention de certains exposés à vouloir paraître hors du temps. Car l'homme, qui doit faire progresser la mathématique, ou l'homme qui se contente de la comprendre, vivent dans le temps. Sans motivation suffisante, un exposé mathématique est incompréhensible. Et c'est précisément le paradoxe que le monde de la recherce où la motivation est vécue de façon si intense ne livre que des produits finis où elle est souvent presque totalement absente.

Faire part de ses tâtonnements n'est sans doute guère possible, et peut-être pas souhaitable, encore que l'indication du contre-exemple qui épargnera la recherche vaine et délimitera la validité de la théorie soit toujours recommandable, mais faire sentir avec sobriété dans l'exposé le cheminement vivant des idées n'en gâterait nullement la valeur mathématique et en augmenterait singulièrement la valeur humaine de communication d'une pensée. Or c'est un souci qui n'est pas toujours manifeste dans la littérature mathématique. Il n'est pas difficile d'en déceler les raisons, qui sont de valeur très inégale.

Le chercheur pense surtout en écrivant à ceux qu'il estime au moins aussi forts que lui et dont il recherche l'approbation, et il croit - a-t-il toujours raison? - que peu d'explications lui suffiront alors pour être compris. Rendre son texte plus accessible lui demanderait un temps qu'il peut estimer plus utilement consacré à poursuivre ses recherches. Il peut aussi avoir l'idée, très aristocratique, que ceux qui ne sont pas capables de comprendre rapidement sans plus d'explications ne sont pas dignes d'intérêt et que de la sorte, on écarte automatiquement les esprits inaptes à cultiver avec profit cette belle et redoutable Science. Exposer ses motivations peut lui paraître à la fois fastidieux et superflu, et c'est sans doute inutile pour ceux qui sont familiers avec son domaine de recherche. Mais les dissimuler, c'est accroître artificiellement la difficulté qu'auront les autres à y accéder. Exposer sèchement et sans commentaires ses résultats est peut-être aussi une manifestation de modestie - mais est-elle toujours authentique? - en tous cas, cela revient à loger derrière la même façade aveugle ce qui répond à une question importante et ce qui n'est qu'une bonne remarque.

Sans doute, tout cela ne gêne-t-il pas beaucoup le lecteur averti, et certains pourront même prétendre que la difficulté peut lui être un aiguillon. Mais il n'est pas niable que cette manière d'exposer soit un frein à la diffusion des idées. On pourrait attendre des échanges oraux qu'ils corrigent la sécheresse inévitable de la transmission écrite. Le font-ils toujours? Le font-ils même souvent? Que d'exposés traumatisants dont les victimes ne se libèrent qu'en en traumatisant d'autres à leur tour! Et l'exemple venant de haut, il n'est pas surprenant que tout l'enseignement soit empoisonné par l'image inconsciente d'une mathématique mystérieuse, antinaturelle, inhumaine, que seuls des adeptes triés sur le volet peuvent maîtriser.

Une théorie mathématique est la mise en oeuvre, au moyen d'une technique minutieuse, d'idées souvent très simples. La simplicité de ces idées ne signifie nullement qu'il soit aisé de les faire naître. D'autre part, sans la technique qui leur permet d'agir, elles sont impuissantes et la technique de son côté n'est féconde que si elle est animée par l'idée.

Cependant, la simplicité des idées et la peine que l'on aurait parfois à en expliquer la genèse fait qu'on ne les mentionne que peu ou pas et que l'on expose seulement ou surtout l'aspect technique qui, privé de son âme, est fastidieux et rebutant.

Il n'est peut-être pas facile de trouver un style mathématique vivant (encore qu'on puisse en donner des exemples: l'oeuvre de F. Riesz, les Mémoires de Denjoy sur la dérivation et la totalisation), mais moins que la difficulté du problème, ce que je redoute c'est que beaucoup estiment qu'il n'y a pas de problème, et ce que je désirerais c'est que des mathématiciens d'un calibre plus lourd que le mien expriment tout haut la nécessité d'adopter un style plus ouvert. Car la question est de savoir, si le monde de la recherche doit être une citadelle close, hérissée de barrières, éventuellement découpée en fortins isolés, ou si ce doit être le foyer qui rayonne dans l'Université prise au sens le plus large et au-delà dans la société tout entière. Dans les nations les plus favorisées quant à l'instruction, la Science est subie comme un phénomene extérieur par la grande majorité de la population. Ce n'est sain, ni pour la Science, ni pour la Société et les conséquences peuvent en être très graves pour l'avenir de l'une et de l'autre.

La diffusion de la Science est freinée non seulement par le style des publications, mais aussi par l'insuffisance de leur nombre et de leur diversité.

Entre la littérature des périodiques scientifiques, dont l'exubérance n'exclut pas le paradoxe qu'il existe des théorèmes importants et "bien connus" dont la démonstration n'a jamais été imprimée nulle part, et les manuels du niveau licence, il y a place pour toute une gamme d'ouvrages de synthèse et d'exposition motivée. Il en existe, (le livre de S. Mac Lane sur l'Homologie en est un bon exemple), mais on aimerait les voir se multiplier et élargir l'éventail de leurs niveaux.

Il y a place, à côté, pour des ouvrages de diffusion plus large faisant une très grande place aux motivations et au cheminement des idées (l'exposé de J. Dieudonné à ce même séminaire d'Echternach en donne le ton d'excellente manière) et renvoyant par exemple, aux ouvrages du type précédent pour les indispensables développements techniques. Au lieu de présenter d'emblée l'aspect technique, il est bon de commencer par montrer ce que sont les grandes idées pour donner l'envie d'aborder la technique qui permettra de les mettre à l'oeuvre. Il ne faut pas craindre, au-delà, d'utiliser tous les moyens de communication pour diffuser une authentique culture et présenter au plus grand nombre de nos concitoyens le vrai visage de notre Science, dont ils ne connaissent, en général, qu'une triste caricature.

Nous voila bien loin de la recherche, me dira-t-on. Erreur! car ce n'est que du sein de la recherche que peuvent venir l'influx moteur et les directives exactes: on ne peut valablement diffuser une connaissance ou un mode de pensée que si on les maîtrise suffisamment dans leur état actuel et si l'on participe à leur devenir. Vérité première, que l'on aurait honte de rappeler, si elle n'était souvent étrangement méconnue.

Mais les chercheurs ont autre chose à faire! oui, si le malthusianisme qui est trop souvent la règle préside à leur recrutement. Non, si l'on veut bien ne pas lésiner, ni augmenter artificiellement les difficultés de la recherche, mais constituer de puissantes équipes dont le travail en commun sera fécond dans le domaine de la découverte, mais pourra avoir en même temps pour produit naturel des publications soigneusement rédigées. Des équipes dynamiques et enthousiastes pourront sans s'affaiblir consacrer une partie de leur activité à la diffusion la plus large possible.

Alors, il ne sera plus question des "Répercussions" de la recherche sur l'enseignement, mais de l'influence continue et vivifiante de la recherche sur l'enseignement. Perspective lointaine, dira le sceptique. Elle sera d'autant moins lointaine que l'on se mettra plus vite au travail, même dans les conditions peu favorables qui sont souvent la règle aujourd'hui, mais que l'exemple d'un travail sérieux contribuera à modifier.

L'objectif essentiel qui conditionne tout le reste est un changement de mentalité: lorsqu'aura disparu l'idée que recherche et enseignement appartiennent à deux mondes qui s'ignorent, ou même qui s'opposent, la victoire ne sera plus éloignée. Et la recherche ne sera pas la dernière à y gagner, car la situation d'une avant-garde coupée du gros de l'armée ne peut se prolonger sans danger.

Il est temps de passer à la seconde partie de cet exposé, celle à laquelle se réfère le titre, et où je voudrais sur un point particulier remplir le second des devoirs rappelés au début: indiquer les directions fécondes.

La notion de structure, surtout de structure algébrique, a acquis droit de cité dans l'enseignement moyen de nombreux pays. Elle met de l'ordre et de la beauté dans un domaine qui en manquait singulièrement.

Celle d'homomorphisme par contre n'a pratiquement pas pénétré. Il n'y a à cela aucune autre raison qu'un manque d'information du corps enseignant qui , même s'il n'ignore pas la notion, a pu être effrayé par certains aspects techniques et n'en a pas vu la profonde simplicité qui - je ne me lasserai pas de le répéter - éclaire et rend aisée la technique d'utilisation.

Dans le titre j'ai utilisé non le mot d'homomorphisme, mais celui de morphisme dont l'usage s'est introduit avec la théorie des catégories. Aussi certains ont-ils conclu presque aussitôt que je voulais introduire la théorie des catégories dans l'enseignement moyen. Ce point mérite une réponse précise. Liquidons d'abord la question de vocabulaire. Avant la théorie des catégories, la racine "morphisme" n'était jamais utilisée seule en Algèbre, mais toujours munie d'un préfixe (homo, iso, auto, endo, mono, épi) qui chacun avait un sens bien précis sauf le premier, l'homomorphisme étant le plus général de son espece. Autant donc supprimer ce préfixe sans valeur (ce qui permettra de récupérer homomorphisme pour lui donner un sens précis) et adopter la terminologie des catégories avec laquelle il y aura coïncidence pour les structures algébriques (pour les structures topologiques, les morphismes sont les applications continues, pour les structures algébrico-topologiques ce sont les applications qui sont à la fois des morphismes algébriques et des morphismes topologiques).

En ce qui concerne l'introduction de la théorie des catégories dans l'enseignement moyen, cette idée ne peut soulever qu'une indignation ou un rire également énormes, tout au moins s'il s'agit de la technique et de l'appareillage de cette théorie qui n'ont rien à faire à ce niveau. Par contre, les idées qui lui ont donné naissance ont une valeur qui peut retentir sur des stades plus élémentaires.

On a reconnu que les êtres mathématiques vivent en société, et qu'une étude valable ne devait pas les considérer isolément, mais comme éléments d'ensembles munis de structures. Mais les structures aussi vivent en société (qui constituent les catégories) et il existe des relations entre ces structures, et ce sont les morphismes qui les expriment. Et de même que l'on a reconnu l'intérêt de l'étude des relations entre éléments de divers ensembles, indépendamment de la nature de ces éléments, on a reconnu que les relations entre structures pouvaient dans certains cas être avantageusement étudiées indépendamment de la nature de ces structures, si bien que l'élément primitif de la théorie des catégories devient le morphisme et non plus la structure.

De tout cela, qu'est-ce qui peut et doit passer dans l'enseignement moyen? Cette idée, toute simple et très importante, qu'on peut exprimer ainsi: "Si les structures sont importantes, les applications qui sont compatibles avec ces structures le sont aussi". Ces applications ne sont autres que les morphismes.

S'agissant de structures algébriques, la définition précise est la suivante: Soient E_1 et E_2 deux ensembles munis de lois de composition (ce qui est synonyme de E_1 et E_2 ont reçu, chacun, une structures algébrique). Nous nous limiterons au cas de lois internes. f, application de E_1 dans E_2 est un morphisme pour les structures de E_1 et E_2, si à toute loi (notée par exemple $*$) de E_1 correspond une loi (notée $\times$) de E_2, de telle sorte que pour tout couple(x, y) d'éléments de E_1, on ait

$$f(x * y) = f(x) \times f(y)$$

Le cas le plus simple, par lequel il faudra commencer, est celui où une seule loi est définie sur chaque ensemble E_1 et E_2.

S'agit-il là de propriétés mystérieuses? Nullement, on remarquera que les fonctions simples et importantes sont des morphismes:

1°) l'application $f : x \longrightarrow k\,x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un morphisme de la structure de groupe additif de $\mathbb{R}$, car il vérifie

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad (1)$$

Cette application est connue des élèves de 10 ans, en France, auxquels on s'ingénie à la présenter sous le déguisement compliqué des "nombres proportionnels".

Et l'on sait que si l'on cherche toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient (1) pour tout couple de réels et qui, en plus, sont monotones, ou bien sont continues on trouve les applications linéaires $x \longrightarrow k\,x$. Autrement dit ces applications linéaires sont les automorphismes de la structure de groupe topologique de $\mathbb{R}$, les automorphismes de sa structure de groupe ordonné si $k > 0$, et des isomorphismes du groupe ordonné $\mathbb{R}$ dans le groupe ordonné $\mathbb{R}$ muni de l'ordre opposé si $k < 0$. [Que ce soient des morphismes pour les structures de groupe ordonné et de groupe topologique tient à ce que la topologie de $\mathbb{R}$ peut être dérivée de l'ordre de $\mathbb{R}$].

2°) l'application $x \longrightarrow a^x$ pour $a \neq 1$ est de même un isomorphisme du groupe additif ordonné (resp. topologique) de $\mathbb{R}$ dans le groupe multiplicatif ordonné (resp. topologique) de $\mathbb{R}^+ - \{0\}$, ensemble des réels strictement positifs.

Autrement dit, les fonctions élémentaires les plus importantes sont des morphismes, et c'est ce qui fait leur importance. Vaut-il mieux le cacher aux élèves, ou le leur faire voir?

Mais on peut aller plus loin et montrer dans l'enseignement moyen que la notion de morphisme n'a pas seulement une vertu de classification, mais que c'est un outil qui permet d'attaquer des problèmes. A cet égard, c'est le théorème sur la factorisation des morphismes algébriques qui est fondamental. Ce théorème peut paraître compliqué si on le prend par le petit côté, il est au contraire extrêmement naturel si on met en lumière les idées simples qui le motivent:

a) A la base se trouve la factorisation d'une application quelconque. Une application f d'un ensemble E_1 sur un ensemble E_2 n'est en général ni surjective, ni injective, mais elle peut être factorisée (pour la composition des applications) en une application surjective suivie d'une bijective, suivie d'une injective.

Non surjective veut dire $f(E_1) \neq E_2$, mais si l'on considère l'application g de E_1 sur $f(E_1)$ définie par $f(x) = g(x)$, et l'application i de $f(E_1)$ dans E_2 définie par $i(y) = y$ (injection canonique de la partie $f(E_1)$ dans l'ensemble E_2 qui la contient), on a $f = i \circ g$, avec i injective et g surjective.

g n'est pas injective en général, c'est-à-dire que la relation R définie par $g(x) = g(y)$ sur E_1, qui est manifestement une relation d'équivalence n'est pas l'identité. Si $\dot{x}$ désigne la classe de x pour R, et E/R l'ensemble de ces classes, l'application φ qui à $x \in E_1$ fait correspondre sa classe $\dot{x}$ est une surjection de E_1 sur E_1/R. Les éléments d'une classe étant d'autre part ceux qui ont pour image par f le même élément de $f(E_1)$, on peut définir une application h de E_1/R sur $f(E_1)$ en posant $h(\dot{x}) = f(x)$. Cette application h est alors bijective. Il existe une application réciproque k de $f(E_1)$ sur E_1/R telle que k o h soit l'identité sur E_1/R et h o k l'identité sur $f(E_1)$.

Le diagramme ci-dessous résume l'analyse précédente:

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "g"] & E_2 \\ E_1/R \arrow[r, shift left, "h"] & f(E_1) \arrow[u, "i"'] \arrow[l, shift left, "k"] \end{tikzcd}$$

b) Supposons que E_1 ait une structure de groupe et que f soit un morphisme de E_1 dans E_2 (muni d'une loi de composition). On montre aisément que $f(E_1)$ a une structure de groupe pour la loi de E_2 , et g est dans ce cas un morphisme surjectif (épimorphisme) du groupe E_1 sur le groupe $f(E_1)$.

On peut factoriser g comme ci-dessus. Mais on remarque alors que, tandis que E_1 et $f(E_1)$ ont chacun une structure algébrique pour lesquelles g est un morphisme, E_1/R est pour l'instant dépourvu de structure. D'où la question: Est-il possible de lui en attribuer une de telle sorte que φ et h soient des morphismes?

La réponse est presque évidente: car k étant une bijection permet de transporter sur E_1/R la structure de groupe de E_2, et comme le composé de deux morphismes est un morphisme, φ = k o g en est bien un.

On pourra ultérieurement faire remarque aux élèves que le fait que les structures de E_1 et $f(E_1)$ soient des structures de groupe n'est pas intervenu spécifiquement, et que le résultat serait vrai pour toute structure algébrique de E_1 et tout morphisme dans E_2. Il est bon aussi que le professeur sache que pour les structures topologiques, il n'en va pas de même. Cela tient à ce que pour les structures algébriques, le fait que f soit un morphisme détermine entièrement la structure de $f(E_1)$, tandis que dans le cas d'espace topologique où les morphismes sont les applications continues, le fait que f soit une application continue de E_1 sur $f(E_1)$ ne détermine pas la topologie de ce dernier espace (cela permet seulement d'affirmer qu'elle est moins fixe qu'une topologie bien déterminée qu'il faudrait alors transporter sur E_1/R pour effectuer la factorisation).

c) Mais on ne s'arrêtera pas là. Il faut maintenant introduire un peu de technique et voir si la relation R peut prendre une forme simple.

Reprenons le cas où E_1 est un groupe. La relation $f(x) = f(y)$ qui exprime l'égalité de deux éléments du groupe $f(E_1)$ est équivalente à $f(x)[f(y)]^{-1} = e_2$ (e_2: élément neutre de $f(E_1)$, les lois sont notées multiplicativement). Mais f étant un morphisme, $[f(y)]^{-1} = f(y^{-1})$ et $f(x)\ f(y^{-1}) = f(x\ y^{-1})$. La relation R peut donc s'écrire

$$x\ y^{-1} \in \overset{-1}{f}(e_2)$$

où $\overset{-1}{f}$ désigne l'application réciproque de f (pour les ensembles de parties de E_1 et E_2 : $\overset{-1}{f}$ envoie l'ensemble des parties de E_2 dans l'ensemble des parties de E_1).

Le fait que $\overset{-1}{f}(e_2)$ soit un sous-groupe g de E_1 (appelé le noyau de f et noté Ker f) saute aux yeux.

Mais ce résultat obtenu se pose la question de la réciproque:

α) g étant un sous-groupe de E_1, la relation $x\ y^{-1} \in g$ est-elle une relation d'équivalence R? La réponse est immédiatement oui.

β) Peut-on munir l'ensemble-quotient E_1/R d'une opération telle que l'application canonique φ de E_1 sur E_1/R soit un morphisme?

Cette opération (notée $*$) doit vérifier

$$\varphi\ (x) * \varphi\ (y) = \varphi\ (x\ y)$$

autrement dit, si x et y décrivent chacun une classe, le composé x y doit demeurer dans une seule classe.

Si E_1 est commutatif, on vérifie sans difficulté qu'il en est bien ainsi. On a donc un moyen systématique de trouver les structures de tous les groupes qui peuvent être image de E_1 par un morphisme de groupe.

Si E_1 n'est pas commutatif, on se heurte à une difficulté qui peut paraître sérieuse aux élèves et qu'il n'y a pas lieu de minimiser ni de lever d'un coup de baguette magique. Il peut être bon de laisser la question en suspens quelque temps, d'examiner de plus près les groupes non commutatifs que l'on rencontre assez tôt: groupes de permutation (S_3 et S_4 en particulier), groupes de transformation du plan et d'en chercher les sous-groupes.

On peut aussi chercher un moyen commode d'écrire les classes d'équivalence de la relation $x\ y^{-1} \in\ g$ et on trouve que $\dot{x} = x\ g$ qui est l'ensemble des produits de x par tous les éléments de g. Avec cette notation, ce que l'on voudrait trouver c'est

$$x\ g\ \ y\ g \subset x\ y\ g\ .$$

Et la difficulté est de savoir si on peut faire "sauter" y, c'est-à-dire si pour tout y de E_1, on a $g\ y = y\ g$.

On peut aussi se rappeler que $g = \text{Ker } f$ et que peut-être les propriétés de Ker f n'ont pas toutes été repérées. Précisément Ker f possède la propriété en question, et n'est donc pas un sous-groupe quelconque. Il n'y a plus qu'à conclure et on a l'essentiel sur les morphismes de groupes.

d) Ce pas franchi, les morphisme d'anneau, les notions d'idéal et d'idéal bilatère seront obtenues et étudiées sans difficulté.

e) Il ne faut pas s'en tenir à ces résultats, mais les appliquer: constater l'existence d'un morphisme est souvent si évident que l'esprit inexpérimenté peut penser que cela ne l'avance à rien, cependant grâce au théorème sur la factorisation cela peut lui donner soit immédiatement la solution, soit une ligne d'attaque.

Exemples:

a) Structure des groupes à un générateur.

Si G a un générateur unique a, et si l'opération est notée multiplicativement G est constitué des puissances de a (l'élément neutre étant a^o), la loi de composition des puissances de a est

$$a^n . a^m = a^{n+m}$$

où n et m appartiennent à $\mathbb{Z}$.

Cela signifie que l'application $n \longrightarrow a^n$ est un morphisme du groupe $\mathbb{Z}$ sur G, donc G est isomorphe à un groupe quotient de $\mathbb{Z}$. Pour avoir les structures de groupe quotient de $\mathbb{Z}$, il faut connaître ses sous-groupes, problème classique qui reçoit ici une motivation forte et conduit à la structure des groupes cycliques.

b) Structure des groupes commutatifs à deux générateurs.

Si l'on utilise la notation additive, et si a et b sont les générateurs, tout élément du groupe s'écrit n a + m b, où n et m appartiennent à $\mathbb{Z}$, et on a un morphisme de $\mathbb{Z}^2$ sur G. On est alors amené à chercher les sous-groupes de $\mathbb{Z}^2$. Ce n'est pas si simple au premier abord.

Le plus difficile n'est d'ailleurs pas de trouver les sous-groupes de $\mathbb{Z}^2$, cela ne demande pas une très grande imagination, mais c'est de montrer qu'on les a effectivement tous obtenus. On peut résoudre le problème avec des élèves de la dernière classe de l'enseignement moyen; cela n'est pas impossible, et sera très formateur, si la solution n'est pas donnée d'emblée par le professeur, mais si, par exemple, s'aidant de la représentation graphique de $\mathbb{Z}^2$ dans le plan, et des sous-groupes auxquels on a pu penser, et ayant constaté qu'ils ont tous une base en tant que $\mathbb{Z}$ - module, on arrive à la question: Tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire tous les sous - $\mathbb{Z}$ - modules de $\mathbb{Z}^2$, ont-ils, en tant que tels, une base? puis la réponse affirmative étant obtenue, y a-t-il des bases plus commodes que d'autres? etc...

Ce qui, de toute manière, aura été enrichissant pour l'élève aura été de voir, comment en cherchant à résoudre un problème, il a été amené à s'en poser une série d'autres, nettement formulés, dont certains sont très intéressants en eux-mêmes, dont d'autres auraient pu paraître à priori de moins d'intérêt, mais qui reçoivent tous une motivation forte parce qu'ils vont permettre de répondre à l'assez générale question initiale.

c) La recherche des corps premiers fournit encore un exemple d'application du théorème de factorisation des morphismes, d'anneaux cette fois.

L'intersection de tous les sous-corps d'un corps est un corps qui ne contient évidemment pas de sous-corps distincts de lui: un tel corps est dit premier. Le problème est de savoir si on peut les déterminer tous à priori. Pour cela, on peut essayer de les construire, en justifiant intuitivement cette tentative, du fait que, de par leur définition, ils doivent être assez "petits", et en remarquant qu'un corps k contient au moins l'élément neutre de l'addition que nous notons 0, et l'élément neutre de la multiplication que nous notons e, et par suite tous les éléments de la forme n e , avec $n \in \mathbb{Z}$, qui se composent suivant les lois

$$n\,e + m\,e = (n + m)\,e$$

$$n\,e \cdot m\,e = n\,m\,e$$

c'est-à-dire qu'il y a un morphisme d'anneau φ de $\mathbb{Z}$ dans k. $\varphi^{-1}(0)$ est un idéal J de $\mathbb{Z}$ et k contient un anneau isomorphe à $\mathbb{Z}/J$. Cet anneau inclus dans un corps est sans diviseur de zéro, J est donc premier, c'est soit l'idéal (0) auquel cas k contient un anneau isomorphe à $\mathbb{Z}$ et est lui-même isomorphe à $\mathbb{Q}$, soit l'idéal (p) engendré par un nombre premier p auquel cas $\mathbb{Z}/(p)$ est le corps des entiers modulo p, et k lui est isomorphe. Le problème est résolu.

De ces développements, nous pensons pouvoir retenir deux règles didactiques:

a) L'introduction des notions mathématiques doit être effectuée "tôt et progressivement", contrairement à l'usage fréquent qui obéit à la règle "tard et brutalement". Chaque fois que quelque chose "marche bien", il faut en chercher et en donner la raison: c'est en général que l'on a affaire à une bonne structure (celle de groupe qui signifie que la loi de composition est associative et que les équations a x = b et x a = b ont une solution, quels que soient a et b en est l'exemple le plus simple et peut-être le plus frappant) , ou à un morphisme de structure simple, telle la fonction linéaire, qui est présentée aux élèves de 10 ans, sous le déguisement des "nombres proportionnels" ce qui ne simplifie rien, bien au contraire.

A partir des matières les plus traditionnellement enseignées, et sous la seule condition de ne pas détourner exprès les yeux, on peut dégager de nombreux exemples de structures algébriques simples et de morphismes de ces structures et arriver à ce que les élèves de 18 ans maîtrisent ces notions et aient acquis à l'égard des problèmes un esprit agressif, entrainé à réduire la difficulté à son obstacle essentiel et à forger l'outil pour le franchir.

b) Les idées simples doivent être présentées avec le minimum de technique qui permette de les appliquer, puis la technique doit être raffinée au fur et à mesure des besoins et de telle sorte qu'elle apparaisse bien comme ce qu'elle est, le moyen de donner aux idées toute leur puissance, c'est-à-dire le moyen de résoudre des problèmes de portée de plus en plus grande.

INTRODUCTION PAR LA THEORIE DES NOMBRES AUX NOTIONS DE GROUPE, D'ANNEAU ET DE CORPS

par
Ch. Pisot
(Paris)

La théorie des nombres est une partie des mathématiques traîtée dans l'enseignement secondaire depuis les classes les plus élémentaires, ce qui permet de l'utiliser pour donner des exemples non triviaux des notions si importantes de groupe, anneau, corps. Ces exemples sont ainsi davantage capables de faire comprendre l'importance de ces notions et montrent que ce ne sont pas seulement des étiquettes placées sur des faits bien connus.

L'exposé trouverait sa place dans les toutes dernières classes de l'enseignement secondaire, préparant les premières années universitaires.

On commence d'abord par rappeler que l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs possède les propriétés suivantes:

Soient $x \in \mathbf{Z}$, $y \in \mathbf{Z}$, $z \in \mathbf{Z}$ arbitraires, alors on a

$x + y = y + x \in \mathbf{Z}$; $xy = yx \in \mathbf{Z}$ (commutativité)

$x + (y + z) = (x + y) + z$; $x(yz) = (xy)z$ (associativité)

$x(y + z) = xy + xz$ (distributivité)

De plus l'addition possède un élément neutre, le nombre 0, tel que $x + 0 = x$ pour tout $x \in \mathbf{Z}$, et à chaque $x \in \mathbf{Z}$ correspond un élément "opposé", noté $-x$, de $\mathbf{Z}$, tel que $x + (-x) = 0$. Un ensemble dont les éléments ont ces propriétés sera appelé un <u>anneau</u> (commutatif).

On remarque déjà ici qu'il y a d'autres ensembles d'entiers qui sont des anneaux. Désignons par (m) l'ensemble des entiers multiples de l'entier fixe $m \neq 0$, alors (m) est un anneau, un <u>sous-anneau</u> de $\mathbf{Z}$. D'autres exemples sont fournis par l'anneau des polynômes, celui des fonctions continues.

Donnons maintenant un exemple de théorie des nombres, moins trivial: Soit $d \neq 0$ un entier fixe; dans l'ensemble $Z \times Z$ des couples d'entiers, pour $\xi = (x,x')$, $\eta = (y,y')$, nous définissons $\xi + \eta = (x+y,\ x'+y')$ et $\xi\eta = (xy + dx'y',\ xy' + x'y)$.

On vérifie facilement que cet ensemble constitue un anneau que nous appellerons $A = A(d)$. Soit $\xi = (x,x')$ un élément de A, nous posons $\xi^* = (x,-x')$ et

$$N(\xi) = \xi\xi^* = x^2 - dx'^2 \in Z \quad ;$$

on a alors la relation $N(\xi\eta) = N(\xi)\ N(\eta)$ pour tout $\xi \in A$, $\eta \in A$.

Si $\mu \in A$ est fixe, on peut considérer le sous-anneau (μ) formé des $\xi \in A$ tels qu'il existe $\xi' \in A$ avec $\xi = \xi'\mu$; (μ) est le sous-anneau des "multiples de μ ".

Etudions maintenant les sous-anneaux d'un anneau donné. Soit A cet anneau donné, M un sous-anneau de A. Nous posons $\alpha \backsim \alpha'$ si $\alpha - \alpha' \in M$; c'est une relation d'équivalence, comme on le vérifie sans peine. Les classes d'équivalence s'appellent classes modulo M et on écrit $\alpha \equiv \alpha'$ (mod M).

Exemple: Dans Z, soit (m) le sous-anneau des multiples de $m \neq 0$, alors $a \equiv a'$ (mod m) exprime que le reste de la division de a et de a' par m est le même.

Opérations sur les classes: Soit $\bar{\alpha}$ = classe $(\alpha\ ,\ \alpha'\ ,\dots)$ et $\bar{\beta}$ = classe $(\beta\ ,\ \beta',\ \dots)$. On pose $\bar{\alpha} + \bar{\beta}$ = classe $(\alpha+\beta\ ,\ \dots)$; cette définition est cohérente, en effet si $\alpha' = \alpha + \mu$, $\beta = \beta' + \nu$, $\mu \in M$, $\nu \in M$, alors

$$\alpha' + \beta' = \alpha + \beta + (\mu + \nu) \text{ et } \mu + \nu \in M \quad ,$$

donc la classe est indépendante des représentants particuliers choisis pour définir l'addition. Cette addition est commutative et associative.

Cherchons de même à définir le produit de deux classes, en essayant de poser $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$ = classe $(\alpha\beta\ ,\ \dots)$. Pour cela, avec les notations précédentes, on doit avoir

$(\alpha+\mu)\beta - \alpha\beta \in M$, donc $\mu\beta \in M$ quel que soit $\beta \in A$. Le sous-anneau M doit donc posséder une propriété supplémentaire. Nous définirons alors: un <u>idéal</u> I d'un anneau A est un sous-anneau de A tel que, quels que soient $\xi \in I$ et $\alpha \in A$, on ait $\xi\alpha \in I$. Si alors on suppose que le sous-anneau M est un idéal, on vérifie sans peine que la définition proposée du produit de deux classes est cohérente.

Exemple: On constate immédiatement que l'ensemble des multiples de m dans Z, donc le sous-anneau (m), est un idéal de Z. L'ensemble des classes de Z (mod m) forme donc un anneau de classes.

On a par exemple : $10 \equiv 1 \pmod 9$, donc $10^n \equiv 1 \pmod 9$ et $a_0 + 10a_1 + \dots + 10^n a_n \equiv a_0+a_1+\dots+a_n \pmod 9$ ce qui est la règle de divisibilité par 9.

Montrons encore un cas plus compliqué, la divisibilité par 7. On a $10 \equiv 3 \pmod 7$, d'où $10^2 \equiv 3^2 = 9 \equiv 2 \pmod 7$,

$$10^3 \equiv 3.2 = 6 \equiv -1 \pmod 7, \dots; \text{ par suite:}$$

$$a_0 + 10a_1 + \dots + 10^n a_n \equiv$$

$$(a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + (a_6 + 3a_7 + 2a_8) - \dots \pmod 7.$$

On voit facilement que dans tout anneau l'ensemble des éléments "multiples" d'un élément fixe, c'est à dire μ étant cet élément fixe de l'anneau, l'ensemble des éléments de la forme $\alpha\mu$, où α est un élément arbitraire de l'anneau, est un idéal de cet anneau; un tel idéal sera appelé <u>idéal principal</u> et noté (μ).

Une question qui se pose est alors de savoir si tout idéal d'un anneau est un idéal principal. Examinons d'abord le cas particulier de l'anneau des entiers Z. Soit $M \in Z$ un sous-anneau de Z. Si M était un idéal principal (m), tout $x \in M$ serait de la forme $x = x'm$ avec $x' \in Z$. Mais avec m, le nombre $-m \in M$, donc si on choisit $m > 0$, on a $|x| \geq m$, quel que soit $x \neq 0$, $x \in M$, donc m serait le plus petit nombre strictement positif de M . Étant alors donné le sous-anneau M arbitraire de Z , désignons par m le plus petit entier strictement positif de M . Comme m+m, m+m+m, ..., 0, - m, appartiennent à M , on aura $xm \in M$ pour tout $x \in Z$. Soit y un élément arbitraire de M , divisons y par m, on aura $y = qm+r$, avec $0 \leq r < m$; or $r = y - qm \in M$, donc comme m est le plus petit élément positif, on a $r = 0$. Ainsi. Théorème: Tout sous-anneau de Z est un idéal principal.

Application: Théorie du p.g.c.d. dans Z . Soient $a \in Z$, $b \in Z$ deux entiers donnés. L'ensemble des $x \in Z$ qui peuvent s'écrire sous la forme

$$x = ua + vb \ , \ u \in Z \ , \ v \in Z$$

est manifestement un sous-anneau de Z . D'après le théorème précédent c'est donc un idéal principal I ; il existe un entier $m > 0$ tel que tout $ua + vb$ soit de la forme qm avec $q \in Z$. En particulier, pour $u = 1$, $v = 0$ on a $a = a'm$, et pour $u = 0$, $v = 1$ on a $b = b'm$, $a' \in Z$, $b' \in Z$. D'un autre coté, m est lui aussi élément de I , donc il existe u_0, v_0 tels que $m = u_0a + v_0b$. Ainsi tout diviseur de m divise a et b et tout diviseur commun à a et b divise m; donc l'ensemble des diviseurs communs à a et b est identique à l'ensemble des diviseurs de m; m est le p.g.c.d. de a et b et on écrit $m = (a,b)$.

Théorème : Si $(a,b) = m$ alors $(ca, cb) = cm$, quel que soit $c \in Z$. En effet les égalités précédentes montrent que l'on a $ca = ca'm = a'(cm)$ et $cb = cb'm = b'(cm)$; d'autre part on a aussi $u_0(ca) + v_0(cb) = cm$.

Définition: On dit que a et b sont premiers entre eux si $(a,b) = 1$; alors l'idéal engendré par a et b est l'anneau Z tout entier. On a alors:

Théorème d'Euclide: Si $(a,b) = 1$ et si a divise bc, alors a divise c. En effet $(ac, bc) = c$, a divise ac et, par hypothèse a divise bc, donc a divise leur p.g.c.d.

c'est-à-dire c. Ce théorème est le théorème fondamental pour l'unicité de la décomposition d'un nombre en nombres premiers.

Autre application: Si $(a,b) = 1$, l'équation $ax+by= c$ est toujours résoluble en entiers x,y. En effet l'idéal engendré par a et b est alors $\mathbf{Z}$ tout entier, en particulier c possède une représentation sous la forme indiquée. Si x_0, y_0 est une solution particulière $ax_0+by_0=c$, on a, par différence $a(x-x_0) = -b(y-y_0)$; mais $(a,b) = 1$ il existe donc $n \in \mathbf{Z}$ tel que $x-x_0 = nb$, alors $y-y_0= -na$; réciproquement quel que soit l'entier n, $x = x_0 + nb$, $y = y_0 - na$ est solution entière de l'équation proposée; on a ainsi obtenu toutes ses solutions entières.

L'affirmation que tout idéal d'un anneau est principal n'est cependant pas vraie dans tous les anneaux. Considérons en effet l'anneau $A(-5)$ défini au début et le sous-ensemble I de cet anneau des éléments ξ de la forme $(u, 0)\alpha + (v,0)\beta$ où $\alpha = (2,1)$, $\beta = (3,0)$, $u \in \mathbf{Z}$, $v \in \mathbf{Z}$, arbitraires. Au lieu de $(u,0)\alpha$, on écrira de façon abrégée $u\alpha$.

Pour $\eta = (y,y') \in A(-5)$, on a

$$\alpha\eta = (2y-5y', y+2y') = (y+2y')\alpha - 3y'\beta,$$
$$\beta\eta = (3y,3y') = 3y'\alpha + (y-2y')\beta;$$

donc $\alpha\eta \in I$ et $\beta\eta \in I$, par suite quels que soient $\xi \in I$, $\eta \in A(-5)$, on a $\xi\eta \in I$; ainsi I est un idéal de $A(-5)$.

Or cet idéal n'est pas principal. En effet, supposons qu'il existe $\mu = (m,m')$ tel que $I = (\mu)$, alors on aurait $\alpha = \xi\mu$ et $\beta = \eta\mu$, avec $\xi \in A(-5)$, $\eta \in A(-5)$. Or $N(\alpha) = 4 + 5 = 9$ et $N(\beta) = 9 + 0 = 9$. Donc $N(\mu)$ diviserait 9.

Si l'on supposait $N(\mu) = 9$, on aurait $N(\xi) = N(\eta) = 1$, c'est-à-dire $x^2 + 5x'^2 = y^2 + 5y'^2 = 1$, donc ξ et η seraient de la forme $(\pm 1, 0)$ et $\alpha = \pm\mu$, $\beta = \pm\mu$, par suite $\alpha = \pm\beta$, ce qui n'est pas.

Si l'on supposait $N(\mu) = 3$, on aurait $m^2 + 5m'^2 = 3$, ce qui est impossible.

Enfin si l'on supposait $N(\mu) = 1$, on aurait $\mu = (\pm 1, 0)$ et tout $\xi \in A(-5)$ appartiendrait à I. Or, par exemple $\xi = (1,0)$ n'est pas un élément de I, car le système $2u + 3v = 1$, $u = 0$ n'a pas de solution en nombre entiers.

Il n'est donc pas possible que I soit un idéal principal.

Posons-nous maintenant la question de savoir s'il est possible que la division soit toujours possible dans un anneau, en analogie avec la soustraction qui, elle, est toujours possible. Pour cela, il faut d'abord que l'égalité $\alpha = \alpha\gamma$ ait lieu pour tout α de l'anneau, en d'autres termes l'anneau doit posséder un élément neutre pour la multiplication, une "unité"; dans ce cas on dira que l'anneau est "unitaire". Exemple: L'anneau **Z** est unitaire avec pour unité 1, mais tous les sous-anneaux (m), $m \neq 0$, $m \neq \pm 1$ ne sont pas unitaires. Considérons encore le cas de l'anneau A(d) introduit au début. Soit $\varepsilon = (u,u')$ une unité de A(d), s'il en existe. Comme on doit avoir $\varepsilon\xi = \xi$ pour tout ξ de A(d), on aura:

$$ux + du'x' = x$$

$$u'x + ux' = x' \text{ pour tout } x \in \mathbf{Z}\,,\ x' \in \mathbf{Z}\ ;$$

en prenant en particulier $x = 1$, $x' = 0$, on constate que l'on doit avoir $u = 1$, $u' = 0$ et effectivement $\varepsilon = (1, 0)$ est bien une unité. Ainsi A(d) est un anneau unitaire; on peut voir que le sous-anneau (μ) de A(d) n'est pas unitaire si $N(\mu) \neq \pm 1$.

Etudions enfin dans **Z** l'anneau, que nous appellerons $\mathbf{Z}_m$ des classes modulo m; cet anneau est unitaire, la classe unité étant $\overline{1}$ = classe (1,...), car $\overline{a}.\overline{1}$ = classe(a.1,...) = classe(a,...) = $\overline{a}$. Donnons-nous alors $\overline{a} \neq \overline{0}$ et cherchons à déterminer une classe $\overline{b}$ telle que

$\bar{a}.\bar{b} = \bar{1}$. Si a et b sont des entiers des classes $\bar{a}$ et $\bar{b}$, il doit exister un entier c tel que $ab + cm = 1$; il en résulte que $(a,m) = 1$; par suite si a n'est pas multiple de m, il doit être premier à m; m ne peut donc pas avoir d'autres diviseurs que 1 et m, c'est-à-dire m doit être un nombre premier.

Supposons donc que $m = p$ soit premier et soit $\bar{a} \neq \bar{0}$; un élément a de la classe $\bar{a}$ est alors premier à p, par suite il existe des entiers b et c tels que $ab + pc = 1$; il en résulte que $\bar{a}.\bar{b} = \bar{1}$. Cette classe $\bar{b}$ ainsi obtenue est unique, car s'il y avait une classe $\bar{b'}$ telle que $\bar{a}.\bar{b'} = \bar{1}$, on aurait, par différence $\bar{a}.(\bar{b} - \bar{b'}) = \bar{0}$, c'est-à-dire $a(b-b') \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Or p et a sont premiers entre eux, donc p divise $b-b'$, ce qui signifie que $\bar{b'} = \bar{b}$.

Par contre si m n'est pas un nombre premier, il existe des classes $\bar{a}$ et $\bar{b}$, dont aucune n'est la classe $\bar{0}$, telles que $\bar{a}.\bar{b} = \bar{0}$; il suffit de prendre pour a et b deux diviseurs de m différents à la fois de 1 et de m et tels que $a\,b = m$. Dans cet anneau, non seulement la division ne sera pas toujours possible, mais si elle l'est, elle ne donne pas un élément unique.

L'ensemble **G** des classes $\neq \bar{0}$ de $\mathbf{Z}_p$, p premier, possède ainsi les propriétés suivantes: si $\bar{a} \in \mathbf{G}$ et $\bar{b} \in \mathbf{G}$ alors $\bar{a}.\bar{b} \in \mathbf{G}$; il existe un élément neutre $\bar{1}$ tel que $\bar{1}.\bar{a} = \bar{a}$ quel que soit $\bar{a} \in \mathbf{G}$, quel que soit $\bar{a} \in \mathbf{G}$, il existe $\bar{b} \in \mathbf{G}$ tel que $\bar{a}.\bar{b} = \bar{1}$. Un ensemble avec ces propriétés s'appelle un <u>groupe</u>; dans notre cas le groupe est <u>commutatif</u>, car on a $\bar{a}.\bar{b} = \bar{b}.\bar{a}$, pour tout $\bar{a} \in \mathbf{G}$, $\bar{b} \in \mathbf{G}$.

L'addition dans un anneau est aussi un exemple d'un groupe.

L'anneau $\mathbf{Z}_p$ est ainsi un groupe commutatif pour l'opération d'addition et si l'on enlève l'élément $\bar{0}$ c'est un groupe commutatif pour la multiplication. Un ensemble ayant ces propriétés s'appelle un <u>corps</u> (commutatif).

Ainsi $\mathbf{Z}_p$ est un corps ayant un nombre fini d'éléments.

L'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels est aussi un corps, il a une infinité d'éléments.

Donnons encore un autre exemple d'un corps. Désignons par $K(d)$ l'ensemble des éléments α de la forme $\alpha = (a,a')$, où a et a' sont des nombres rationnels quelconques; nous munissons $K(d)$ des mêmes lois d'addition et de multiplication que celles qui ont été définies dans $A(d)$. Ainsi $K(d)$ est un groupe pour l'addition; l'élément neutre de cette addition est l'élément $(0,0)$. Soient alors $\alpha = (a,a') \in K(d)$ et $\beta = (b,b') \in K(d)$ avec $\beta \neq (0,0)$; cherchons à déterminer $\gamma = (c,c')$ tel que $\alpha = \beta\gamma$. Posons $\beta^* = (b, -b')$, alors $\alpha\beta^* \in K(d)$ et on doit avoir $\alpha\beta^* = \beta^*\beta\gamma = \gamma N(\beta)$. Or $N(\beta) = b^2 - db'^2$; ce nombre rationnel est différent de 0 pour tout $(b,b') \neq (0,0)$ si et seulement si d n'est pas le carré exact d'un nombre rationnel. Supposons ce cas réalisé, alors

$$\gamma = \frac{\alpha\beta^*}{N(\beta)} \in K(d),$$

donc $K(d)$ est un corps.

LE VECTORIEL EUCLIDIEN PLAN DANS L'ENSEIGNEMENT (15 ans)

par
G. Papy
(Bruxelles)

Le programme de l'expérience belge pour les cinq premieres années du cycle secondaire (12 à 17 ans) est conforme aux voeux unanimes émis par toutes les réunions de mathématiciens purs et appliqués qui se sont penchés sur le probleme de l'enseignement:

1. La mathématique actuellement utile est la mathématique moderne. Elle a le plus de chances d'entrer en résonance avec l'esprit des enfants d'aujourd'hui.
2. Il faut apprendre à mathématiser des situations.
3. Les programmes du cycle secondaire doivent comporter: ensembles, relations, graphes, groupes, espaces vectoriels (y compris les vectoriels à produit scalaire euclidien), les débuts de l'analyse mathématique et du calcul différentiel et intégral.

Le point le plus central, le plus fondamental du programme précédent est sans conteste:

E S P A C E S   V E C T O R I E L S

La mise en évidence systématique des espaces vectoriels sous-jacents, dans les branches les plus variées, est un des traits caractéristiques du vrai visage de la mathématique d'aujourd'hui. L'étude de problèmes difficiles de topologie utilise notamment la structure d'anneau-module, qui généralise celle d'espace vectoriel.

Qui ne voit l'impossibilité actuelle de développer honnêtement un cours d'analyse mathématique sans utiliser de manière fondamentale les espaces vectoriels [D1] . Est-il admissible de dissimuler que différentielles et intégrales sont des exemples importants d'applications linéaires?

Gustave CHOQUET a indiqué avec combien de force et de raison que les vectoriels à produit scalaire constituent la Voie Royale de la Géométrie. La théorie des vectoriels à produit scalaire est le cadre naturel du précieux legs de la tradition euclidienne!

Est-il possible d'étudier les espaces vectoriels sans introduire la structure de groupe ... alors qu'un vectoriel est, avant tout, un groupe commutatif ... et qu'apparaîtront inévitablement les groupes de transformations linéaires?

La plupart des groupes envisagés sont des groupes de permutations. Il s'agira de distinguer les permutations parmi les transformations.

L'ensemble des classes latérales de tout sous-vectoriel constitue une partition.

Et nous n'avons pas encore évoqué le champ des coefficients. Les vectoriels considérés sont réels: il s'agit donc d'introduire le champ ordonné des nombres réels, dans lequel la structure d'ordre joue un rôle tout à fait fondamental.

Inutile de prolonger cette énumération en cascade, un bon enseignement des éléments des vectoriels utilise inévitablement tous les concepts de la théorie élémentaire des ensembles, des relations et des groupes.

L'inscription de l'étude du vectoriel réel au programme de l'enseignement secondaire, impose les grandes lignes de ce programme que nous allons examiner ci-dessous de manière plus détaillée, en suivant l'ordre chronologique, et en polarisant nos observations sur la géométrie et le vectoriel euclidien plan.

o o o

En 1961, au moment même où l'entreprise belge de rénovation de l'enseignement de la mathématique démarrait dans les classes de $6^{ème}$ (12-13 ans), j'ai pris une classe de $3^{ème}$ scientifique (élèves de 15 à 16 ans, 7 périodes de 45 min. par semaine) pour voir s'il n'y avait pas moyen d'enseigner directement la théorie des vectoriels à des élèves de 15 ans ayant suivi un enseignement traditionnel.

Cette expérience m'a amené à la conclusion que voici:

1. L'enseignement traditionnel avant 15 ans, avait déjà conditionné les élèves dans un sens opposé à l'esprit de la mathématique moderne. De grands efforts devaient être consentis pour les désintoxiquer. Le conditionnement antérieur n'avait rien de naturel ni de spontané: des trésors de pédagogie et d'abnégation traditionnelles avaient été dépensés pour arriver à ce résultat ... qu'il convenait maintenant de détruire. Quelle perte de temps et d'énergie!
2. Les notions fondamentales concernant ensembles et relations s'enseignent plus aisément à 12 ans qu'à 15 ans. Elles embouteillent le cours de la classe de 15 ans où trop de concepts doivent s'introduire simultanément.
3. Ensembles, relations, groupes... étant enseignés dès 12-13 ans, il est possible d'utiliser harmonieusement ces concepts comme outils-moteurs de la construction même de l'édifice mathématique et en particulier de la géométrie. Il en résulte un énorme gain de temps et de motivation et la mathématique apparaît ainsi dans une vision unitaire.

o o o

<u>CLASSE DE SIXIEME</u> (12-13 ans) (4 périodes hebdomadaires de 45 min) (1)

La première moitié de cette année est réservée aux ensembles et relations, enseignés en s'aidant des représentations géométriques par diagrammes de Venn et graphes multicolores.

Tous ceux qui ont procédé de la sorte - et ont pris leur temps pour cet enseignement - ont pu constater, les

(1) Certaines classes belges de sixième disposent de 5 à 6 périodes hebdomadaires. C'est l'idéal. Personnellement, nous avons mené l'expérience dans des classes à quatre périodes.

années ultérieures, que les principales notions de cette théorie élémentaire et naïve étaient définitivement assimilées et faisaient même partie de la connaissance acquise immédiatement disponible.

L'usage des diagrammes de Venn et des graphes apprend subsidiairement à dessiner des schémas et à schématiser des situations, ce qui est fondamental pour toutes les études ultérieures.

On aborde la géométrie au cours de la deuxième moitié de cette année en utilisant à la fois les notions ensemblistes acquises et la méthode axiomatique des sciences expérimentales. Le plan est regardé comme un donné que l'on idéalise de manière harmonieuse lorsque l'expérience proprement dite cesse de donner des réponses. Le maître choisit des situations qui provoquent l'expression de certaines affirmations plus ou moins descriptives. C'est parmi celles-ci que l'on choisit les axiomes d'incidence de la géométrie plane.

Il est souvent difficile de raisonner sur des figures parce que l'on y v o i t les réponses sans r a i s o n n e r . On obvie à cet inconvénient par l'utilisation des diagrammes de Venn ([MM1] pp. 68-71) et notamment en demandant de dessiner dans le plan des situations primitivement décrites par des diagrammes.

L'axiome des parallèles est introduit sous forme globale ([MM1] pp. 73-75).

Les chaînes de parallélogrammes conduisent tout naturellement à la notion de couples équipollents. Le caractère arguesien du plan est contenu dans l'axiome affirmant la transitivité de l'équipollence.

Les translations ou vecteurs (classes d'équivalence de l'équipollence), apparaissent d'emblée comme permutations du plan. L'identification délibérée de vecteur et translation à une permutation du plan économise des concepts et évite des distinguos subtils mais inutiles.

En ce qui concerne la géométrie, le cours de sixième se termine par la mise en évidence du groupe commutatif des vecteurs auquel s'identifie le plan Π dès la fixation d'une origine. Les élèves effectueront des calculs dans le groupe Π_0, + qui est en lui-même une prodigieuse situation pédagogique.

En plus des translations, on considère dans cette classe les projections parallèles du plan sur une droite et l'une des premières démonstrations dignes de ce nom consiste à prouver que les projections parallèles de couples équipollents sont équipollentes, premier pas vers le théorème de Thalès. On utilisera, à cet effet, le moyen pédagogique des bandes dessinées pour marquer les étapes de la démonstration ([MM1] p. 362).

Une telle présentation de la géométrie est possible parce que nos élèves ont étudié au préalable ensembles et relations, et notamment les permutations.

CLASSE DE CINQUIEME (13-14 ans) (4 périodes hebdomadaires de 45 min.)

Cette année est presque entièrement consacrée à la genèse simultanée du champ ordonné des réels et de la structure vectorielle plane. Le fait important à retenir ici, est qu' i l e x i s t e a u m o i n s u n e m é t h o d e p e r m e t t a n t d ' i n t r o d u i r e c e s n o t i o n s i m p o r t a n t e s , d e m a n i è r e à l a f o i s r i g o u r e u s e e t i n t u i t i v e , à d e s e n f a n t s d e 1 3 à 1 4 a n s .

Cet enseignement a pu réussir grâce à la présentation antérieure des éléments de géométrie sous forme ensembliste, axiomatique et relationnelle. La numération de position joue un rôle essentiel dans l'introduction de l'ensemble ordonné des réels. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur intéressé à [F1] , petit ouvrage destiné aux enseignants, ou à [MM2] , manuel destiné aux élèves et écrit après l'expérience.

Un patient cheminement nous a conduit des axiomes originels de caractère intuitif à la structure de vectoriel réel de dimension deux. Au fur et à mesure du développement du cours, on invoque de moins en moins les axiomes originels et les propositions intermédiaires et de plus en plus les propriétés qui caractérisent la structure de vectoriel réel du plan.

Le cours c u l m i n e par la mise en évidence de cette structure et se t e r m i n e par son utilisation systématique. On prépare ainsi le retournement psychologique du début de la classe de troisième où la structure vectorielle est la base axiomatique de départ.

<u>CLASSE DE QUATRIEME</u> (14-15 ans) (4 périodes hebdomadaires de 45 min.)

"Le cadre du vectoriel euclidien plan est la Voie Royale pour l'enseignement de la géométrie." Encore convient-il d'accéder sans heurt à cette voie. Tel est le but de notre enseignement de la géométrie métrique dans la classe de quatrième.

A partir de la notion bien intuitive de symétrie orthogonale, on introduit ou l'on retrouve déplacements (rotations ou translations) et retournements (symétries glissées ou non).

Le moyen pédagogique des droites numérotées facilite l'accès au groupe des isométries et à celui des déplacements ([GP] et [MM3]).

L'utilisation simultanée de ces groupes et des repères affins des droites introduit la notion de distance sous sa forme moderne comme application de $\Pi \times \Pi$ dans R^+, ce qui sous-entend le choix préalable de l'unité. Il n'y a aucune objection à la fixation de celle-ci, puisque le changement d'unité pose un problème dont la solution est banale.

Le groupe commutatif des rotations de centre donné conduit au groupe des angles. Comme la mesure des angles ne joue aucun rôle en géométrie élémentaire, le problème que pose son introduction est reporté à la classe de seconde où il est résolu dans le cadre de la théorie des fonctions circulaires. La préhension numérique de l'angle se fera d'abord par l'intermédiaire du cosinus.

Distance et cosinus introduisent le produit scalaire. Sa commutativité et sa bilinéarité entraînent, théorème de Pythagore, inégalité de Cauchy-Schwartz et inégalité triangulaire.

Le cours c u l m i n e par la mise en évidence de la structure de vectoriel euclidien plan et se t e r m i n e par son utilisation systématique.

<u>CLASSE DE TROISIEME SCIENTIFIQUE</u> (15-16 ans) (7 périodes hebdomadaires de 45 min.)

Les élèves ont eu l'occasion de se rendre compte de l'importance de la structure de vectoriel ce qui motive une petite étude intrinsèque dont le point crucial est le théorème de base:

<u>Si</u> un vectoriel admet une base de n éléments
<u>Alors</u> toute base de ce vectoriel comprend n éléments.

Ce théorème est mis à la portée des élèves de 15 ans grâce à un moyen pédagogique qui matérialise les substitutions dans le passage d'une base à une autre. Ce procédé est décrit de manière schématique dans [F2] pp. 32-33.

Ce point acquis, le moment est venu d'effectuer le retournement psychologique auquel nous avons déjà fait allusion. La fin des cours des classes de cinquième et de quatrième a déjà appris à se servir, en fait, des axiomes de définition de la structure de vectoriel euclidien plan.

Les élèves qui ont parcouru avec nous le chemin menant des axiomes originels à cette structure ont souvent une certaine angoisse à l'idée de ne pas retenir le détail de l'itinéraire parcouru. Le retournement psychologique vient à son heure: il est apaisant et réconfortant de savoir que l'on a le droit de ne plus retenir que les axiomes de définition des réels et ceux de la structure de vectoriel euclidien plan.

La dimension n'intervient pas dans les démonstrations concernant le carré scalaire d'une somme et le théorème de Pythagore. On fait d'une pierre deux coups, puisque ces résultats restent valables dans l'espace.

La plus grande partie du cours de troisième, en ce qui concerne la géométrie, est néanmoins consacrée à une étude plus systématique du vectoriel euclidien plan. Il serait navrant de n'utiliser cette importante structure que pour établir de manière nouvelle des résultats déjà acquis dans l'enseignement antérieur et notamment dans la classe de quatrième. Le déroulement du cours de troisième doit convaincre les élèves que le vectoriel euclidien plan est une formidable base de départ pour la conquête de notions absolument fondamentales de la mathématique de toujours.

La linéarité des projections parallèles, des homothéties et des symétries parallèles (et orthogonales) mise en évidence dans les classes de $5^{ème}$ et $4^{ème}$, motive l'étude des transformations linéaires du vectoriel plan.

Toute transformation linéaire est déterminée par l'image des éléments d'une base. On devine aussitôt le bénéfice que l'on pourra tirer d'une utilisation adéquate de la méthode des graphes, dont l'intérêt rebondit ici de manière subite. A chacun de ces graphes partiels est associée la matrice de la transformation dans la base considérée. Cette étude met en évidence l'anneau des transformations linéaires (et subsidiairement celui des matrices R^{2x2}, +, .) et le groupe linéaire général (voir [A7] , Ch 2).

On a vu, dans les classes antérieures, que les isométries centrées sont linéaires. D'où le problème inverse: quelles sont les transformations orthogonales (ou transformations linéaires qui conservent le produit scalaire)?

On est heureux d'établir que les seules transformations orthogonales sont celles que l'on connaît déjà: symétries et rotations. L'étude des matrices de ces transformations dans une base orthonormée conduit au cosinus d'une rotation ainsi qu'au demi-tour et aux d e u x quarts de tour.

Le groupe des similitudes et le sous-groupes des similitudes directes s'obtiennent en composant homothéties et transformations orthogonales. On établit enfin que l'ensemble des similitudes directes est un champ (ou corps commutatif).

Une des manières d' o r i e n t e r le vectoriel consiste à décider d'appeler i l'un des quarts de tour. Toute similitude directe s'identifie au nombre complexe a + bi . La partie réelle a ne dépend pas de l'orientation contrairement au signe de sa partie imaginaire b. Dans le plan orienté, on définit le sinus d'une rotation ou d'un angle.

Les angles sont introduits comme éléments d'un groupe additif isomorphe au groupe compositionnel des rotations ou au groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

Il est facile de déduire les quelques formules trigonométriques importantes des propriétés des nombres complexes.

Pour plus de détails, nous renvoyons au bel ouvrage [D] de Jean Dieudonné écrit à l'intention des enseignants intrépides et à [GP] directement destiné aux élèves.

Dans la classe de seconde (16-17 ans), la géométrie dans l'espace est développée à partir du vectoriel euclidien de dimension trois.

Bibliographie

Ouvrages

1. [A] ARTIN : - Geometric Algebra (Interscience Publishers - New-York 1957)
- Algèbre Géométrique (Gauthier-Villars, 1962)

2. [D1] DIEUDONNE : - Foundations of Modern Analysis (Academic Press inc., New-York, 1960)
- Fondements de l'Analyse Moderne (Gauthier-Villars, Paris 1963)

3. [D2] DIEUDONNE : - Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire (Herman - Paris, 1964)

4. [G] PAPY : - Groupes (Presses Universitaires de Bruxelles, Bruxelles - Dunod, Paris 1961)
- Groups (Macmillan, London 1964)
- I gruppi (Feltrinelli Editore, Milano, 1964)

5. [EE] PAPY : - Erste Elemente der Modernen Mathematik (Otto Salle Verlag, Frankfurt-Hamburg 1962-1963).

6. [F1] PAPY-DEBBAUT: - Géométrie affine plane et nombres réels (Presses Universitaires de Bruxelles, Bruxelles, Gauthier-Villars, Paris 1962)
- Ebene Affine Geometrie und reelle Zahlen (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1965)

7. [F2] PAPY : - Initiation aux Espaces Vectoriels (Presses Universitaires de Bruxelles - Bruxelles, Gauthier-Villars, Paris 1963).
- Einführung in die Vectorraumlehre (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1965)

8. [MM1] PAPY : - Mathématique Moderne 1 (Editions DIDIER - Bruxelles - Paris 1963)
- Moderne Wiskunde 1 (DIDIER, Bruxelles - Paris 1965)
- Matematica Moderna 1 (Edutura Tineretului, Bucaresti 1965)
- Modern Mathematics 1 (Collier-Macmillan, London - New-York 1965)

9. [MM2] PAPY : - Mathématique Moderne 2 (DIDIER - Bruxelles, Paris 1965)

10. [A7] PAPY (avec la collaboration des Assistants du C.B.P.M.)
: -Arlon 7. Documentation pour l'enseignement du Vectoriel euclidien plan. (Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique - 183, Avenue Brugmann - BRUXELLES 6).

11. [GP] PAPY : - Géométrie Plane (Labor Bruxelles, Nathan, Paris 1966)

12. [MM3] PAPY : - Mathématique Moderne 3 (DIDIER - Bruxelles, Paris 1966).

Articles

13. PAPY : - Introduction aux espaces vectoriels (La math. du 20e siècle. Vol. II - Bruxelles 1961 (33 pages).

14. PAPY : - Méthodes et techniques de présentation des nouveaux concepts de mathématiques dans les classes du premier cycle de l'enseignement secondaire (Mathématique moderne. OCDE Athènes 1963)
- Médios y técnicas para exponer los conceptos de matematica moderna. (Elementos no 9, Nov. Dic. 1964, pp. 73-80, no 10 En. Feb. 1965 pp. 99-104, no 11 Mar. Abr. 1965 pp. 127-130).
- Methods and techniques of explaining new mathematical concepts in the lower forms of secondary schools. (The Mathematics Teacher-Vol. LVIII no 4 April 1965 pp. 345-352, no 5 May 1965 pp. 448-453).

15. PAPY : - Comment introduire les notions d'ensembles et de relations (Publications de l'Unesco).

16. PAPY : - L'enseignement de la géométrie aux enfants de 12 à 15 ans. (Publications de l'Unesco).

ROLE DE L'ALGEBRE LINEAIRE DANS LES MATHEMATIQUES MODERNES

par
J. Dieudonné
(Nice)

Les difficultés du dialogue entre l'Enseignement secondaire et l'Enseignement supérieur, et les mathématiques fossiles.

Une des raisons d'être de cette rencontre est, je crois, de confronter, non seulement les idées et les expériences des professeurs de l'Enseignement secondaire de plusieurs pays, mais encore celles des professeurs de l'Enseignement supérieur. Tout le monde reconnaît la nécessité de ce dialogue, mais à l'épreuve il se révèle fort difficile à établir, fertile en malentendus et méfiances réciproques.

Le professeur de mathématiques des Facultés des Sciences se débat avec un dilemme chaque année plus angoissant: comment, en un nombre fixe et très limité d'années, faire accéder la jeunesse dont il a la charge à la science m o d e r n e ; je ne parle pas de l'initiation à la recherche proprement dite, mais bien, à un niveau beaucoup plus modeste (celui de la Licence actuelle en France, par exemple), de faire connaître aux étudiants les théorèmes fondamentaux de l'Analyse, de la façon la plus utilisable pour les applications. Mais, même à ce niveau, il est indispensable, pour la compréhension profonde de ces résultats autant que pour leur emploi efficace (en Mathématiques même ou dans d'autres sciences), d'incorporer dans le curriculum beaucoup de notions développées depuis un demi-siècle à peine.

Pour dispenser cet enseignement de façon profitable, sans hâte mais sans perte de temps, le professeur de Faculté souhaiterait recevoir de l'Enseignement secondaire des étudiants aussi bien préparés que possible à le comprendre, en possession d'un minimum de "métier", de façon à ne pas être arrêtés par le moindre calcul trivial, et déjà orientés vers la méthode axiomatique, qui constitue l'ossature de l'enseignement supérieur actuel. Il s'irrite de constater que la réalité répond si peu à son attente qu'il est, bien contre son gré, obligé le plus souvent de sacrifier un temps précieux à tout reprendre à la base, et même de devoir conseiller à ses auditeurs d'o u b l i e r au plus vite ce qu'on leur a appris au Lycée, s'ils veulent progresser sans trop de heurts et d'incompréhension. Cette irritation se nourrit de la certitude que dans l'enseignement secondaire, beaucoup de temps est perdu en développements inutiles ou périmés, et qu'un meilleur aménagement des programmes permettrait, sans dépasser les possibilités intellectuelles des élèves, de faire passer dans les dernières années du Lycée une bonne partie de ce qu'on est malheureusement obligé d'enseigner actuellement dans l'année propédeutique[1].

Placé devant ces exigences pressantes de son confrère, le professeur de l'enseignement secondaire a peine à en saisir l'urgence et la nécessité. S'il a dépassé la quarantaine, il n'a eu qu'une formation exclusivement "classique", et ignore donc les matières mêmes qu'il devrait enseigner pour rénover son programme. De toutes façons, son optique est fort différente de celle de son collègue de l'enseignement supérieur. Si son horizon est pratiquement limité, par la force des choses[2], aux matières qu'il enseigne, il cher-

1) Les expériences des Papy, dont il est parlé ailleurs dans ce volume, montrent que cela n'a rien de chimérique; il est trop facile de dire qu'on ne peut rien faire lorsqu'on n'a pas même essayé!

2) On ne peut raisonnablement demander à un enseignant qui doit assurer 15 à 20 heures de cours par semaine, sans compter les interrogations, corrections de devoirs, etc., de se tenir au courant de la production mathématique moderne, même de très loin; les mathématiciens professionnels n'y arrivent plus eux-mêmes et sont obligés de se cantonner le plus souvent dans une spécialité assez étroite.

che souvent à en mieux comprendre les fondements et à en fignoler les détails. D'où sa prédilection, d'une part pour les petits problèmes "élégants", les "astuces" inattendues, d'autre part pour les systèmes axiomatiques à tendance plus ou moins philosophiques; sa préoccupation de "mathématiser le réel" de la manière la plus "naturelle" possible, etc.

Tout cela est en soi fort inoffensif, et même en un certain sens louable. L'écueil est que souvent le professeur de Lycée a tendance à s'identifier à ses élèves, à croire que ce qui, l u i, l'intéresse particulièrement dans la géométrie, est obligatoirement ce qui doit être au centre de l e u r s préoccupations, et qu'ils ont la maturité suffisante pour assimiler ses problèmes (ou pseudo-problèmes[1]) philosophiques. C'est céder au penchant sans cesse renaissant, dans l'Enseignement secondaire, de travailler e n v a s e c l o s, sans aucun souci de ce à quoi on doit préparer l'élève[2]. En l'occurrence, c'est surtout négliger le fait, pourtant capital, qu'aucune de ces belles constructions ne pourra plus jamais être utilisée dans les études ultérieures, alors que fera cruellement défaut la préparation à l'Algèbre linéaire qui les aurait avantageusement remplacées. Et si l'on trouve ce point de vue trop "utilitaire" et ne respectant pas l'idéal de la "culture désintéressée" qui doit être celui de l'Enseignement secon-

---

1) Voici par exemple ce qu'on peut lire dans la Préface d'un livre récent: "Les relations géométriques existent indépendamment des relations numériques et leur sont même antérieures dans l'ordre historique ou didactique et aussi dans l'ordre logique de la mathématique actuelle où la théorie des ensembles est mise avant toute chose" (A. Doneddu, Géométrie euclidienne plane, Paris (Dunod), 1965, p.X). Si l'histoire et la logique sont consultées, comme le veut l'auteur, elles montrent au contraire que la question de "préséance" qu'il soulève est totalement dénuée de sens, les deux types de relations dont il parle ayant toujours été développées s i m u l t a n é m e n t!

2) Chez les professeurs de la génération précédente, cela se manifestait plutôt par le temps démesuré passé sur de petits problèmes "amusants" mais sans portée ("points remarquables" du triangle, propriétés focales des coniques, systèmes de cercles, inversion, etc.)

daire, qu'on veuille bien dire en quoi l'Algèbre linéaire, cet algorithme aussi simple dans son principe que protéiforme dans ses applications, formerait-elle moins l'esprit que les pénibles échafaudages de Hilbert ou de ses adaptateurs modernes[1)]?

Il devrait, semble-t-il, suffire d'énoncer ces truismes pour faire cesser le débat et faire prendre conscience aux professeurs de l'Enseignement secondaire de la nécessité de la réforme préconisée par les professeurs des Facultés. Mais les choses ne sont pas si simples; les professeurs de l'Enseignement secondaire voudraient, non sans raison, être convaincus qu'il ne s'agit pas d'une mode passagère, mais bien d'une orientation stable de la Mathématique moderne; et faute de pouvoir eux-mêmes s'en rendre compte, ils voudraient au moins avoir sur ce point un avis unanime des mathématiciens professionnels. Or, c'est là trop demander; il subsiste encore en divers pays (notamment en Allemagne autour de F. Bachmann) des écoles qui poursuivent inlassablement des études d'axiomatiques variées pour des "géométries" non moins variées; la tentation est donc grande de s'abriter derrière l'autorité (incontestable) de ces mathématiciens pour mettre en doute la supériorité de l'Algèbre linéaire dans l'enseignement[2)].

---

1) Il est vrai que, selon l'auteur précité, l'Algèbre linéaire aurait le grave défaut de "<u>n'être pas naturelle</u>"! Il faut tout ignorer de l'histoire des sciences pour s'imaginer que les idées les plus fécondes (en mathématiques ou dans les autres sciences) découlent "naturellement" des données sensibles; on pourrait sans paradoxe soutenir exactement le contraire. Quoi de plus "naturel" que l'idée de la génération spontanée? Quoi de plus "artificiel" que la théorie des quanta ou la relativité? Il en est de même en Mathématique. L'idée si profonde des surfaces de Riemann est aussi peu "naturelle" que possible; et si l'on a mis si longtemps à introduire la notion de groupe, n'est-ce pas parce que cette idée fondamentale n'était pas "naturelle"?

2) La même tentation conservatrice conduit aussi à des interprétations plutôt tendancieuses de certains ouvrages. Par exemple, dans l'admirable livre d'E.ARTIN: "<u>Algèbre géométrique</u>" qui illustre la puissance et la souplesse de l'Algèbre linéaire, il y a un court chapitre, entièrement séparé du reste, où Artin, encore sous l'influence di-

Je veux bien croire qu'il s'agisse de doutes légitimes et non simplement de routine ou d'inertie. Ce qu'il faudrait arriver à faire concevoir, c'est que les mathématiciens dont je viens de parler sont entièrement c o u p é s du grand mouvement des mathématiques modernes. Je ne veux pas dire que ce qu'ils font soit dénué de valeur; il y a là souvent beaucoup de finesse et d'ingéniosité, mais cela n'a pas le moindre rapport avec les grands problèmes qui préoccupent l'immense majorité des mathématiciens ou physiciens contemporains, et ne peut en aucune façon concevable avancer leur solution[1]. Cela n'est d'ailleurs pas spécial à ces travaux d'axiomatique; il y a des blocs entiers de mathématiques plus ou moins traditionnelles, qui sont ainsi devenus totalement inactuels, et ce n'est pas dans un sens péjoratif qu'on peut proprement les qualifier de f o s s i l e s (voir plus loin, p.162)

Dans ce qui suit, je vais essayer de montrer comment l'Algèbre linéaire des mathématiciens modernes est au contraire la sève nourricière des mathématiques v i v a n t e s. Je ne pourrai évidemment procéder que par affirmations, renvoyant pour des "preuves" détaillées à une bibliographie qui certainement n'est pas d'une lecture facile ni rapide. J'espère cependant ne pas parler entièrement dans le désert, et souhaite que de tels exposés finissent un jour par convaincre les responsables de l'Enseignement secondaire dans tous les pays, et qu'on puisse enfin économiser le temps précieux perdu à "reconditionner" les étudiants qui entrent dans nos Facultés.

---

recte de Hilbert, a sacrifié aux modes de sa jeunesse et décrit rapidement une construction axiomatique de la géométrie affine. Bien entendu, c'est ce chapitre qu'on cite pour les besoins de la cause, ignorant systématiquement le reste du livre!

1) Si quelqu'un contestait la vérité de cette affirmation, ce serait bien entendu à lui de faire la preuve qu'elle est inexacte, en donnant une liste des questions où s'appliqueraient avec fruit les systèmes axiomatiques que je considère comme fossiles.

Les niveaux de l'Algèbre linéaire.

L'Algèbre linéaire, d'abord confinée à la résolution des systèmes d'équations du premier degré et à leur interprétation en "géométrie analytique" a vu peu à peu, depuis un siècle, son domaine d'application devenir si vaste que pour l'exploiter avec succès elle a dû elle-même se diversifier, se ramifier et acquérir un caractère de plus en plus abstrait. On peut y distinguer g r o s s o m o d o à présent six niveaux différents, allant progressivement du simple au compliqué, du concret à l'abstrait:

1) Le niveau le plus élémentaire est le point de départ que nous rappelions ci-dessus, l'étude des espaces vectoriels "physiques", c'est-à-dire les espaces vectoriels sur le corps **R** des réels, à 2 ou 3 dimensions.

2) Le premier pas dans l'"abstrait" consiste à concevoir les espaces vectoriels à un nombre fini quelconque n de dimensions (toujours sur **R**) et à y généraliser tout le vocabulaire algébrico-géométrique usuel, bien qu'ici l'"intuition" sensible fasse défaut.

Les généralisations ultérieures se font dans deux directions différentes:

3) D'une part, on peut "passer du fini à l'infini" comme y invite toute l'Analyse fonctionnelle, et aborder la théorie des espaces vectoriels (sur **R**) de dimension infinie. Mais ici l'expérience prouve qu'on n'arrive à des résultats utilisables qu'en introduisant des idées d'une autre nature, savoir les notions topologiques; on arrive ainsi à la vaste et complexe théorie des "espaces vectoriels topologiques" si fondamentale dans l'Analyse moderne.

4) L'Algèbre, de son côté, donne l'impulsion vers un autre type de généralisation, où cette fois on abandonne l'hypothèse que les scalaires sont réels, en exigeant seulement qu'ils forment un c o r p s (commutatif ou non), les axiomes des espaces vectoriels restant inchangés. C'est la théorie générale des e s p a c e s v e c t o r i e l s

(de dimension finie ou non), capitale dans l'Algèbre moderne.

5) On peut faire un pas de plus et exiger seulement des scalaires qu'ils forment un a n n e a u , ce qui conduit à la théorie des m o d u l e s , encore plus fréquents en Algèbre que les espaces vectoriels.

6) Toutefois, on s'aperçoit que de nombreuses propriétés très utiles des espaces vectoriels ne sont plus valables pour les modules généraux, ce qui a constitué pendant longtemps un sérieux inconvénient. Cette difficulté n'a été surmontée qu'il y a une vingtaine d'années, par la création de l'A l g è b r e h o m o l o g i q u e , la plus complexe et la plus difficile des branches de l'Algèbre linéaire, dont l'idée directrice est de "mesurer" en quelque sorte la façon dont les modules s'écartent des bonnes propriétés des espaces vectoriels par l'introduction de modules "satellites" des modules considérés, qui se réduisent toujours à 0 pour les espaces vectoriels; le maniement de ces nouvelles entités a permis, dans une large mesure, d'aborder dans le cas général des problèmes que l'on ne savait autrefois résoudre que pour les espaces vectoriels.

Ce qu'il faut souligner, c'est que, tout au long de cette montée vers l'abstraction, les idées fondamentales de la théorie restent les m ê m e s : du plan euclidien aux modules les plus généraux, les axiomes se formulent toujours de façon identique et les concepts centraux, sous-modules, modules quotients, homomorphismes, images, noyaux, conoyaux, somme directe, dualité, sont toujours définis de la même façon. On aurait peine à trouver, dans tout l'arsenal des mathématiques, des idées plus simples et dont le champ d'application, dont nous allons maintenant parler, soit aussi immense.

Les applications de l'Algèbre linéaire.

Pour mettre un peu d'ordre dans l'énorme amoncellement de théories qu'il faudrait citer, nous allons adopter une classification un peu artificielle, en considérant successivement:

A) Le domaine naturel de l'Algèbre linéaire.

B) Les conquêtes de l'Algèbre linéaire.

C) La métaphysique de l'Algèbre linéaire.

Il ne s'agira d'ailleurs, bien entendu, que d'une esquisse extrêmement rapide et sommaire, où nous ne pourrons entrer dans aucun détail.

A) Historiquement, l'Algèbre linéaire s'est dégagée, d'une part de la Géométrie élémentaire, d'autre part, des théories "linéaires" du Calcul infinitésimal (équations différentielles, équations aux dérivées partielles, équations intégrales). Elle est plus importante que jamais dans ce "domaine naturel" d'où elle est sortie, et que par contre-coup elle a servi à organiser et mieux comprendre:

A 1) Dans la "Géométrie" au sens élémentaire où on la conçoit depuis le "Programme d'Erlangen" de F. Klein, l'Algèbre linéaire est bien entendu la pierre angulaire de tout l'édifice, puisqu'il s'agit d'e s p a c e s a f f i n e s où opèrent des g r o u p e s l i n é a i r e s. Nous reviendrons plus loin (B 10) sur le problème de la recherche des i n v a r i a n t s, en quoi (toujours selon F. Klein) se résume l'essence de la "Géométrie" classique.

A 2) C'est un truisme que de constater que les opérations fondamentales de l'Analyse classique, dérivation et intégration, sont l i n é a i r e s ; mais ce ne sont que les deux plus simples exemples des o p é r a t e u r s l i n é a i r e s, qui dominent toute l'Analyse fonctionnelle moderne, et, à travers elle, la Physique quantique (puisque les "observables" sont maintenant interprétés comme des opérateurs hermitiens dans un espace hilbertien). Il peut paraître surprenant qu'une propriété aussi triviale que le caractère linéaire d'un opérateur puisse être d'un grand secours, mais c'est elle qui permet d'appliquer toute la théorie des espaces vectoriels topologiques, à laquelle on doit les remarquables succès des 20 dernières années, notamment dans la résolution des problèmes classiques de la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires et dans la théorie spectrale, qui repose tout entière sur la notion élémentaire de v a l e u r p r o p r e d'un endomorphisme (il est à peine besoin de souligner que la terminologie de "spectre" est empruntée à la Physique atomique, où l'immense succès de la "Mécanique ondulatoire" a précisément été de relier cette notion expérimentale aux valeurs propres de l'opérateur correspondant à l'équation de Schrödinger).

Il faut souligner aussi que c'est la notion d'opérateur linéaire qui a été à l'origine de la théorie des d i s t r i b u t i o n s de L. Schwartz, qui a permis de sortir de la "pathologie" où se débattait le Calcul infinitésimal classique, en élargissant considérablement le champ d'application de la notion de "dérivée" et qui est à l'origine des progrès mentionnés plus haut dans la théorie des équations aux dérivées partielles; le point de départ est que ce qui importe dans la conception d'une fonction intégrable f, ce n'est pas l'idée classique de la correspondance entre valeurs de la variable x et valeurs f(x) de la fonction, mais bien le fait que la fonction f opère (linéairement !) sur les fonctions continues par la loi $g \longrightarrow \int f(x)g(x)\,dx$.

Enfin, il faut citer la grande idée de c o n v e x i t é, qui joue des rôles multiples en Analyse moderne, et est essentiellement une notion linéaire (à laquelle vient ici se mélanger la structure d'o r d r e de $\mathbf{R}$).

B) Depuis un siècle, les conquêtes de l'Algèbre linéaire ont été immenses dans toutes les parties de la Mathématique. Commençons par la plus ancienne, l'idée d'"a p p r o x i m a t i o n l i n é a i r e".

B 1) C'est là l'idée centrale de la source même de l'Analyse, le Calcul différentiel, qui n'est autre chose que l'approximation d'une fonction suffisamment régulière par une fonction l i n é a i r e au voisinage du point considérée; ce n'est qu'en "collant" en quelque sorte à cette conception qu'on comprend vraiment, en particulier, le Calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables, encombré de notions secondaires comme celle de "dérivée partielle" qui obscurcissent inutilement l'exposition.

B 2) Jusqu'à Gauss, on ne concevait la Géométrie différentielle que comme l'étude des courbes et des surfaces p l o n g é e s dans l'espace a 2 ou 3 dimensions. La grande idée de Gauss, reprise et développée par Riemann, a été de concevoir une variété différentiable comme obtenue par "recollement" de morceaux d'espaces vectoriels, indépendamment de tout "plongement". D'où la possibilité d'appliquer l'idée d'approximation linéaire du Calcul différentiel dans un contexte beaucoup plus large et de façon beaucoup plus souple. En outre, sur cette notion sont venus se greffer deux des outils les plus utiles de la Mathématique moderne, les e s p a c e s f i b r é s et les f a i s c e a u x; ils dépassent le cadre "linéaire", puisqu'ils concrétisent mathématiquement l'idée vague d'"objets variant continûment (ou différentiablement) en fonction d'un paramètre qui parcourt une variété différentiable (la "base")". Mais dans les applications les plus importantes, ces objets sont des espaces vectoriels ou des groupes linéaires, et la possibilité d'utiliser l'Algèbre linéaire de cette façon est une source de féconds développements en Géométrie différentielle et en Topologie différentielle. Comme exemple simple d'espaces fibrés, on peut penser aux classiques surfaces réglées, où la base est une courbe et la "fibre" une droite. Un exemple plus instructif est la "variété des plans tangents" à une surface où la base est la surface et la fibre le plan tangent, de sorte qu'il s'agit d'une variété à 4 dimensions. Nous verrons plus loin comment le calcul tensoriel classique se rattache maintenant à ces conceptions.

Passons à des conquêtes beaucoup plus inattendues et parfois surprenantes de l'Algèbre linéaire, ce que l'on peut appeler la l i n é a r i s a t i o n de l'Algèbre, de l'Arithmétique et de la Topologie algébrique classiques (entre autres).

B 3) Un exemple assez caractéristique est la linéarisation de la t h é o r i e d e G a l o i s - aboutissement, comme on sait, de la classique théorie des équations algébriques (donc typiquement "non linéaire" en son principe). Le biais ici consiste d'abord à considérer, comme on le fait depuis Dedekind, non pas les racines d'un polynôme sur un corps K, mais bien le surcorps L de K qui est engendré par ces racines; et l'Algèbre linéaire intervient alors par la simple remarque que L est un espace vectoriel sur le corps K et qu'un automorphisme du corps L laissant fixes les éléments de K est une application linéaire du K-espace vectoriel L sur lui-même. On pourrait croire qu'on n'aboutira à rien d'intéressant en "affaiblissant" ainsi la structure du corps L. Bien au contraire, c'est actuellement la meilleure manière d'obtenir les théorèmes clés. Par exemple, on voit ainsi aussitôt que si L est un corps fini, son nombre d'éléments est nécessairement une puissance p^k d'un nombre premier (il suffit de prendre pour K le corps premier contenu dans L). Et les théorèmes d'où sort toute la théorie de Galois sont: 1° le théorème de Dedekind affirmant que des automorphismes distincts de L (laissant fixes les éléments de K) sont linéairement indépendants sur L; 2° le théorème d'Artin disant que si G est un groupe d'automorphismes de L, et si K' est le sous-corps des éléments laissés fixes par G, alors la dimension de L sur K' est égale au plus grand nombre d'éléments de G linéairement indépendants sur L. Sous cette forme, ces théorèmes peuvent s'étendre à des corps (ou même certains anneaux) non commutatifs.

B 4) Un autre exemple est la considération des groupes abéliens (écrits additivement) comme des modules sur l'anneau **Z** des entiers rationnels. Ici encore, cette remarque est tellement banale qu'on ne s'attend pas à ce qu'il en sorte grand chose; cependant, c'est ainsi qu'on prouve le théorème de structure des groupes abéliens de type fini, grâce à la théorie linéaire des "facteurs invariants" d'une paire de **Z**-modules libres $N \subset M$, qui fournit aussitôt la structure du module quotient M/N.

B 5) Autre remarque encore plus triviale s'il est possible: dans l'anneau $\mathbf{Z}$, dire que l'entier a divise l'entier b équivaut à écrire la relation d'inclusion $\mathbf{Z}a \subset \mathbf{Z}b$ entre sous-modules de $\mathbf{Z}$. Il n'empêche que cette remarque permet d'aborder la théorie de la divisibilité dans des anneaux plus généraux que $\mathbf{Z}$, par exemple des anneaux d'entiers algébriques: c'est le point de départ de la grande théorie des idéaux (Dedekind et Kronecker) qui a permis l'épanouissement de l'Arithmétique supérieure depuis 1870, et qui est essentiellement une théorie "linéaire".

B 6) Passons à un tout autre sujet, la Topologie algébrique. Ici l'Algèbre linéaire intervient d'une façon qui paraît tout à fait artificielle: on a un certain ensemble d'objets E (de nature topologique ou géométrique) et on en forme les "combinaisons linéaires formelles"

$$\sum_i c_i x_i ,$$

où $x_i \in E$ et les c_i sont des coefficients pris dans un anneau fixé (souvent $\mathbf{Z}$, ou $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, ou $\mathbf{R}$). Ce module "libre" est en lui-même dénué d'intérêt, mais des considérations de nature topologique amènent à y distinguer certains sous-modules, dont les quotients ont une signification en rapport avec le problème considéré. Si par exemple on prend pour éléments de E les "simplexes", on obtient le module des "chaînes" dans lequel on distingue les sous-modules des "cycles" et des "bords", le quotient de ces derniers donnant le module d'homologie. On peut aussi prendre pour E les variétés différentiables compactes orientées de dimension k donnée, les coefficients étant ici pris dans $\mathbf{Z}$; on fait alors le quotient par le sous-module défini de la façon suivante: c'est l'ensemble des sommes formelles

$$\sum_i \pm V_i$$

telles que l'espace "somme topologique" des V_i, dont chacune est muni de son orientation si le signe est + , de l'orientation opposée si le signe est - , soit le b o r d d'une variété différentiable orientée compacte de dimension k+1. On arrive ainsi à la toute récente théorie du "cobordisme", qui a permis de nombreux et spectaculaires progrès dans notre connaissance de la topologie des variétés. Plus récente encore, mais non moins féconde, est la "K-théorie", où les objets que l'on "ajoute" sont les f i b r é s v e c t o r i e l s de base donnée.

B 7) Revenons à l'Algèbre proprement dite pour parler plus longuement d'une des grandes idées de la seconde moitié du XIXe siècle, la r e p r é s e n t a t i o n l i n é a i r e d e s g r o u p e s . Le g r o u p e l i n é a i r e **GL** (E) des automorphismes d'un espace vectoriel E, et certains de ses sous-groupes d'origine géométrique, tels que le groupe orthogonal et le groupe symplectique, sont particulièrement bien connus et relativement aisés à manier, à cause précisément du fait que les éléments de ces groupes sont des t r a n s f o r m a - t i o n s l i n é a i r e s de E, dans l'étude desquelles une certaine sorte d'"intuition géométrique" est d'un grand secours. Au contraire, il n'est rien de plus "abstrait" et difficile à concevoir qu'un groupe q u e l - c o n q u e , dont les éléments n'ont aucune interprétation donnant prise à l'intuition. L'idée de la "représentation linéaire" est de p l o n g e r un groupe quelconque donné G dans un **GL** (E) convenablement choisi et d'utiliser ce plongement pour en déduire des renseignements sur la structure de G. L'idée peut paraître arbitraire et même un peu folle: il est quasi-miraculeux qu'elle réussisse au-delà de toute espérance.

B 8) Une notion fondamentale pour un sous-groupe $G \subset$ **GL** (E) est celle d' i r r é d u c t i b i l i t é : E est irréductible (pour G) s'il n'y a aucun sous-espace vectoriel $V \subset E$ qui soit s t a b l e par tous les automorphismes de G. On en déduit la notion de c o m p l è t e *réductibilité* : E est complètement réductible s'il est *somme directe* de sous-espaces vectoriels V_i stables par G et dans lesquels G agit de façon irréductible. Si on prend pour **E** un espace vectoriel de dimension finie sur le corps **C** des nombres complexes, et pour G un sous-groupe *fini* de **GL**(E), il se trouve que E est *toujours* complètement réductible, et l'étude de l'action de G dans les sous-espaces irréductibles V_i correspondants apporte des renseignements très profonds sur les propriétés de G (théorie des *caractères* de Frobenius). Comme exemple d'utilisation de ces notions, citons la récente démonstration, par Feit et Thompson, de la célèbre conjecture de Burnside selon laquelle tout groupe simple fini non commutatif est d'ordre pair; dans cette démonstration (d'une extraordinaire complexité, et qui prend à elle seule 300 pages) les caractères jouent un rôle tout à fait essentiel.

B 9) L'idée de la représentation linéaire s'applique avec fruit aux *groupes linéaires* eux-mêmes, et c'est ainsi que l'on interprète maintenant une autre des grandes idées du XIX^e siècle, le *calcul tensoriel*. Un groupe linéaire **GL**(E) "opère" en effet de façon "naturelle", non seulement dans son espace vectoriel de définition E, mais dans bien d'autres. Par exemple, soit $T_2(E)$ l'espace vectoriel des *formes bilinéaires* sur $E \times E$; un automorphisme u de E opère sur $T_2(E)$ en faisant correspondre à toute forme bilinéaire f la forme $(x,y) \longrightarrow f(u(x),u(y))$. Le groupe **GL**(E) opère de même sur tous les espaces $T_r(E)$ de formes r-linéaires (r quelconque), appelées encore *tenseurs covariants* d'ordre r sur E; on définit de même les espaces de *tenseurs contravariants* $T^r(E)=T_r(E^*)$ (E^* dual de E) et de tenseurs *mixtes* (produits tensoriels des deux types précédents). Le résultat fondamental est qu'ici encore (en prenant **C** pour corps de base) il y a *complète réductibilité* de toutes ces représentations de $\mathbf{GL}(E)$ (par exemple, $T_2(E)$ se décompose trivialement en somme directe de deux sous-espaces irréductibles, celui des formes bilinéaires symétriques et celui des formes bilinéaires antisymétriques; les choses sont beaucoup plus compliquées pour $r > 2$, mais on a cependant une description explicite de toutes les représentations irréductibles, à l'aide de ce qu'on appelle les "schémas d'Young"). En outre toute représentation linéaire irréductible de $\mathbf{GL}(E)$ dans un espace qui n'est plus nécessairement un espace de tenseurs, est néanmoins isomorphe à une des représentations "**tensorielles**" précédentes.

Mentionnons ici que le "calcul tensoriel" en géométrie différentielle est l'aspect "fibré" du calcul tensoriel algébrique que nous venons d'évoquer; **autrement** dit, il faut ici prendre sur une variété de base un espace fibré dont les fibres sont des espaces tensoriels d'une espèce donnée.

B 10) A l'étude et la détermination des représentations irréductibles de $\mathbf{GL}(E)$ se rattache la grande théorie des invariants, injustement oubliée à notre époque. On peut dire que c'est le plus "forcené" des exemples de linéarisation d'une théorie, mais, ici encore, cette linéarisation est remarquablement féconde. Le problème est le suivant: On considère l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré r en n variables, à coefficients complexes (par exemple), appelées aussi formes n-aires de degré r (et qu'on peut identifier canoniquement aux tenseurs covariants symétriques d'ordre r sur $\mathbf{C}^n$). Identifions une telle forme à la famille (a_α) de ses coefficients (on écrit $a_\alpha x^\alpha$ au lieu de $a_{\alpha_1\alpha_2..\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} .. x_n^{\alpha_n}$).

Cela étant, on appelle invariant de degré p un polynôme $P((a_\alpha))$ homogène et de degré p par rapport aux

a_α, et vérifiant la relation $P(u.(a_\alpha)) = (\det(u))^k P(a_\alpha)$ pour tout automorphisme $u \in \mathbf{GL}(\mathbf{C}^n)$ et pour un entier fixe k (fonction de p, n et r) (rappelons-nous que ce groupe "opère" sur tous les tenseurs, en particulier sur les formes n-aires). Pour trouver ces invariants, on commence par considérer l'invariant p o l a r i s é de P: c'est une f o r m e m u l t i l i n é a i r e s y m é t r i q u e F par rapport à p tenseurs symétriques d'ordre r (a_α^1), (a_α^2), ..., (a_α^p), telle que $F(u.(a_\alpha^1), u.(a_\alpha^2), \ldots, u.(a_\alpha^p)) = (\det u)^k F((a_\alpha^1), \ldots, (a_\alpha^p))$ et que $F((a_\alpha), (a_\alpha), \ldots, (a_\alpha)) = P((a_\alpha))$. Continuant à linéariser, il existe une forme l i n é a i r e G sur l'espace des tenseurs covariants d'ordre pr telle que

$$G((a_\alpha^1) \otimes (a_\alpha^2) \otimes \ldots \otimes (a_\alpha^p)) = F(a_\alpha^1), (a_\alpha^2), \ldots, (a_\alpha^p)),$$

et que $G(u.z) = (\det(u))^k G(z)$ pour tout tenseur $z \in T_{pr}(\mathbf{C}^n)$; mais cela signifie aussi que dans l'espace des tenseurs contravariants d'ordre pr, G engendre un sous-espace de dimension 1 s t a b l e pour $\mathbf{GL}(\mathbf{C}^n)$, et évidemment i r r é d u c t i b l e. Tous ces sous-espaces étant connus explicitement à l'aide des schémas d'Young, le problème de la recherche de tous les invariants est en principe résolu (cette méthode était dite au XIX^e siècle "méthode symbolique" de formation des invariants).

B 11) Je ne puis que mentionner ici un immense domaine tout entier dominé par l'idée de représentation linéaire: la théorie des g r o u p e s de L i e ; dont les groupes $\mathbf{GL}(E)$ ne sont que des cas particuliers. Il faut ajouter que l'on ne se limite d'ailleurs plus aux représentations linéaires correspondant à des espaces vectoriels de dimension finie; on a développé dans les 20 dernières années une théorie (beaucoup plus difficile) de la représentation linéaire des groupes dans des espaces de dimension infinie (espaces de Hilbert le plus souvent), utilisant toutes les ressources de l'Analyse fonctionnelle moderne, et qui est aussi devenue un outil essentiel de la Physique quantique.

B 12) Pour les groupes abéliens finis, toutes les représentations linéaires irréductibles sont de dimension 1, autrement dit les caractères d'un tel groupe G sont les homomorphismes de G dans le groupe **U** des nombres complexes de valeur absolue 1. Il est immédiat que ces caractères forment (pour la multiplication des fonctions) un g r o u p e $\hat{G}$, que l'on montre aisément être i s o m o r p h e à G (de façon non canonique). On constate que G et $\hat{G}$ se comportent vis-à-vis l'un de l'autre comme un espace vectoriel et son dual, d'où le nom de groupe d u a l de G donné à $\hat{G}$. Cette situation s'éclaircit lorsqu'on la généralise (comme il arrive si souvent en Mathématique): pour un groupe abélien l o c a l e m e n t c o m p a c t G, on appelle encore c a r a c t è r e s ses homomorphismes c o n t i n u s dans **U** ; ces caractères forment encore un groupe $\hat{G}$, sur lequel on peut définir de façon naturelle une topologie localement compacte (mais cette fois, il n'y a plus du tout isomorphie entre G et $\hat{G}$ en général). Non seulement les propriétés de "dualité" du cas fini se généralisent-elles à ce cas, mais encore on peut les faire découler de la dualité des espaces vectoriels topologiques. En outre, on s'est aperçu que la dualité des groupes localement compacts est le cadre naturel où doit se développer la théorie classique de l' A n a l y s e h a r m o n i q u e (séries et intégrales de Fourier), qui est encore un outil fondemental de l'Analyse moderne.

Pour terminer cette revue si rapide, je mentionnerai un des exemples les plus frappants de l' u n i t é des Mathématiques modernes: la théorie des nombres algébriques (ou Arithmétique supérieure), qui déjà avait subi une première "linéarisation" avec Dedekind et Kronecker (B 5) vient récemment d'être linéarisée d'une tout autre manière (issue des idées de Hensel sur les nombres p-adiques): on associe en effet de façon naturelle à tout corps K de nombres algébriques des g r o u p e s a b é l i e n s l o c a l e m e n t c o m p a c t s (infinis), dits respectivement groupe des a d è l e s et groupe des i d è l e s de K. Non seulement les propriétés arithmétiques de K s'expriment-elles de façon beaucoup plus simple et frappante à l'aide de ces groupes, mais la possibilité d'appliquer à ces derniers l'Analyse harmonique a conduit à de nouvelles découvertes, où il est en outre remarquable que des théories aussi lointaines en apparence que les groupes de Lie et la Géométrie algébrique jouent un rôle important.

C) Quand je parle de "métaphysique" de l'Algèbre linéaire, j'emploie ce mot dans le sens où l'utilisaient Lagrange et les mathématiciens du XVIII^e siècle, et qui correspond g r o s s o m o d o à notre conception moderne de "structure". En maniant constamment les concepts si commodes et utiles de l'Algèbre linéaire, tels que les notions de noyau, de conoyau, d'image, de suite exacte, de dualité, de produit tensoriel, et en les appliquant (comme nous avons vu ci-dessus) dans les situations les plus diverses, les mathématiciens ont fini par remarquer que ces notions avaient des analogues dans des théories qui n'avaient plus rien (ou plus grand chose) de "linéaire", d'où l'idée de les systématiser et de les généraliser en les extrayant de leur contexte "linéaire" trop étroit. C'est ce qui a donné naissance à la théorie moderne des "c a t é g o r i e s" et des "f o n c t e u r s", de caractère très abstrait et qui est regardée par beaucoup de mathématiciens d'âge mûr avec autant de répulsion que la Théorie des ensembles par les contemporains de Cantor; mais il apparaît dès maintenant certain que les mathématiciens ne pourront plus dorénavant se passer de ce nouveau langage, pas plus qu'ils n'accepteraient de se passer du langage des Ensembles. Le parallèle se poursuit d'ailleurs plus loin: de même qu'il ne faut pas attribuer trop d'importance à la Théorie des Ensembles, au point de la développer p o u r e l l e - m ê m e et sans souci des applications, de même il est vraisemblable que les développements de la théorie des catégories, non exigés par les applications à d'autres théories mathématiques, se révèleront aussi stériles que toute la littérature sur les cardinaux et les ordinaux; il s'agit d'un cadre et d'un guide pour la Mathématique d'ajourd'hui, plus que d'une théorie mathématique proprement dite.

L'Algèbre linéaire et la géométrie fossile.

Beaucoup de membres de l'Enseignement secondaire ont peine à comprendre pourquoi les mathématiciens professionnels, dans leur immense majorité, se détournent de la "Géométrie élémentaire". Nourris de la tradition du XIX^{e} siècle, où cette partie des mathématiques faisait l'objet d'actives et nombreuses recherches dans les universités, ils ne peuvent croire que du jour au lendemain, tous les problèmes ouverts dans cette théorie aient été résolus, et ils auraient volontiers tendance à considérer le dédain manifesté par leurs collègues de l'Enseignement supérieur comme un effet d'une mode, ou d'un esprit iconoclaste systématique, voire d'un dépit de ne pouvoir rivaliser avec les grands ancêtres sur leur propre terrain.

Pour comprendre qu'aucune de ces accusations n'est valable, et pourquoi certaines théories mathématiques, autrefois florissantes, peuvent se "fossiliser" assez brusquement, il faut se rendre compte de ce que recherchent avant tout les mathématiciens professionnels: ce sont des méthodes générales de solution des problèmes ouverts; nul ne peut leur faire grief, lorsqu'une telle méthode a été trouvée, d'abandonner le problème pour d'autres encore sans solution, plutôt que de continuer à examiner de multiples cas particuliers du problème résolu en se bornant à leur appliquer la méthode générale obtenue. Pour prendre un exempleextrême, on connaît depuis Leibniz la méthode générale d'intégration d'une équation différentielle linéaire du premier ordre; tout le monde trouverait ridicule un mathématicien qui s'amuserait à compiler d'innombrables exemples d'application de cette méthode à des équations particulières de ce type.

Toutes proportions gardées, et bien que la connaissance de ce fait ne soit guère répandue, c'est la même situation qui existe en "Géométrie élémentaire" depuis la fin du XIX^{e} siècle. Je précise que j'entends les termes "Géométrie élémentaire" au sens de Klein[1)]: déterminer les relations identiques (ou "syzygies") entre invariants (ou plus généralement, "covariants") du groupe de la "Géométrie" considérée (le groupe des déplacements, ou des similitudes, dans le cas de la géométrie euclidienne classique); par exemple, un théorème tel que celui qui exprime que les hauteurs (resp. les médianes) d'un triangle concourent, décrit une "syzygie" entre les "covariants" de trois points constitués par les hauteurs (resp. médianes) du triangle dont ils sont sommets, pour le groupe des déplacements (resp. le groupe affine). Or, le développement de la "méthode symbolique" esquissée plus haut (B 10) a finalement conduit à un procédé m é c a n i q u e de recherche de t o u s les covariants des groupes considérés et de t o u t e s leurs "syzygies"; j'entends par là qu'on pourrait "programmer" un calculateur électronique de façon qu'il fournisse toutes les syzygies entre covariants de degrés donnés. On conçoit que dans ces conditions, les démonstrations "ad hoc" de théorèmes de Géométrie élémentaire soient considérées par la plupart des mathématiciens comme un exercice intellectuel du niveau des problèmes de "mots croisés", et qu'ils réservent leurs efforts à des

1) J'insiste sur ce point à cause de malentendus soulevés par certains mathématiciens qui (d'une façon abusive à mon avis) donnent aux mots "Géométrie élémentaire" un sens beaucoup plus vaste, englobant en somme toutes les questions mathématiques qui peuvent se poser à propos du plan ou de l'espace euclidien à 3 dimensions, y compris de difficiles problèmes touchant à la théorie des ensembles convexes, à la Topologie et la théorie de la mesure. Bien entendu, pour de tels problèmes il n'y a rien de semblable au procédé quasi mécanique dont nous parlons ci-dessous, et un grand nombre d'entre eux ne sont même pas encore résolus.

problèmes plus sérieux. C'est pourquoi aussi ils souhaitent que le temps si précieux des éleves de l'Enseignement secondaire ne soit plus perdu sur de pareilles amusettes, mais qu'on l'utilise au contraire pour leur donner les techniques qui leur seront indispensables par la suite.

BIBLIOGRAPHIE

Niveaux de l'Algebre lineaire:

Pour les niveaux 1) et 2), voir:

J. Dieudonné, Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, Paris (Hermann), 1964

Pour les niveaux 2) et 4):

E. Artin, Algèbre géométrique, Paris (Gauthier-Villars), 1963.

Pour le niveau 3):

N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Livre V: Espaces vectoriels topologiques (Actual. Scient. et Ind., no 1189 et 1229) Paris (Hermann)

Pour les niveaux 4) et 5):

N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Livre II: Algèbre, chap. II. Algèbre linéaire, 3e ed. (Actual. Scient. et Ind., no 1236) Paris (Hermann), 1962.

Pour le niveau 6):

S. Maclane, Homology, Berlin (Springer), 1963.

Applications de l'Algèbre linéaire: Pour la théorie des représentations linéaires dans des espaces de dimension finie, voir:

C.W. Curtis and I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, New York (Interscience), 1962.

Pour la théorie des invariants:

H. Weyl, The classical groups, 2nd ed., Princeton Univ. Press, 1946.

Pour le Calcul infinitésimal envisagé comme "approximation linéaire":

J. Dieudonné, Fondements de l'Analyse moderne, Paris Gauthier-Villars), 1965.

Pour les variétés différentiables:

S. Lang, Introduction to Differentiable manifolds, New York (Interscience), 1962.

Pour les espaces fibrés:

N. Steenrod, Topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951.

Pour la théorie des faisceaux:

R. Godement, Théorie des faisceaux, Paris (Hermann), 1958.

Pour la théorie spectrale et l'Analyse harmonique:

M. Naimark, Normed rings, Groningen (Noordhoff),1964.

Pour la théorie moderne des équations linéaires aux dérivées partielles:

L. Hörmander, Linear partial differential equations, Berlin (Springer) 1964.

Pour la théorie des distributions:

I.M. Guelfand-G.E. Chilov, Les distributions, Paris (Dunod), 1962.

Pour la théorie de Galois:

N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Livre II, Algèbre, chap. V Corps commutatifs (Actual. Scient. et Ind., No 1102), Paris (Hermann), 1959.

Pour la théorie des nombres algébriques:

S. Lang, Algebraic numbers, Reading (Addison-Wesley), 1964.

Pour la Topologie algébrique:

H. Seifert-W. Threlfall: Lehrbuch der Topologie, New York (Chelsea) 1947.

Pour les groupes de Lie:

C. Chevalley, Theory of Lie groups I, Princeton Univ. Press, 1946.

BILINEARFORMEN UND KEGELSCHNITTE

von

Gunter Pickert
(Giessen)

Will man mit der Forderung ernst machen, die Vektoralgebra in den geometrischen Schulstoff aufzunehmen, so hat es keinen Sinn, dies gewissermassen "anhangsweise" zu tun, d.h. erst nach einer traditionellen analytischen Geometrie mit Koordinaten: Die verfügbare Unterrichtszeit duldet eine solche "Zweigleisigkeit" nicht, und zudem würde den Schülern das neu eingeführte Arbeiten mit Vektoren gegenüber dem schon gewohnten Umgang mit Koordinaten als schwieriger erscheinen. Man wird also versuchen müssen, von vornherein die analytische Geometrie vektoriell aufzubauen. Das bereitet keine Schwierigkeiten bei den linearen Gebilden, scheint aber bisher bei den Kegelschnitten auf Hindernisse zu stossen. Um diese zu überwinden, braucht man lediglich nach dem "wissenschaftlichen Ort" der Kegelschnittlehre in der heutigen Systematik der Mathematik zu fragen. Hier kann die Antwort nur lauten: Die Kegelschnitte gehören zur Theorie der Bilinearformen in einem zweidimensionalen Vektorraum [1] und erhalten von dort ihre grosse Bedeutung für viele Gebiete der Mathematik. Daher soll im folgenden geschildert werden, wie man die Kegelschnitte von den Bilinearformen her und zusammen mit diesen in elementarer Weise einführen kann [2]. Zugleich ergibt sich dabei zwanglos eine Einteilung in eine vorangehende affine und eine dann erst folgende metrische

1) Für die projektive Geometrie, die jedoch wohl für den Schulstoff nicht in Frage kommt, müsste natürlich ein dreidimensionaler Vektorraum genommen werden.
2) Siehe auch M. BARNER u. F. FLOHR, Die Kegelschnitte in vektorieller Behandlung; Der Mathematikunterricht, 1963, Heft 3 (Verlag Klett, Stuttgart).

Behandlung der Kegelschnitte, wobei die Einführung der Metrik auf die affine Kegelschnittlehre gestützt werden kann.

Als bekannt vorausgesetzt wird der Begriff des r e e l l e n V e k t o r r a u m e s : Eine (additiv geschriebene) kommutative Gruppe $\mathfrak{V}$ (Elemente als V e k t o r e n bezeichnet) zusammen mit einer (multiplikativ geschriebenen) Abbildung von $\mathbf{R} \times \mathfrak{V}$ in $\mathfrak{V}$ ($\mathbf{R}$ bezeichne die Menge der reellen Zahlen) mit den folgenden Eigenschaften (für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{V}$, $r, s \in \mathbf{R}$):

$$r(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = r\mathbf{x} + r\mathbf{y}, \quad (r+s)\mathbf{x} = r\mathbf{x} + s\mathbf{x}, \quad (rs)\mathbf{x} = r(s\mathbf{x}),$$

$$1\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Im folgenden werden für $\mathbf{a} \in \mathfrak{V}$, $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \subseteq \mathfrak{V}$ die Definitionen

$$\mathbf{R}\mathbf{a} =_{df} \{r\mathbf{a} \mid r \in \mathbf{R}\}, \quad \mathcal{M} + \mathcal{M}' =_{df} \{\mathbf{x}+\mathbf{x}' \mid \mathbf{x} \in \mathcal{M},\ \mathbf{x}' \in \mathcal{M}'\}$$

benutzt und dabei im Falle einer einelementigen Menge $\mathcal{M} = \{\mathbf{a}\}$ abkürzend $\mathbf{a} + \mathcal{M}'$ statt $\mathcal{M} + \mathcal{M}'$ geschrieben. Ein Vektorpaar $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ heisst l i n e a r a b h ä n g i g, wenn es $r \in \mathbf{R}$ mit $\mathbf{a}_1 = r\mathbf{a}_2$ oder $\mathbf{a}_2 = r\mathbf{a}_1$ gibt. Einen reellen Vektorraum, in dem jedes Vektorpaar linear abhängig ist, aber auch vom N u l l v e k t o r $\mathbf{0}$ (dem neutralen Element bezgl. der Addition) verschiedene Vektoren enthalten sind, erhält man so: Man nimmt als $\mathfrak{V}$ die additive Gruppe der reellen Zahlen und erklärt das Produkt der reellen Zahl r mit dem Vektor $\mathbf{x}$ $(\in \mathbf{R})$ als das gewöhnliche Produkt der reellen Zahlen $r, \mathbf{x}$. Die im folgenden vorausgesetzte Z w e i d i m e n s i o n a l i t ä t von $\mathfrak{V}$ besagt die Existenz eines linear unabhängigen Vektorpaares $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ mit

$$\mathfrak{V} = \mathbf{R}\mathbf{a}_1 + \mathbf{R}\mathbf{a}_2.$$

Jedes solche Paar heisst B a s i s von $\mathfrak{V}$, und man beweist, dass wegen der Zweidimensionalität jedes linear unabhängige Paar bereits Basis ist. Für einen Vektor $\mathbf{x}$ und eine Basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ wird das durch

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$$

eindeutig bestimmte Zahlenpaar (x_1, x_2) als das K o o r d i n a t e n p a a r von $\mathbf{x}$ bezgl. $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ bezeichnet. Diese

Koordinatendarstellung der Vektoren zeigt, dass alle zweidimensionalen Vektorräume zueinander isomorph sind. Trotzdem erscheint es unzweckmässig, sich von vornherein auf den Vektorraum der Paare reeller Zahlen zu beschränken; denn dann müsste man auf den grossen Vorteil verzichten, so verschiedene Gebilde wie die Menge der ebenen Translationen und die Lösungsmenge einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ohne weiteres als zweidimensionale reelle Vektorräum auffassen zu können. Zudem hat der Vektorraum der Zahlenpaare eine ausgezeichnete Basis, nämlich ((1,0), (0,1)); durch ausschliessliche Beschäftigung mit den Zahlenpaaren würde der Lernende daher leicht das wichtige Prinzip der Vektoralgebra aus den Augen verlieren, eine Basis nur bei Bedarf und dann der Fragestellung angepasst zu wählen.

Ist $\mathfrak{V}$ der Vektorraum der reellen Ebene, so können die Vektoren, also die Translationen der Ebene, nach Wahl eines Bezugspunktes O zur Darstellung der Punkte der Ebene folgendermassen benutzt werden: Jedem Punkt X wird als sein O r t s - v e k t o r diejenige Translation zugeordnet, die O nach X bringt. Die Geraden (als Punktmengen) werden in diesem Sinn dargestellt durch die Vektormengen $\mathbf{a} + \mathbf{R}\mathbf{c}$ mit $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Im folgenden werden daher solche Vektormengen stets als Geraden bezeichnet. Auch soll zur Vereinfachung der Ausdrucksweise zwischen einem Punkt und seinem Ortsvektor (bezgl. eines ein für allemal fest gewählten Bezugspunktes O) nicht unterschieden werden.

Die Multiplikation der reellen Zahlen ist in dem oben erwähnten Beispiel $\mathfrak{V} = \mathbf{R}$ als Multiplikation der Vektoren mit den reellen Zahlen gedeutet worden. Sie kann aber darin natürlich auch als Abbildung von $\mathfrak{V} \times \mathfrak{V}$ in $\mathbf{R}$ aufgefasst werden, also als eine Multiplikation von Vektoren mit Vektoren, bei der die Produkte reelle Zahlen sind. Bezeichnet man die Multiplikation mit F und gemäss der "Funktionsschreibweise" das Produkt der Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dann mit $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, so nehmen Distributiv-, Assoziativ- und Kommutativgesetz der Multiplikation der reellen Zahlen die Formen an:

(1) $F(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + F(\mathbf{y}, \mathbf{z})$,
(2) $F(r\mathbf{x}, \mathbf{y}) = rF(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,
(3) $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Als naturgemasses Analogon dieser Multiplikation bieten sich daher bei einem beliebigen reellen Vektorraum $\mathfrak{V}$ diejenigen Abbildungen F von $\mathfrak{V} \times \mathfrak{V}$ in $\mathbf{R}$ an, die für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{V}$ und alle $r \in \mathbf{R}$ die Gleichungen (1-3) erfüllen. Sie werden **symmetrische Bilinearformen** von $\mathfrak{V}$ genannt.

Ist f eine symmetrische Bilinearform, so ergibt jedes $\mathbf{y} \in \mathfrak{V}$ eine durch $L(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (für alle $\mathbf{x} \in \mathfrak{V}$) erklärte Abbildung L von $\mathfrak{V}$ in $\mathbf{R}$ mit

(4) $L(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y})$, $L(r\mathbf{x}) = rL(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{V}$, $r \in \mathbf{R}$.

Eine Abbildung L von $\mathfrak{V}$ in $\mathbf{R}$ mit (4) nennt man **Linearform** von $\mathfrak{V}$. Insbesondere ist $\mathbf{x} \longrightarrow 0$ eine solche; sie wird ebenso wie die symmetrische Bilinearform $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longrightarrow 0$ **Nullform** genannt. Wir beschränken uns im folgenden wieder auf einen zweidimensionalen reellen Vektorraum $\mathfrak{V}$, obwohl die meisten Ergebnisse sich leicht auf n-dimensionale Vektorräume verallgemeinern lassen. Es gilt dann der

<u>Satz über die Linearformen.</u>

I. Zu jeder **Basis** $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ und jedem Zahlenpaar (u_1, u_2) gibt es genau eine **Linearform** L mit $L(\mathbf{a}_\nu) = u_\nu$ $(\nu = 1,2)$.

II. Zu jeder **Linearform** L, die **nicht** die Nullform ist, gibt es eine **Basis** $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ mit

$$L(\mathbf{b}_1) = 1, \; L(\mathbf{b}_2) = 0.$$

III. $\{\mathbf{x} \mid L(\mathbf{x}) = 1\}$ bestimmt bereits die Linearform L. Der sehr einfache Beweis sei hier nicht ausgeführt. Für die Herleitung von I ist wesentlich die aus (4) folgende Gleichung

(5) $L(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2) = x_1u_1 + x_2u_2$.

Der Beweis von III zeigt, falls L nicht die Nullform ist, dass die Niveaulinien $\{\mathbf{x} \mid L(\mathbf{x}) = u\}$ von L eine Parallelenschar bilden und dass jede Gerade als Niveaulinie einer Linearform, also (bei beliebig vorgegebener Basis) gemäss (5) durch eine Gleichung

$$x_1u_1 + x_2u_2 = u \quad (\text{nicht } u_1 = u_2 = 0)$$

für die Koordinatenpaare (x_1, x_2) ihrer Punkte dargestellt werden kann.

Die mit einer symmetrischen Bilinearform F hergestellte Abbildung $\mathbf{x} \longrightarrow F(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ von $\mathfrak{V}$ in $\mathbf{R}$ wird als die zu F gehörige q u a d r a t i s c h e F o r m Q_F bezeichnet. F wird durch Q_F eindeutig bestimmt; denn aus (1), (3) folgt leicht

$$(6) \quad 2F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = Q_F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - Q_F(\mathbf{x}) - Q_F(\mathbf{y}).$$

Während sich die Geraden als Niveaulinien von Linearformen ergeben haben, gewinnt man die Ellipsen und Hyperbeln als Niveaulinien von quadratischen Formen. Es gilt der

Satz über die Bilinearformen.

I. Zu jeder Basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ und jedem Zahlenquadrupel $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ mit $a_{12} = a_{21}$ gibt es genau eine symmetrische Bilinearform F mit $F(\mathbf{a}_\mu, \mathbf{a}_\nu) = a_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu \in \{1,2\})$.

II. Zu jeder symmetrischen Bilinearform F, die nicht die Nullform ist, gibt es eine Basis $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ mit $F(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = 0$ $Q_F(\mathbf{b}_1) \in \{1, -1\}$, $Q_F(\mathbf{b}_2) \in \{1, -1, 0\}$.

III. Ist die Menge $\mathcal{C}_F =_{df} \{\mathbf{x} \mid Q_F(\mathbf{x}) = 1\}$ nicht leer, so bestimmt sie bereits die symmetrische Bilinearform F.

Beweis.

I. Für eine Bilinearform F mit den gewünschten Eigenschaften erhält man durch Anwenden von (5) auf die Linearformen

$$\mathbf{x} \longrightarrow F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \longrightarrow F(\mathbf{a}_\mu, \mathbf{y}) \quad (\mu = 1,2)$$

$$(7) \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\mu,\nu=1}^{2} x_\mu a_{\mu\nu} y_\nu ,$$

falls $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2$ gesetzt wird. Das beweist die Eindeutigkeitsbehauptung. Andererseits zeigt man leicht, dass durch (7) wirklich eine symmetrische Bilinearform erklärt wird. Das Zahlenquadrupel der $a_{\mu\nu}$ pflegt man übrigens nicht als Abbildung von $\{1,2,3,4\}$ aufzufassen, wie es in der Behauptung geschrieben ist, sondern als die Abbildung $(\mu,\nu) \longrightarrow a_{\mu\nu}$ von $\{1,2\} \times \{1,2\}$ in $\mathbf{R}$. Eine solche Abbildung nennt man (zweireihige quadratische) M a t r i x, im hier vorliegenden Fall $a_{12} = a_{21}$ insbesondere s y m m e t r i s c h e M a t r i x. Wie bei Funktionen auf endlichen Paarmengen üblich, gibt man eine Matrix meist in "Tabellenform" an:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

II. Da F nicht die Nullform sein soll, muss es nach (6) einen Vektor $\mathbf{c}_1$ mit $Q_F(\mathbf{c}_1) \neq 0$ geben. Wegen $\mathbf{c}_1 \neq \mathbf{0}$ darf man annehmen, dass etwa $(\mathbf{c}_1, \mathbf{a}_2)$ Basis ist. Damit nun $\mathbf{c}_2 = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{a}_2$ die Gleichung $F(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2) = 0$ erfüllt, braucht man nur $x_1 = F(\mathbf{c}_1,\mathbf{a}_2)$, $x_2 = -Q_F(\mathbf{c}_1)$ zu setzen, und wegen $x_2 \neq 0$ ist dann auch $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ Basis. Wegen $Q_F(r\mathbf{x}) = r^2 Q_F(\mathbf{x})$ erhält man nun durch Multiplikation der $\mathbf{c}_\nu$ mit geeigneten reellen Zahlen eine Basis der geforderten Eigenschaft.

III. Mit einer Basis $(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)$ wie in II folgt aus (7)

(8) $F(x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2,\ y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2) = e_1x_1y_1 + e_2x_2y_2$,

wobei $|e_1| = 1$ ist, während für e_2 die Möglichkeiten $|e_2| = 1$ und $e_2 = 0$ bestehen. $\mathcal{C}_F$ ist offenbar genau dann leer, wenn $e_1, e_2 \leq 0$. Es gibt also (von einer Indexvertauschung abgesehen) nur drei Fälle mit nichtleerer Menge $\mathcal{C}_F$:

1) $e_1 = e_2 = 1$: Q_F positiv definit; $\mathcal{C}_F$ E l l i p s e.

2) $e_1 = 1$, $e_2 = -1$: Q_F indefinit; $\mathcal{C}_F$ H y p e r b e l.

3) $e_1 = 1$, $e_2 = 0$: Q_F positiv semidefinit; $\mathcal{C}_F$ P a r a l l e l e n p a a r.

Für $Q_F(x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2)$ ergibt sich in den drei Fällen:

$$x_1^2 + x_2^2 , \quad x_1^2 - x_2^2 , \quad x_1^2 .$$

Daraus leitet man leicht die folgende Beschreibung der Fallunterscheidung mittels $\mathcal{C}_F$ her: Genau im 1. Fall hat keine Gerade $\mathbf{R}\mathbf{c}$ $(\mathbf{c} \neq \mathbf{0})$ leeren Durchschnitt mit $\mathcal{C}_F$, während es genau im 3. Fall eine einzige Gerade dieser Eigenschaft gibt. Wählt man im 3. Fall $\mathbf{b}_2$ so, dass $\mathbf{R}\mathbf{b}_2$ leeren Durchschnit mit $\mathcal{C}_F$ hat, und $\mathbf{b}_1 \in \mathcal{C}_F$, so ist $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ bereits eine Basis der in II verlangten Art und daher F durch $\mathcal{C}_F$ bestimmt. Um das auch in den beiden andern Fällen zu zeigen, fragen wir für $\mathbf{b} \in \mathcal{C}_F$ nach den Geraden $\mathbf{b} + \mathbf{R}\mathbf{c}$ $(\mathbf{c} \neq \mathbf{0})$ durch $\mathbf{b}$, die mit $\mathcal{C}_F$ nur $\mathbf{b}$ gemeinsam haben. $\mathbf{b} + x\mathbf{c} \in \mathcal{C}_F$ erweist sich als gleichwertig mit

$$x(xQ_F(\mathbf{c}) + 2F(\mathbf{b},\mathbf{c})) = 0.$$

Wegen $Q_F(\mathbf{b}) = 1$ ist $(\mathbf{b},\mathbf{c})$ im Falle $Q_F(\mathbf{c}) = 0$ Basis, so dass dann nicht auch $F(\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0$ sein kann, da sonst mit $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}$ der 3. Fall vorläge. Die an die Gerade gestellte Bedingung besagt daher: e n t w e d e r $F(\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0$ o d e r $Q_F(\mathbf{c}) = 0$. Bei $F(\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0$ hat man

$$(9) \qquad \mathbf{b} + \mathbf{R}\mathbf{c} = \{\mathbf{x} \mid F(\mathbf{b},\mathbf{x}) = 1\} \quad ;$$

es gibt also nur eine Gerade dieser Art, und diese ist die 1-Niveaulinie der Linearform $\mathbf{x} \longrightarrow F(\mathbf{b},\mathbf{x})$, bestimmt also nach dem Satz über die **Linearformen** diese Linearform. Bei einer Ellipse $\mathcal{C}_F$ ist $Q_F(\mathbf{c}) = 0$ wegen $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ ausgeschlossen. Die Gerade (9) kann also als die einzige Gerade durch $\mathbf{b}$, die mit $\mathcal{C}_F$ nur $\mathbf{b}$ gemeinsam hat, bereits aus $\mathcal{C}_F$ bestimmt werden. Bei einer Hyperbel $\mathcal{C}_F$ dagegen gibt es noch genau zwei weitere Geraden $\mathbf{b} + \mathbf{R}\mathbf{c}$ dieser Eigenschaft, nämlich mit $Q_F(\mathbf{c}) = 0$. Aber man kann die Gerade (9) von ihnen unterscheiden ohne F zu benutzen, allein mittels $\mathcal{C}_F$. Ergänzt man nämlich $\mathbf{b}$ durch $\mathbf{b}' \in \mathcal{C}_F$ zu einer Basis $(\mathbf{b}, \mathbf{b}')$, so sind die Geraden

$$\{\mathbf{x} \mid F(\mathbf{b},\mathbf{x}) = 1\}, \ \{\mathbf{x} \mid F(\mathbf{b}',\mathbf{x}) = 1\}$$

nicht parallel, wohl aber die beiden Geraden $\mathbf{b} + \mathbf{R}\mathbf{c}$ (mit $Q_F(\mathbf{c}) = 0$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$) zu den Geraden $\mathbf{b}' + \mathbf{R}\mathbf{c}$. Die behauptete Nichtparallelität ergibt sich am einfachsten aus der Koordinatendarstellung

(10) $\quad x_1 b_1 \pm x_2 b_2 = 1$ (+ bei Ellipse, − bei Hyperbel)

von (9) mit $\mathbf{b} = b_1\mathbf{b}_1 + b_2\mathbf{b}_2$. Aus der Koordinatendarstellung von $\mathcal{C}_F$

(11) $\quad x_1^2 \pm x_2^2 = 1$ (+ bei Ellipse, − bei Hyperbel)

erkennt man leicht, dass es ein $\mathbf{b}'$ mit den angegebenen Eigenschaften gibt: Bei der Ellipse [3] setzt man $\mathbf{b}' = \mathbf{b}_2$ falls $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1$ oder $= -\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}' = \mathbf{b}_1$ falls $\mathbf{b} = \mathbf{b}_2$ oder $= -\mathbf{b}_2$, bei der Hyperbel $\mathbf{b}' = 5/3\,\mathbf{b}_1 + 4/3\,\mathbf{b}_2$ falls $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1$ oder $= -\mathbf{b}_1$ und (bei Ellipse und Hyperbel) $\mathbf{b}' = b_1\mathbf{b}_1 - b_2\mathbf{b}_2$ sonst. Wir haben somit gezeigt, dass die Gerade (9) auch bei der Hyperbel rein geometrisch durch $\mathcal{C}_F$ bestimmt wird. Sie heisst bei Ellipse sowohl wie bei Hyperbel die T a n g e n t e in $\mathbf{b}$ an $\mathcal{C}_F$. Die Tangenten in $\mathbf{b}$ und $\mathbf{b}'$ bestimmen nun die Linearformen

$$\mathbf{x} \longrightarrow F(\mathbf{b},\mathbf{x}) \;,\quad \mathbf{x} \longrightarrow F(\mathbf{b}',\mathbf{x})$$

und, da $(\mathbf{b}, \mathbf{b}')$ Basis ist, also auch mit $\mathbf{y} = y\mathbf{b} + y'\mathbf{b}'$ wegen (1-3) jede Linearform $\mathbf{x} \longrightarrow F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ und somit F.

Um die noch fehlenden Kegelschnittarten P a r a b e l , G e r a d e n p a a r und G e r a d e [4] zu erhalten, hat man $\mathcal{C}_F$ mittels einer Linearform L zu verallgemeinern zu

(12) $$\left\{ \mathbf{x} \mid Q_F(\mathbf{x}) + 2L(\mathbf{x}) = a \right\}.$$

Unter der Voraussetzung, diese Menge enthalte mehr als ein Element, ergibt sie sich bei positiv definiter oder indefiniter quadratischer Form Q_F als Ellipse, Hyperbel oder als Vereinigungsmenge zweier nichtparalleler Geraden (Geradenpaar): Man kann einen Vektor $\mathbf{a}$ mit

$$F(\mathbf{x},\mathbf{a}) = L(\mathbf{x}) \text{ für alle } \mathbf{x}$$

finden, so dass sich (12) wegen (6) mit $a' = a + Q_F(\mathbf{a})$ als

---

3) Wir haben den Vektor $\mathbf{b}'$ oben nur für die Hyperbel benötigt; weiter unten brauchen wir ihn jedoch auch für die Ellipse.

4) Die übliche Bezeichnung D o p p e l g e r a d e erhält erst in der projektiven Geometrie unter Verwendung des Begriffs der Korrelation einen Sinn.

$$\{\mathbf{x} - \mathbf{a} \mid Q_F(\mathbf{x}) = a'\} = -\mathbf{a} + \{\mathbf{x} \mid Q_F(\mathbf{x}) = a'\}$$

schreiben lässt; im Falle $a' \neq 0$ erhält man Ellipse oder Hyperbel mit $-\mathbf{a}$ als Mittelpunkt, im Falle $a' = 0$ ein Geradenpaar. Bei positiv semidefiniter quadratischer Form Q_F dagegen erweist sich die (lediglich als nichtleer vorausgesetzte) Menge (12) als Parabel, Parallelenpaar oder Gerade: Wählt man die Basis wie im Beweis des Satzes über die Bilinearformen, so wird (12) in Koordinaten durch eine Gleichung

$$x_1^2 + 2u_1x_1 + 2u_2x_2 = a$$

beschrieben, die sich zu

$$(x_1 + u_1)^2 = -2u_2x_2 + a'$$

mit $a' = a + u_1^2$ umformen lässt; im Falle $u_2=0$ erkennt man bei $a'\neq 0$ ein Parallelenpaar, bei $a'=0$ eine Gerade, während sich bei $u_2\neq 0$ durch Multiplikation des zweiten Basisvektors mit einer geeigneten Zahl $u_2 = -1$ erreichen lässt, so dass (12) durch Translation aus einer Kurve mit der Gleichung

$$x_1^2 = 2x_2 \tag{13}$$

entsteht. Man rechnet leicht nach, dass für $\mathbf{b}$ aus (12) im Falle einer Ellipse oder Hyperbel

$$\{\mathbf{x} \mid F(\mathbf{b},\mathbf{x}) + L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{b}) = a\} \tag{14}$$

die Tangente in $\mathbf{b}$ ist. Auch bei einer Parabel hat (14) mit (12) nur $\mathbf{b}$ gemeinsam; es gibt hier jedoch noch genau eine weitere Gerade durch $\mathbf{b}$ mit dieser Eigenschaft, nämlich $\mathbf{b} + \mathbf{R}\,\mathbf{b}_2$, wenn $(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)$ als Basis wie im Satz über die Bilinearformen gewählt ist. In dem Koordinatensystem der Parabelgleichung (13) hat die Tangente (14) die Gleichung

$$x_1b_1 = x_2 + b_2 \,, \tag{15}$$

wenn (b_1,b_2) das Koordinatenpaar von $\mathbf{b}$ ist.

Damit hat man alles zur Hand, was für eine affine Behandlung der Kegelschnitte benötigt wird. Es sei hier nur noch ergänzend auf den Polarenbegriff hingewiesen. Wie man aus (10) und (15) erkennt, ist (9) bei Ellipse und Hyperbel für jeden Vektor $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ und (14) bei der Parabel bei beliebigem $\mathbf{b}$ eine Gerade. Man bezeichnet sie als die Polare von $\mathbf{b}$ bezgl. des Kegelschnitts. Da die in (9), (14) auftretenden Gleichungen symmetrisch in $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$ sind, besitzt der Polarenbegriff die folgende Symmetrieeigenschaft: Haben $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$ bezgl. eines Kegelschnitts Polaren, so gehört $\mathbf{x}$ genau dann der Polaren von $\mathbf{b}$ an, wenn $\mathbf{b}$ der Polaren von $\mathbf{x}$ angehört. Die folgende Betrachtung wird auf eine Ellipse oder Hyperbel $\mathcal{C}_F$ beschränkt, lässt sich jedoch entsprechend bei einer Parabel durchführen. Im Falle $\mathbf{0} \neq \mathbf{b} \notin \mathcal{C}_F$ sei $\mathbf{b} + t\mathbf{a}$ Schnittpunkt von $\mathbf{b} + R\mathbf{a}$ mit der Polaren von $\mathbf{b}$, also wegen (9)

$$Q_F(\mathbf{b}) + t\, F(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 1,$$

wodurch natürlich $F(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$ wegen $Q_F(\mathbf{b}) \neq 1$ ausgeschlossen wird. Da $\mathbf{0}$ keiner Polaren angehört, besitzt $\mathbf{b} + t\mathbf{a}$ eine Polare, die wegen der Symmetrieeigenschaft $\mathbf{b}$ enthalten muss, also die Form $\mathbf{b} + R\mathbf{a}'$ hat. Aus

$$\mathbf{b} + R\mathbf{a}' = \{\mathbf{x} \mid F(\mathbf{b} + t\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 1\}$$

folgt $F(\mathbf{b} + t\mathbf{a}, \mathbf{a}') = 0$, also

$$F(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + t\, F(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = 0,$$

was zusammen mit der oben aufgestellten Bedingung für t die Gleichung

$$(16) \qquad F(\mathbf{a},\mathbf{b})F(\mathbf{a}',\mathbf{b}) = (Q_F(\mathbf{b}) - 1)F(\mathbf{a},\mathbf{a}')$$

liefert. (16) bestimmt nun eine umkehrbare Abbildung

$$(17) \qquad \mathbf{b} + R\mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{b} + R\mathbf{a}'$$

des Geradenbüschels in $\mathbf{b}$ auf sich, bei der die (anfänglich ausgeschlossene) Gerade $\mathbf{b} + R\mathbf{a}$ mit $F(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$ auf die Gerade $R\mathbf{b}$ abgebildet wird. Die offensichtlich mit ihrer Umkehrung übereinstimmende Abbildung (17) wird als die Geradeninvolution in $\mathbf{b}$ bezgl. $\mathcal{C}_F$ bezeichnet. Im bisher ausgeschlossenen Fall $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ wird (16) zu $F(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = 0$, so dass (17) jedem Durchmesser den konjugierten Durchmesser zuordnet [5]; die Geradeninvolution (17) heisst dann Durchmesserinvolution;

5) Erst in der projektiven Geometrie wird die Ausnahmestellung des Mittelpunktes eines Kegelschnitts aufgehoben.

diese gibt es bei der Parabel natürlich nicht.

Von der bisher allein benutzten affinen Geometrie kann man nun folgendermassen zur metrischen Geometrie übergehen: Man zeichnet eine Ellipse $\mathcal{C}_F$ aus und nennt sie E i n h e i t s k r e i s , worauf sich dann die Zahl $\sqrt{Q_F(\mathbf{x})}$ als L ä n g e (oder: Betrag) $|\mathbf{x}|$ des Vektors $\mathbf{x}$ anbietet; ferner werden die Geraden $\mathbf{b}+R\mathbf{a}$, $\mathbf{b}+R\mathbf{a}'$ $(\mathbf{a},\mathbf{a}'\neq\mathbf{0})$ genau dann als zueinander s e n k r e c h t bezeichnet, wenn die Geraden $R\mathbf{a}$, $R\mathbf{a}'$ einander bei der Durchmesserinvolution des Einheitskreises zugeordnet sind, d.h. wenn

$$(18) \qquad F(\mathbf{a},\mathbf{a}') = 0$$

gilt; demgemäss nennt man Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$ (ohne die Einschränkung $\mathbf{a},\mathbf{a}'\neq\mathbf{0}$) zueinander s e n k r e c h t (oder: orthogonal), wenn (18) gilt. Nach dem Satz über die Bilinearformen kommt die Auszeichnung einer Ellipse gerade auf die Auszeichnung einer positiv definiten quadratischen Form hinaus[6], die man als die m e t r i s c h e F u n d a m e n t a l f o r m bezeichnet; die durch sie nach (6) bestimmte symmetrische Bilinearform schreibt man als $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \longrightarrow \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ und nennt sie innere Multiplikation (auch wohl, nach der Schreibweise: Punktmultiplikation, oder: skalare Multiplikation). Bemerkt sei noch, dass die Bestimmung des Produktes $\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}$ gemäss dem Beweis des Satzes über die Bilinearformen (III) mittels der Tangente in $\mathbf{b}$ an den Einheitskreis gerade die sonst übliche Definition dieses Produktes (orthogonale Projektion von $\mathbf{b}$ auf $R\mathbf{x}$ im Falle $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$) wiedergibt. Nach dem Satz über die Bilinearformen gibt es Basen $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ mit $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2=0$, $|\mathbf{e}_1|=|\mathbf{e}_2|=1$; diese werden als o r t h o n o r m i e r t bezeichnet. Es gilt nun der Satz von den Hauptachsen. Zu jeder symmetrischen Bilinearform F gibt es eine orthonormierte Basis $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ mit $F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)=0$; das Paar der $R\mathbf{e}_\nu$ heisst dann Hauptachsenpaar von F.

6) Zeichnet man statt dessen eine indefinite quadratische Form aus, so ergibt sich eine Metrik, wie sie in der speziellen Relativitatstheorie vorkommt, wenn man dort nur räumlich eindimensionale Vorgänge betrachtet.

Beweis. Abgesehen von der Normierungsbedingung $|e_\nu| = 1$ ($\nu = 1,2$) lauten die an e_1, e_2 gestellten Forderungen

$$e_1 \cdot e_2 = 0 \ , \ F(e_1, e_2) = 0.$$

Um hier die Variablen e_1, e_2 trennen zu können, wird die zweite Forderung in eine der ersten ähnliche Form gebracht. Wir bemerken hierzu, dass es zu gegebenem Vektor y höchstens einen Vektor y' mit

(19) $$F(x,y) = x \cdot y' \quad \text{für alle } x$$

gibt; denn aus $x \cdot y'' = x \cdot y'$ für alle x folgt insbesondere $(y'' - y') \cdot (y'' - y') = 0$, also $y'' - y' = 0$. Andererseits zeigt (7) für F und (8) für die innere Multiplikation, dass bei orthonormierter Basis (a_1, a_2) und $y = y_1 a_1 + y_2 a_2$ der Vektor

(20) $$y' = (a_{11}y_1 + a_{12}y_2)a_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2)a_2$$

die Bedingung (19) erfüllt. Die Abbildung $y \longrightarrow y'$, die im folgenden mit α bezeichnet sei, ist wegen (20) linear. Nach (19) gilt

(21) $$F(x,y) = x \cdot \alpha(y).$$

Daher wird nun $F(e_1, e_2) = 0$ zu $e_1 \cdot \alpha(e_2) = 0$. Wegen $e_1 \cdot e_2 = 0$ und $e_1, e_2 \neq 0$ muss es also eine reelle Zahl a mit $\alpha(e_2) = ae_2$ geben. Da die an e_1, e_2 gestellten Forderungen symmetrisch in den beiden Variablen sind, gilt dasselbe für e_1. Damit ist die beabsichtigte Trennung der Variablen erreicht: e_1, e_2 sind E i g e n v e k t o r e n von α, d.h. sie gehören zur Menge der Vektoren $y \neq 0$, zu denen es $a \in R$ mit $\alpha(y) = ay$ gibt. Um diese Eigenvektoren zu bestimmen, wird wieder $y = y_1 a_1 + y_2 a_2$ angesetzt. Die Gleichung $\alpha(y) = ay$ schreibt sich dann wegen (20) als Gleichungssystem

(22) $$\begin{aligned} (a_{11} - a)y_1 + a_{12}y_2 &= 0, \\ a_{12}y_1 + (a_{22} - a)y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dieses hat bekanntlich genau dann eine vom Paar (0,0) verschiedene Lösung (y_1,y_2), wenn $(a_{11}-a)(a_{22}-a)-a_{12}a_{21} = 0$, d.h. (wegen $a_{12} = a_{21}$)

$$(23) \qquad (a - \tfrac{1}{2}(a_{11}+a_{22}))^2 = \tfrac{1}{4}(a_{11}-a_{22})^2 + a_{12}^2$$

gilt. Die Lösungen a von (23) heissen die E i g e n w e r t e von α. Einen einzigen Eigenwert gibt es offenbar genau dann, wenn $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ gilt. Da dann

$$F(x,y) = a_{11}\, x \cdot y$$

folgt, hat man $F(e_1,e_2) = 0$ für jede orthonormierte Basis (e_1,e_2) : Jedes Paar zueinander senkrechter Geraden durch 0 ist ein Hauptachsenpaar. Liegt dieser Fall nicht vor, so gibt es genau zwei verschiedene Eigenwerte a_1,a_2. Das Gleichungssystem (22) liefert mit $a = a_\nu$, $\nu\in\{1,2\}$ einen Vektor $e_\nu = y_1a_1 + y_2a_2$, der durch die zusätzliche Forderung $|e_\nu| = 1$ noch bis auf einen Faktor -1 eindeutig bestimmt wird. Man hat dann $\alpha(e_\nu) = a_\nu e_\nu$ $(\nu = 1,2)$. Mittels (21) und (3) ergibt sich daraus

$$a_2(e_1\cdot e_2) = e_1\cdot(a_2e_2) = e_1\cdot \alpha(e_2) = F(e_1,e_2) = F(e_2,e_1)$$
$$= e_2\cdot\alpha(e_1) = a_1(e_1\cdot e_2) ,$$

wegen $a_1 \neq a_2$ daher $e_1\cdot e_2 = 0$ und somit auch $F(e_1,e_2) = 0$. Schliesslich ist (e_1,e_2) linear unabhangig und damit Basis, da ja $e_1\cdot e_1 = 1$, aber $e_1\cdot e_2 = 0$ gilt. Ueber die Behauptung des Satzes hinaus ist so bewiesen: Von der Numerierung abgesehen gibt es genau ein Hauptachsenpaar, falls $\mathcal{C}_F$ kein Kreis ist.

Wendet man das zu den affinen Normalformen (11), (13) führende Verfahren auf eine Basis (e_1,e_2) an, bei der Re_1, Re_2 ein Hauptachsenpaar von F ist, so ergeben sich (mit der üblichen Schreibweise für die Koeffizienten) die metrischen Normalformen für die Gleichung von Ellipse, Hyperbel, Parabel:

$$(24) \quad a^{-2}x_1^2 + b^{-2}x_2^2 = 1, \quad a^{-2}x_1^2 - b^{-2}x_2^2 = 1, \quad x_1^2 = 2px_2,$$

wobei $a, b, p > 0$ und im Falle der Ellipse noch $a \geqq b$ vorausgesetzt werden kann. Die B r e n n p u n k t e kann man nun allgemein definieren als solche Punkte, in denen die Geradeninvolution bezgl. des Kegelschnittes (Ellipse, Hyperbel, Parabel) jeder Geraden des Büschels die zu ihr senkrechte Büschelgerade zuordnet. Die Bestimmung der Brennpunkte sei im folgenden nur bei Ellipse und Hyperbel durchgeführt. Soll $\mathbf{b}$ ein Brennpunkt sein, so muss insbesondere (16) gelten, wenn $R\mathbf{a}, R\mathbf{a}'$ ein Hauptachsenpaar ist. Dann gilt aber $F(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = 0$, so dass (16) $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) F(\mathbf{a}', \mathbf{b}) = 0$ bedeutet: $\mathbf{b} \in R\mathbf{a}'$ oder $\mathbf{b} \in R\mathbf{a}$. Somit liegt ein Brennpunkt stets auf einer Hauptachse. Setzt man demgemäss etwa $\mathbf{b} = c\mathbf{e}_1$ an und beachtet, dass die Normalformen (24)

$$a_{11} = a^{-2}, \ a_{12} = a_{21} = 0, \ a_{22} = \pm b^{-2} \quad (+ \text{ bei Ellipse}, \ - \text{ bei Hyperbel})$$

besagen, so nimmt (16) nach kurzer Umrechnung für

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 , \qquad \mathbf{a}' = x_1'\mathbf{e}_1 + x_2'\mathbf{e}_2$$

die Form

$$b^2 x_1 x'_1 \pm (a^2 - c^2) x_2 x_2' = 0$$

an. Nach Definition besagt die Brennpunktseigenschaft nun, dass diese Bedingung gleichbedeutend sein soll mit der Orthogonalität von $\mathbf{a}, \mathbf{a}'$, also mit

$$x_1 x_1' + x_2 x_2' = 0 .$$

Somit ist c_1 genau im Falle

$$c^2 = a^2 \mp b^2$$

Brennpunkt. Das gibt die beiden Brennpunkte auf der ersten Hauptachse (wenn man den Fall des Kreises ausschliesst, bei dem nur ein Brennpunkt, mit $c = 0$ nämlich, auftritt). Für den andern Fall $\mathbf{b} = c\mathbf{e}_2$ haben wir einfach in dem obigen Ergebnis a^2 und $\pm b^2$ zu vertauschen, so dass man $c^2 = \pm b^2 - a^2$ erhält: Auf der zweiten Hauptachse liegen keine Brennpunkte[7] (abgesehen vom Kreis). Für die Parabel ergibt sich durch entsprechende Rechnung ein einziger Brennpunkt. Schliesst man die Kreise aus, so gehört zu jedem Brennpunkt eine Polare, die L e i t l i n i e des Brennpunktes. Da die Polare eines Kegelschnittpunktes die Tangente in diesem Punkt ist (siehe die Polarendefinition!), ergibt sich aus Brennpunktsdefinition und der Symmetrieeigenschaft des Polarenbegriffs ohne Rechnung sofort der Satz: Ist l die Leitlinie des Brennpunkts B und hat der Kegelschnittpunkt P die Tangente t, so haben entweder t, l einen Schnittpunkt, dessen Verbindungsgerade mit B senkrecht zur Verbindungsgeraden BP ist, oder aber t,l sind parallel und BP senkrecht zu l. Zusammen mit der leicht aus (24) zu gewinnenden Konstanz des Abstandsverhältnisses des Punktes P von B und l liefert dieser Satz nun ohne weiteren Rückgriff auf die Kegelschnittgleichungen die bekannten Brennpunktseigenschaften.

---

7) Bettet man die reelle Ebene in die komplexe Ebene ein, so hat man in der komplexen Ebene natürlich auch zwei Brennpunkte auf der zweiten Hauptachse, die aber nicht reell sind, d.h. nicht in der reellen Ebene liegen.

EXISTE-T-IL DES PRESENTATIONS DE LA GEOMETRIE EUCLIDIENNE ESSENTIELLEMENT DISTINCTES

par
A. Delessert
Lausanne

Au début de cet exposé, permettez-moi de vous faire part de mon embarras. Il a deux causes. La première en est que, dans leurs premiers projets, les organisateurs de ce colloque m'avaient désigné pour combattre sous la bannière de la "géométrie synthétique". Or je dois vous avouer que je ne sais pas très bien ce que c'est. J'ai entendu dire qu'être "géomètre synthétique" c'est très vilain. Aussi je désire affirmer bien haut qu'à ma connaissance, je n'en suis pas un. Mais je dois immédiatement préciser que j'ignore de quoi je me défends.

La deuxième cause de mon embarras réside dans l'énormité des problèmes que pose l'enseignement de la géométrie élémentaire. Dans ce domaine, l'abondance des publications est évidemment surprenante. Depuis un siècle au moins, les plus grands mathématiciens et une multitude de plus petits versent leur contribution au dossier de la géométrie élémentaire. A cet égard, les dernières années ont visiblement marqué un paroxysme.

Cette prolifération ne s'explique pas uniquement par l'obstination des maîtres secondaires à mal enseigner la géométrie. Elle est due surtout à l'existence de difficultés essentielles dans les fondements mêmes de cette discipline.

Du côté du professeur de mathématiques élémentaires, cette abondance est loin d'être bénéfique. On sait les graves insuffisances dont souffre la formation continue des maîtres secondaires. Il en résulte que bien peu d'entre eux possèdent les éléments qui leur permettraient d'utiliser la documentation dont nous parlons. Les auraient-ils d'ailleurs que leurs difficultés ne feraient que commencer.

Négligeons les romantiques défenseurs de procédés résolument surannés. Les novateurs, partant de prémisses identiques, du moins en apparence, aboutissent souvent à des conclusions diamétralement opposées. Les uns affirment qu'il est possible d'enseigner tout l'essentiel de la géométrie élémentaire à partir d'un petit nombre d'axiomes bien choisis et par des démonstrations qui se réduisent à quelques lignes. Et ils le prouvent d'une façon lumineuse. D'autres préconisent l'abandon pur et simple de la géométrie euclidienne au niveau secondaire, car elle offre manifestement le spectacle lamentable d'une structure infiniment trop compliquée pour les besoins d'une saine formation mathématique.

Si l'on s'élève un peu, de nouveaux paradoxes apparaissent. Un bouleversement de la pensée mathématique s'est produit le jour où quelqu'un a osé mettre le mot "géométrie" au pluriel. Dès lors, c'en était fait de la géométrie classique. L'absence de tout chapitre intitulé Géométrie dans le traité de Bourbaki le confirme. Et pourtant, les mathématiques actuelles présentent tous les symptômes d'une véritable obsession géométrique et les espaces euclidiens sont devenus l'appareil de construction fondamental dans plusieurs domaines essentiels de l'analyse mathématique moderne.

En bref, le malaise que ressentent beaucoup de maîtres lorsqu'ils s'interrogent sur la géométrie élémentaire provient de ce qu'il leur est difficile de savoir si les controverses auxquelles ils assistent relèvent du plus pur byzantinisme ou si elles présentent un caractère fondamental.

Il me semble qu'on peut leur apporter un élément d'appréciation en répondant à la question suivante: existe-t-il, de la géométrie élémentaire, des exposés essentiellement distincts?

Insistons d'emblée sur un point très important. Nous allons préciser incessamment ce que nous appellerons ici géométrie élémentaire. Cela étant fait, il est clair que du point de vue mathématique, deux exposés logiquement équivalents de cette théorie ne sauraient être considérés comme "essentiellement distincts"; par suite, le simple libellé de la question que nous avons posée nous place sur un terrain qui n'est plus strictement mathématique.

La chance aidant, je me propose de diviser mon sujet en trois parties:

1° présentation succinte de trois exposés typiques de géométrie élémentaire

2° quelques échantillons de comparaison

3° quelques conclusions découlant de la méthode employée.

1° Présentation succinte de trois exposés de géométrie élémentaire

Je me bornerai au cas de la géométrie plane, ce qui ne constitue pas une limitation essentielle. Il convient aussi de préciser que je me placerai au niveau des "squelettes théoriques". De là aux manuels scolaires, il est une marge qui permet au pédagogue armé du pavé de l'ours de transformer le meilleur des systemes en une vraie catastrophe.

Exposé I (ou "physique"). On voit apparaître deux domaines: l'ensemble des termes (points, droites, être sur, être entre, etc.); un ensemble de propriétés de ces termes admises par hypothèse et consignées dans les axiomes d'incidence, d'ordre, de congruence, d'Euclide, etc. C'est l'exposé classique inspiré de Hilbert.

Exposé II (ou "vectoriel"). Trois étapes. a) on prend un sous-corps K du corps des nombres réels contenant la racine carrée de chacun de ses éléments positifs. b) On introduit un espace vectoriel V de dimension 2 sur K, à l'aide des axiomes correspondants. c) On introduit dans V un produit scalaire, grâce à une forme bilinéaire définie positive, objet caractérisé par les axiomes adéquats.

Exposé III (ou "des pliages"). Ce type de présentation étant moins couramment utilisé, donnons ses axiomes d'une manière plus détaillée. Cela nous sera d'ailleurs nécessaire pour préciser certains points de comparaison, par la suite. Il s'agit de caractériser le groupe des isométries du plan euclidien. Soit donc un groupe G, d'élément neutre I.

Axiome 1, des R-groupes. Le groupe G est engendré par des réflexions, en abrégé un R-groupe. Par là, nous entendons qu'il existe dans G une partie distinguée Σ , formée d'élément involutifs appelés réflexions, engendrant G, telle que I ne puisse être le produit d'un nombre impair de réflexions. Intuitivement, on peut se représenter Σ comme l'ensemble des symétries axiales du plan.

Axiome 2, d'incidence. Considérons dans Σ la relation ternaire définie comme suit: si a, b, $c \in \Sigma$, i(a, b, c) équivaut à $abc \in \Sigma$. Il est visible que cette relation est symétrique (indépendante de l'ordre choisi pour les termes a, b et c) et réflexive (satisfaite banalement si deux des termes a, b et c sont égaux). L'axiome 2 affirme de plus qu'elle est transitive, c'est-à-dire que si $a \neq b$ et si $i(a, b, x_k)$ avec k = 1, 2, 3, alors $i(x_1, x_2, x_3)$. On dit alors que c'est une relation d'incidence dans Σ . Intuitivement, trois réflexions sont incidentes quand leurs axes ont un point commun ou une direction commune.

Axiome 3, de bissection. Quelles que soient les réflexions a et b, il existe au moins une réflexion c telle que a = cbc.

Axiome 4, des faisceaux de 1ère classe. On appelle faisceau déterminé par les réflexions distinctes a et b l'ensemble des réflexions incidentes avec a et b. Un faisceau Φ est dit de première classe si, quel que soit le faisceau Φ' , $\Phi \cap \Phi' \neq \emptyset$. On note alors $\Phi = \Phi_1$. Un faisceau qui n'est pas de première classe, est de seconde classe; on le note alors Φ_2. L'axiome 4 affirme alors que Σ contient au moins deux faisceaux, dont un de première classe. Intuitivement, un faisceau de première classe peut être imaginé comme l'ensemble des symétries dont l'axe contient un point donné.

Des quatre premiers axiomes découlent déjà de nombreuses propositions intéressantes. Citons-en trois.

- Tout élément de G est égal à un produit de trois réflexions au plus.
- Quels que soient le faisceau de première classe Φ_1 et la réflexion a, il existe dans Φ_1 une réflexion b, distincte de a et qui commute avec a. On dit que a et b sont <u>perpendiculaires</u>.
- L'ensemble des réflexions perpendiculaires à une réflexion a est un faisceau; c'est même un faisceau de 2^e classe, quand Σ en contient.

<u>Axiome 5, d'Euclide.</u> Σ contient des faisceaux de 2^e classe et deux faisceaux de 2^e classe distincts sont disjoints.

A ce stade, on peut établir un théorème important. Soit K un corps commutatif, ordonnable et pythagoricien. Introduisons dans $K^2 = K \times K$ la distance "euclidienne":

$$d\,[(x,\ y);\ (x',\ y')] = [(x-x')^2+(y-y')^2]^{\frac{1}{2}}$$

Désignons par GE(2,K) le groupe des isométries de K^2. Alors les axiomes 1 a 5 caractérisent les groupes GE(2,K).

<u>Axiome 6, du compas</u>. Tout élément positif de K est un carré dans K. Cet axiome implique que K peut être ordonné d'une maniere unique. Bien entendu, on peut aussi l'exprimer sous forme d'une hypothèse portant sur Σ ; on voit alors qu'il revient à dire que toute droite passant par un point intérieur d'un disque coupe la frontière du disque.

<u>Axiome 7, d'Archimède</u>. Quels que soient les éléments x et y strictement positifs de K, il existe un entier naturel n tel que $x < ny$. Cet axiome peut aussi s'énoncer par une condition sur Σ . Mais il n'est pas utile de la faire ici.

Les axiomes 1 à 7 caractérisent les groupes GE(2,K), où K est un sous-corps du corps des nombres réels contenant la racine carrée de chacun de ses éléments positifs. Pour relier ce qui précède aux deux premiers exposés, il suffit d'appeler <u>plan</u> l'espace homogène $G/g(\Phi_1)$, où $g(\Phi_1)$ est le sous-groupe de G engendré par un faisceau de première classe arbitraire Φ_1.

A condition de ne pas faire intervenir dans l'exposé I un axiome de complétion, on dispose bien de trois constructions équivalentes de ce que nous appellerons la géométrie élémentaire.

2° Quelques échantillons de comparaisons

Nous allons choisir aussi diversement que possible quelques critères de comparaison auxquels nous soumettrons les trois exposés précédents.

1er critère: concision et netteté du plan de travail.

Exposé I. Pas concis. Cheminement peu clair. Il semble que l'on tende asymptotiquement vers le théorème tristement célèbre selon lequel tout point du plan est un point remarquable du triangle. La théorie s'achève par épuisement du géomètre.

Exposé II. Extrêmement concis. Cheminement très clair, mais un peu statique. (Après avoir revendu à perte sa règle et son compas, on s'abîme dans la contemplation d'une structure majestueuse...)

Exposé III. Concision très médiocre. En revanche, le but et le cheminement apparaissent clairement: il s'agit de classer organiquement les éléments de GE(2,K).

2e critère: les tribulations du triangle.

Exposé I. Le triangle joue un rôle abusivement enflé.

Exposé II. Le triangle est un personnage honteux. Il est caché dans les bases de V, dans l'addition des vecteurs. Mais il est interdit d'en parler sous peine d'excommunication majeure.

Exposé III. Le triangle occupe une place modeste et naturelle qui dépend de la structure même de GE(2,K): l'élément le plus "général" de GE(2,K) est un produit de trois réflexions suivant les côtés d'un triangle non dégénéré.

3^{e} critere: ordre d'entrée du parallélisme et de la perpendicularité.

Exposé I. Ces relations se mêlent assez tôt, car les parallèles apparaissent avant l'axiome d'Euclide.

Exposé II. Ordre très clair: parallélisme puis perpendicularité. La séparation est parfaite entre les propriétés liées au seul parallélisme et celles qui dépendent du parallélisme et de la perpendicularité.

Exposé III. Exactement la même remarque que pour l'exposé précédent. A condition de permuter les termes de parallélisme et de perpendicularité. Notons toutefois que la séparation ne passe pas au même endroit dans les deux cas.

4^{e} critère: distinction entre objets et transformations.

On sait qu'une géométrie fait intervenir un ensemble O d'objets et un ensemble T de transformations agissant sur O. Une présentation satisfaisante de cette géométrie doit permettre de distinguer clairement O et T.

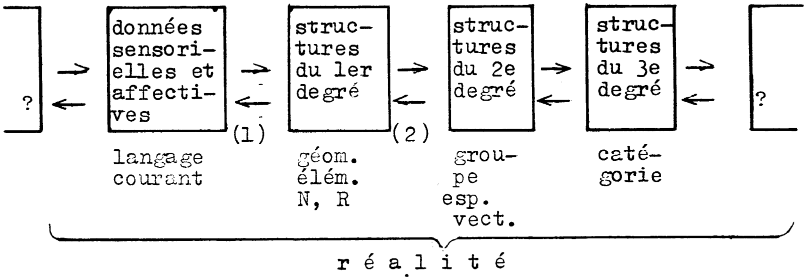
Exposé I. O est clair. T est inexistant.

Exposé II. On observe une difficulté essentielle due au fait que le plan est défini comme espace vectoriel. Ainsi le même atome (vecteur) peut être considéré alternativement comme objet ou comme opérateur.

Exposé III. T est clair. O n'apparaît qu'après coup, comme sous-produit de l'analyse de T. Cela se révèle conforme d'ailleurs à une conception de l'espace défendue par Poincaré, entre autres.

Critère 5: démarche descriptive du réel.

Ordinairement ceux qui traitent ce genre de question évitent avec adresse de préciser de quoi ils parlent, ce qui allège sensiblement la discussion. Toutefois, permettez-moi de dresser un petit tableau résumant ma façon de voir le problème.



On voit sans peine que l'étude des relations des mathématiques et du réel n'est pas en soi plus absurde que celle d'une partie à son tout. De plus les divers degrés de l'édifice mathématique entretiennent entre eux des connexions d'un type à peu près constant que l'on pourrait suggérer par le terme d'"isomorphisme locaux".

Revenons à notre comparaison.

Exposé I. Etablit avec soin les connexions (1). Néglige totalement (2).

Exposé II. Néglige ou sous-estime (1). En revanche étudie et exploite soigneusement les connexions (2).

Exposé III. Etablit les connexions (1) et prépare très convenablement les connexions (2).

TABLEAU DE COMPARAISON

concision & netteté	mauvais, mauvais	bon, bon	médiocre, bon
tribulations du triangle	enflé	honteux	naturel
ordre // & ⊥	confus	// ; ⊥	⊥ ; //
objets - transformations	O ; -	OT - TO	T - (O)
descriptions du réel	(1), -	(2), -	(1), prépare (2)

3° Quelques conclusions

Au moment où je m'apprête à conclure, on peut raisonnablement attendre que je déclare hautement les mérites d'un système particulier et que je jette l'anathème contre tout système qui oserait s'en écarter si peu que ce soit. Je vois toutefois dans ce qui précède d'excellentes raisons de faire exactement le contraire.

D'abord je crois qu'il est souhaitable qu'il n'existe pas de système unique, quasiment parfait, excluant tous les autres. Historiquement, cela s'est déjà produit: la géométrie d'Euclide n'a eu aucune concurrente durant des siècles. Il s'en est suivi la fossilisation de l'enseignement élémentaire que chacun déplore.

Je pense ensuite qu'il y a fort peu de chances pour qu'un tel système existe aujourd'hui. Admettons que l'on ait assigné certaines tâches minimums à l'instruction mathématique des futurs universitaires, comme par exemple:

- une vue claire sur le tableau considéré plus haut
- une introduction sérieuse à quelques structures du 2^{e} degré, groupes et espaces vectoriels, pour fixer les idées.

Ce cadre général étant respecté, certains vont insister sur les structures du 1er degré: outre la géométrie, l'algèbre, voire la mécanique élémentaires, les nombres naturels ou réels, on voit apparaître la statistique et le calcul algorithmique. D'autres viseront de préférence des structures du 2^{e} degré: groupoïdes, espaces topologiques, théorie des ensembles, treillis (lattices) ou viseront même plus haut. On pourra porter l'accent sur les connexions (1) dans le sens de l'axiomatisation (rôle "dynamique" de l'axiome) ou dans celui des applications. Un travail analogue est possible au niveau des connexions (2) (constitution et portée des structures du 2^{e} degré). Ces diverses attitudes sont liées au caractère, à la formation, voire à l'horizon philosophique du professeur. Elles sont toutes respectables pour autant qu'elles ne prétendent pas à l'exclusivité. Mais il convient de rappeler avec constance un principe auquel notre époque aimerait tant se soustraire, à savoir qu'on n'a rien sansrien. Ce qu'on gagne sur un point se paie nécessairement ailleurs. En revanche, on peut exiger que le maître qui adopte un type d'exposé aux dépens d'un autre ait une conscience claire des options essentielles que son choix implique, ce que nous avons tenté de montrer pour la géométrie. C'est là notre première conclusion.

Ma deuxième conclusion est qu'il faut s'opposer violemment à toute tentative de scinder l'édifice mathématique au niveau des liaisons (1). Pour cela nous devons lutter sur deux fronts. D'abord celui des "applicateurs des mathématiques" et des pédagogues qui éprouvent - souvent par ignorance - une vive méfiance à l'égard des structures des niveaux supérieurs au premier. Leur attitude aboutit à la négation de la nature profonde des mathématiques. Le second front est celui des "formalistes", qui, par esprit de simplification, veulent ignorer le monde des données sensorielles et affectives. Pour eux, les structures du premier degré sont tout au plus un recueil d'amusettes pour les initiés des étages supérieurs.

Ces attitudes extrêmes, que j'ai caricaturées à dessein, ont tendance à se marquer de jour en jour. Cela tient en partie au développement actuel des mathématiques qui impose une spécialisation excessive. Peu importe ici l'incidence de ce fait sur la recherche mathématique. Mais pour ce qui concerne l'enseignement, il est d'un effet désastreux.

Effectivement, la principale conséquence en est d'exclure les professeurs de mathématiques élémentaires de l'édifice mathématique et de les réduire à la condition de mathématiciens ratés. Pour emprunter notre vocabulaire au sport, il ne sont certes pas tous des mathématiciens "de pointe" ou de "compétition". Mais sans eux les mathématiques seraient fondamentalement diminuées, de même que le sport se réduirait à un spectacle stérile sans ces millions d'athlètes obscurs qui courent le "cent-metres" en deux fois plus de temps que n'importe qui.

Il faut que quiconque s'occupe d'une manière ou de l'autre de l'enseignement élémentaire des mathématiques fasse tout pour que les professeurs secondaires soient ou deviennent des mathématiciens à part entière. Pour cela,il est nécessaire qu'ils soient en mesure de comparer par eux-mêmes les divers types d'exposés mathématiques qui sont à leur disposition.

Mon propos était de montrer, sur le cas particulier de la géométrie euclidienne, qu'une telle comparaison a un sens, qu'elle permet de faire ressortir des différences essentielles et qu'elle peut se faire avec des moyens relativement sommaires.

Note:

Le présent exposé concerne le premier enseignement raisonné de la géométrie qui - dans le canton de Vaud (Suisse) - se place entre treize et quinze ans et demi. Dès seize ans, les élèves sont initiés d'une manière intensive à l'Algèbre linéaire (qui a été préparée bien avant, d'ailleurs). De sorte qu'à dix-huit ans, les élèves vaudois des sections mathématiques-sciences et latin-mathématiques disposent de connaissances en Algèbre linéaire qui dépassent très sensiblement ce que l'on exige un peu partout à l'entrée de l'Université.

1 UNE APPROCHE GEOMETRIQUE DES NOMBRES REELS

par
P. Debbaut
Arlon

Au cours du présent séminaire, les problèmes posés par l'introduction des nombres réels ont été évoqués à plusieurs reprises, soit pour estimer que cette étude ne peut être abordée avec rigueur avant l'âge de quinze ans, soit pour rechercher la manière la plus adéquate d'aborder le champ des réels. Je me propose d'exposer la méthode que quelques collègues belges et moi-même utilisons dans les classes de 5^e (13 ans). Les résultats obtenus me semblent tellement encourageants que j'estime qu'ils constituent le plus grand succès de la modernisation de l'enseignement mathématique dans notre premier cycle d'enseignement secondaire.

Il va de soi que notre étude des nombres réels s'appuie directement sur les notions acquises dans la classe de 6^e et pendant les premières semaines de la 5^e.

Entre autres, les élèves ont abordé l'étude de la géométrie affine: axiomes d'incidence, axiome d'Euclide, ordres sur la droite, segments, demi-droites, équipollence, translations. Ils sont familiarisés avec la numération binaire et le calcul sur les entiers rationnels. A l'occasion de l'étude des translations et de l'ensemble Z des entiers rationnels, on a dégagé la notion de groupe. Le groupe commutatif des translations du plan a été présenté sous diverses formes, notamment comme ensemble Π_o des points du plan pointé, muni d'une loi notée +.

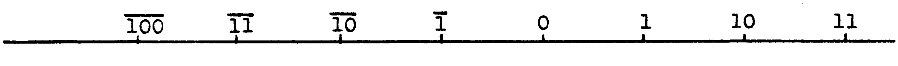
$\cdot b$ $\quad\quad$ $\cdot a+b$

$\cdot -a$ $\quad\quad$ $\cdot o$ $\quad\quad$ $\cdot a$

Dans ce cadre, la loi du groupe a été étendue aux parties du plan et on a décrit quelques sous-groupes.

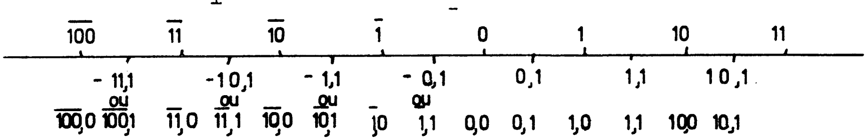
Une attention particulière est accordée au sous-groupe D_o formé par les points d'une droite comprenant o. On démontre notamment que le groupe D_o, + est ordonné par chacun des ordres totaux de la droite. Il en résulte que la somme de deux segments fermés de D_o est un segment fermé de D_o.

On introduit alors une graduation de la droite D_o, c'est-à-dire une application G_o de Z dans D telle que l'image du nombre o soit le point o, l'image de 1 un point arbitraire différent de o, les autres images étant déterminées par le fait que tous les couples $(G_o(z), G_o(z+1))$ sont équipollents entre eux. On ordonne D en posant $o < G_o(1)$ et on note que G_o est un homomorphisme du groupe ordonné Z, +,$\leq$ dans le groupe D_{o1} , + , $\leq$ (sans nécessairement introduire le terme homomorphisme). Pour simplifier les notations, on convient d'écrire z pour $G_o(z)$ chaque fois qu'aucune confusion n'est possible. Pour faciliter la suite du travail, on utilise la numération binaire.



Les élèves admettent facilement l'axiome d'Archimède: tout point de D_o appartient à un seul des segments semi-ouverts $[z, z+1[$.

La graduation G_o permet de localiser un point sur D_{o1}. Les élèves suggèrent généralement d'améliorer cette localisation en introduisant les milieux des paires $\{z, z+1\}$. On démontre qu'on obtient ces points, en plus de ceux de G_o, en construisant une nouvelle graduation G_1 du même type que G_o mais où le milieu de $\{o, 1\}$ est choisi comme image de 1. Pour distinguer les graduations G_o et G_1, on écrit les nombres de G_1 avec une virgule avant leur dernier chiffre.



On remarquera la double représentation des nombres négatifs qui n'est autre que celle utilisée pour les logarithmes. Elle s'introduit aisément en montrant aux élèves l'analogie entre la nouvelle utilisation de la virgule et l'écriture habituelle des nombres décimaux. Pour ces derniers, dès la 6e les élèves écrivent $-6,325 = \bar{7},675$.

La graduation G, étant une image fidèle de G_o, il est tout naturel de l'améliorer par une graduation G_2 suivie d'une innombrable famille de petites soeurs G_3, G_4, ... G_n, ...

En examinant la position d'un point par rapport à toutes ces graduations, on constate que deux cas peuvent se présenter: - ou bien le point n'appartient à aucune des graduations; il existe alors une famille infinie de segments fermés inclus les uns dans les autres et dont les extrémités sont des points consécutifs des graduations successives comprenant ce point - ou bien le point appartient à une graduation auquel cas il existe deux familles du type décrit ci-dessus. L'origine d'un segment d'une telle famille s'obtient toujours en écrivant un chiffre à la droite du symbole représentant l'origine du segment précédent; par exemple 10; 10,1; 10,10; 10,100; 10,1001; ... La famille infinie de segment détermine donc un symbole formé d'un nombre entier suivi d'une virgule et d'une infinité de chiffres. Ce sont ces symboles que nous appelons binaires illimités. Nous pouvons résumer nos constatations précédentes en affirmant qu'à chaque point de D_o, correspondent un ou deux binaires illimités. Reste à examiner deux binaires illimités correspondant au même point. L'un d'eux est nécessairement déterminé par une suite de segments dont le point est l'extrémité; à partir d'un certain rang, on ne trouvera donc plus que des chiffres 1. L'autre au contraire est déterminé par une suite de segments dont le point est l'origine; à partir du même rang, on ne trouvera plus que des chiffres o. De plus, avant ces séries de 1 et de o, on trouve dans les deux binaires une partie commune précédant un o dans le premier nombre décrit, un 1 dans l'autre. Par exemple:

1011,0010011111111111111... et 1011,0010100000000...
On pose alors que les binaires illimités sont des termes qui représentent des objets appelés nombres réels et que deux binaires correspondant au même point représentent le même nombre réel.

La suite des graduations définit maintenant une application de D_{01} dans l'ensemble R des nombres réels. Pour aller plus loin il nous faudra préciser que cette application est bijective, ce qui se fait par l'axiome de continuité:

- L'intersection d'une famille infinie de segments fermés emboités les uns dans les autres et dont les extrémités sont les points des graduations successives décrites plus haut est un singleton -

Les ensembles D_{01} et R étant en bijection, il est aisé de transporter sur R la structure de groupe ordonné de D_{01}, + , $\leq$ en posant que pour tout couple (r, s) de nombres réels r+s est le nombre correspondant au point a+b si les points a et b correspondent respectivement aux nombres r et s.

Comme c'est la première fois que les élèves rencontrent un transport de structure, cette étude se fait avec tous les détails souhaitables. On érige ainsi R, +, $\leq$ en groupe commutatif ordonné. On rappelle le lien de cette addition avec l'addition des entiers et des nombres binaires ou décimaux limités et on introduit une première esquisse de calcul approché.

Pour achever l'étude du champ des nombres réels, il nous faut encore introduire la multiplication. A cette fin il nous faut introduire la notion de rapport de deux couples de points d'une droite et le théorème de Thalès. On définit alors les homothéties et on démontre que les homothéties non constantes de centre donné forment un groupe commutatif pour la composition. La notion de rapport d'homothétie permet d'établir une bijection entre les homothéties non constantes de centre o et les nombres réels non nuls. On transporte alors la structure de groupe commutatif de l'ensemble des homothéties non constantes sur l'ensemble des réels non nuls. Il ne reste plus alors qu'à examiner le rôle de o, à démontrer la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à examiner les rapports entre la structure d'ordre de R et la multiplication. Les détails de cette étude ont été publiés dans "Géométrie affine et nombres réels" Papy-Debbaut, Collection Frédérique, où le lecteur verra qu'en plus du champ réel, les élèves découvrent simultanément le vectoriel R, Π_o, + . Une amélioration importante de ce travail a été présentée par M. Bex dans la revue Mathematica et Paedagogia n° 27 1965.

L'ANALYSE DANS L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE

par
Gustave Choquet
Paris

Le sujet que je me propose d'étudier ici soulève en général moins de passions que l'enseignement de la géométrie. Il mérite cependant toute notre attention car en un certain sens l'Analyse est le point culminant de l'enseignement du 2ème degré; elle offre un beau champ d'application d'outils variés; et notre façon de la traiter constitue un test de notre enseignement de l'Algèbre et de la Géométrie.

Le mot "Analyse" est peu explicite; j'aimerais lui donner le sens de "carrefour de structures"; et de fait, dans l'Analyse des classes terminales, interviennent des structures algébriques, topologiques, et des notions et notations de caractère géométrique.

Quelques bons principes

Avant d'entrer dans la discussion des matières qui constituent l'Analyse dans l'enseignement du second degré, je crois bon de rappeler quelques principes que nous sommes tous tentés parfois d'oublier, et qui conduisent à une estimation plus saine de l'importance du choix d'un programme.

1. L'essentiel de notre enseignement, ce ne sont pas les programmes.

Enseigner ne consiste pas à verser comme un liquide le trop plein de connaissances du professeur dans le cerveau de l'enfant.

L'enseignement est une relation complexe entre le professeur et l'élève, et les échanges doivent avoir lieu sans cesse dans les deux sens.

Enseigner les mathématiques, ce n'est pas fournir a l'éleve des définitions parfaites et une chaine de deductions impeccables. Les bons mathématiciens, plus que les autres peut-être, ont souvent la tentation de réduire leur enseignement à ce schéma; ils se plaignent ensuite amèrement que leurs cours limpides se transforment après passage chez l'élève, en une bouillie nauséeuse. Ils ont simplement oublié qu'un bon jardinier ne verse sur les racines d'une jeune plante ni engrais concentré, ni eau trop abondante.

Le dogmatisme du professeur tue l'élan créateur de l'élève. L'activité mathématique se compose de cycles, petits ou grands, dans chacun desquels se succèdent quatre phases:

Observation, Mathématisation (ou axiomatisation), Déduction, Applications.

La déduction n'est qu'une des phases de l'activité globale du mathématicien. Et l'élève, avec l'aide du catalyseur que devrait constituer son maître, doit les parcourir toutes; procéder autrement conduit à le traumatiser.

Le parcours complet d'un tel cycle fait passer l'esprit d'un niveau mental a un autre: C'est une mutation mentale. Le progres intellectuel de l'humanité n'est plus à base physiologique; il se fait maintenant par l'acquisition de notions nouvelles, la découverte de bonnes définitions, le choix des bons outils. Encore faut-il, d'une part que l'élève comprenne la nécessité, la raison du choix des définitions, d'autre part qu'il apprenne à fabriquer lui-même, devant une situation complexe donnée, les fils directeurs que constituent les bons axiomes et les bonnes définitions.

Ceci nous montre aussi le danger qu'il peut y avoir à abuser des classifications simplistes, des preuves trop linéaires, et par contre le grand intérêt, que Caleb Gattegno a souvent souligné, de situations complexes bien choisies pour aider la découverte de notions nouvelles.

"On ne fait pas boire un cheval qui n'a pas soif": Le rôle essentiel du professeur doit être d'éveiller la soif de ses élèves. Le reste vient ensuite par surcroît.

2. Les professeurs des classes terminales et des facultés savent combien les élèves sont marqués par l'enseignement donné à quinze, seize ans. Lorsque cet enseignement est négligé, on ne dispose plus tard que d'un matériel humain dégradé. Il y a un âge critique où se forment les goûts, et où se fait l'apprentissage du raisonnement. Les professeurs d'élèves entre 10 et 16 ans ont donc une grande responsabilité; aussi devons-nous les aider au maximum, et nous inquiéter de leurs problèmes, aussi difficiles et étrangers à nos préoccupations familières soient-ils.

3. L'expérimentation est essentielle en pédagogie. Mais comme toute bonne chose, son succès peut aussi avoir ses dangers. On entend certains éducateurs dire: "J'ai essayé telle méthode, enseigné telle théorie de telle façon avec mes élèves; ça passe fort bien."

Attention! Divers dangers les guettent: Il est relativement facile de faire du dressage; les enfants ont une aptitude remarquable à réagir aux stimulations, conscientes ou non, du professeur. Il peut donc n'y avoir eu chez l'élève que compréhension apparente, dans un cadre étroit et particulier. D'autre part il faut s'assurer que la question expérimentée en vaut la peine, qu'elle s'insère dans un cadre général, qu'elle aura des applications importantes ou bien établit un lien lumineux entre des théories jusque-là étrangères.

Un programme

L'enseignement de l'Analyse au lycée culmine dans la classe terminale, mais il doit être progressivement préparé par les classes antérieures. Je ne chercherai pas ici à délimiter ici un programme précis, mais à insister sur les points qui me semblent essentiels, pour les besoins des utilisateurs en physique, mécanique, probabilités, ou tout simplement essentiels pour la formation de l'esprit.

Avant d'aborder l'Analyse proprement dite, l'élève a déjà acquis des notions d'algèbre des ensembles, il sait calculer dans **R**, connaît un peu de calcul vectoriel; et la géométrie, tout en développant son sens déductif et son sens de la découverte, lui a fourni l'expérience de nombreux objets géométriques.

Il lui manque la Topologie, qui va lui fournir les notions de convergence, de passage à la limite, de continuité. Ces notions sont difficiles a acquérir si elles sont brutalement introduites en classe terminale, parce que les définitions de base contiennent de nombreux quantificateurs, circonstance que l'on n'avait pas rencontré en Algèbre et en Géométrie. En fait les notions topologiques doivent être introduites bien plus tôt dans l'enseignement; les notions d'approximation, d'erreur, de suite convergente, ont un caractère concret qui permet leur étude relativement tôt.

L'algèbre était le domaine des lois de composition sur un ensemble E (applications de E$\times$E dans E); par contre la topologie est l'étude des relations d'ordre, soit d'ordre total, soit d'ordre partiel. C'est ainsi que la toplogie de R est définie à partir de son ordre (grâce aux intervalles ouverts); c'est ainsi plus généralement que la notion générale de topologie sur un ensemble E est basée sur la relation d'inclusion sur l'ensemble $\mathcal{P}$ (E) des parties de E.

L'ensemble R des nombres réels.

En classe terminale, l'ensemble **R** doit être clairement défini et conçu comme un corps commutatif totalement ordonné, tel que chacune de ses parties majorées ait une borne supérieure (ou une propriété équivalente faisant intervenir des intervalles emboités).

A ce niveau, on pourra démontrer que deux tels corps sont isomorphes, d'où l'unicité (à un isomorphisme près) de **R**. Mais il me semble inutilement long et compliqué de démontrer, à ce niveau, l'existence d'un tel corps (ce que l'on fait en général en complétant le corps des rationnels par des coupures ou des sections commençantes). L'existence d'un tel corps peut être présenté comme un axiome, d'ailleurs équivalent à l'axiome de l'infini, ou aux axiomes de Péano.

Une fois cette existence admise, les nombres rationnels sont définis comme quotients de deux entiers de **R**; et les règles de calcul sur les fractions ne sont plus qu'un cas particulier des règles de calcul dans un corps commutatif quelconque.

On améliorera la connaissance de **R** grâce à la notion d'ensemble dénombrable; et on démontrera qu'entre deux points de **R**, il y en a une infinité d'autres. Le théorème de Bolzano-Weierstrass constituera une excellente application de l'existence des bornes supérieures des ensembles majorés.

<u>Topologie de R.</u>

On définira l'ensemble des voisinages d'un point de **R**, puis de $\mathbf{R}^p$.

Notion de convergence d'une suite de points de **R** ou $\mathbf{R}^p$ vers l'origine 0, ou vers un point quelconque. Convergence dans **R** vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Cette étude de la convergence sera faite parallèlement à l'étude des valeurs approchées: Erreur absolue, erreur relative, ordre de grandeur.

L'usage courant des machines à calculer, petites ou grandes, rend inutiles les procédés manuels de calculs numériques précis; mais il est important de développer très tôt le sens de l'approximation, des ordres de grandeur, aussi bien en mathématiques qu'en physique et dans la vie courante.

<u>Sommes infinies.</u>

Commencer par la définition de la somme infinie d'une famille de nombres positifs (indépendamment d'un ordre de sommation); théorèmes de majoration, d'où convergence de nombreuses séries numériques (par exemple $(1/n!)$). Convergence des séries entières de terme général x^n, x^n/n, $x^n/n!$.

Applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puis d'une partie de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Transitivité de la continuité.
Continuité des opérations dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$.
Limite de fonctions en un point (par exemple $(x^2-4)/(x-2)$, $|x|/x$.
Etude d'une fonction numérique continue sur $[a, b]$; l'image $f([a, b])$ est un intervalle fermé $[m, M]$; on pourra l'admettre, ou même le démontrer à partir de Bolzano-Weierstrass.
Opération sur les fonctions continues: Somme, produit, valeur absolue, enveloppe supérieure ou inférieure.

Fonctions.

Bien entendu, la notion de relation fonctionnelle doit être à la base de tout l'enseignement des mathématiques; il faut en faire prendre de plus en plus conscience à l'élève.

Montrer par la fabrication de nombreux exemples (fonctions $\Sigma \alpha_i |x-a_i|$, graphes de parcours, rencontre de train) la liberté qu'a le mathématicien de créer de nouvelles fonctions. Il faut briser les idées préconçues qui font confondre la notion de fonction et celle d'algorithme constitué par une superposition d'opérations simples.

Habituer au dynamisme des transformations, des opérations sur les fonctions. Souligner le lien entre les fonctions et leur graphe; utiliser ce lien pour éclairer différemment divers problèmes (résolution de systèmes d'équations ou d'inégalités).

Fonctions numériques croissantes, décroissantes; fonction inverse d'une fonction continue strictement croissante; opérations sur ces fonctions.

Pour préparer à l'étude des dérivées, étude des différences successives d'une fonction (cas de x^n, d'un polynôme). Exemple de fonctions de plusieurs variables; leur graphe.

Ensembles et fonctions convexes:

La notion de convexité, liée à l'existence d'un ordre total sur $\mathbb{R}$, joue un rôle fondamental dans l'Analyse moderne.

La notion, fort simple, d'ensemble convexe, doit être introduite très tôt dans l'enseignement; il est paradoxal d'enseigner des propriétés des coniques, certes élégantes, mais la plupart du temps inutiles au mathématicien du $20^{\text{ième}}$ siècle, et de ne pas démontrer que l'intérieur d'un cercle ou d'un rectangle est convexe!

Opérations sur les ensembles convexes de $\mathbf{R}^p$; nombreux exemples. Fonctions numériques convexes sur un intervalle de $\mathbf{R}$, puis sur une partie convexe de $\mathbf{R}^p$. Propriétés élémentaires de ces fonctions; opérations: Somme, enveloppe supérieure, limite, composition et produit dans certains cas. Plus tard lien avec dérivée seconde.

<u>Comparaison de fonctions en un point. Différentiabilité.</u>

Comparaison des ordres de grandeur de x, x^2, ... en **O**
Fonctions tangentes à D au point O (si $\lim \|f(x)\| / \|x\| = 0$)
Fonctions tangentes en un point.
Fonction différentiable en un point; différentielle (souligner qu'on ne peut pas la définir comme "infiniment petit principal" en un point).
Composition des différentielles. Opérations élémentaires.
Lien avec représentation graphique, au moins pour les fonctions numériques sur $[a, b]$.

<u>Théorème de Rolle et des accroissements finis.</u>

Démontrer et utiliser ces théorèmes.
Application à la caractérisation des fonctions croissantes, décroissantes.
Théorème-clef: Si $|f'| \leq k$, alors $|\Delta y| \leq k\,|\Delta x|$, d'où continuité uniforme.

<u>Fonctions importantes liées à l'algèbre de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.</u>

1. Rappel sur les isomorphismes de groupes; isomorphisme de $\mathbf{Z}$ sur son image dans le groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ par l'application $n \longrightarrow k^n$ (où $k > 0$).

Recherche d'un isomorphisme analogue de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$, ou de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$; pour éviter d'avoir recours à un théorème de prolongement de fonction, un peu délicat à ce niveau, on peut préférer utiliser les primitives: On <u>démontre</u> que s'il existe un isomorphisme dérivable F de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$, on a $F(1) = 0$ et $F'(x) = a/x$ (où $a \neq 0$), puis on démontre qu'effectivement la primitive F de a/x telle que $F(1)=0$ réalise un tel isomorphisme.

Cas où $a = 1$; première définition du nombre e. Propriétés élémentaires du logarithme et de l'exponentielle; ordre de grandeur à l'infini. Exercices d'utilisation du log. pour les calculs.

2. Définition de sin x et cos x (où $x \in R$). Cette définition est liée à une définition correcte de la mesure des angles, associée à un homomorphisme continu de $\mathbf{R}$ sur le groupe des angles, c'est-à-dire encore sur le sous-groupe multiplicatif T des nombres complexes de norme 1. On admettra l'existence d'un tel homorphisme et sa différentiabilité.

On montre alors que $\lim_{x \to 0} \sin x/x$ existe; par un changement d'unité, on se ramène au cas où elle vaut 1 (mesure en radians). La relation $\lim \sin x/x = 1$ pourra utilement être justifiée heuristiquement par un procédé classique de comparaison de diverses aires ou longueurs.

On pourra ensuite calculer aisément les dérivées des fonctions trigonométriques usuelles.

Intégration (à ne pas confondre au départ avec la recherche des primitives).

Considérations géométriques préliminaires sur la mesure des aires et le procédé d'Eudoxe. Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier sur $[a, b]$.

Si f est une fonction numérique bornée sur $[a, b]$, on définit ses intégrales supérieure et inférieure $F(x)$ et $G(x)$ sur $[a, x]$ au moyen des fonctions en escalier supérieures ou inférieures à f ; on établit l'égalité de F et G, soit en supposant f monotone, soit en supposant f continue et en montrant que $F'(x)$ et $G'(x)$ sont toutes deux égales à $f(x)$.

Lien avec la notion de primitive.

Si on pose $I(f) = \int_a^b f(x)dx$, I est linéaire, positive si

$f \geq 0$, et $I(1) = (b - a)$; d'où le théorème de la moyenne; enfin **invariance par translation.**

Primitives usuelles et procédés d'intégration élémentaires.

Equations différentielles simples, en particulier celles provenant de la physique.

Calcul d'aires, volumes, moments d'inertie.

ONTOLOGIE MATHEMATIQUE ET ALGORITHMES

par
J. de Siebenthal
(Lausanne)

Quelques réflexions sur un dualisme qui joue un grand rôle dans l'enseignement et dans la recherche

INTRODUCTION

L'analyse mathématique, dit Mr. G. Choquet, est la théorie qui résulte d'un carrefour de structures. Je modifie un peu cette comparaison en faisant appel à une notion musicale: dans un développement d'analyse les diverses structures s'accompagnent, s'enchevêtrent et s'harmonisent pour constituer une sorte de symphonie. L'analyse mathématique se présente ainsi comme une symphonie structurale, l'un des registres étant obligatoirement constitué par les instruments topologiques ou métriques. Cette définition un peu large me permettra d'englober dans cet exposé pas mal de géométrie, ce qui est exigé par le sujet.

Considérons la fonction numérique f: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad ;$$

cette fonction peut être envisagée de deux points de vue:
1) f est une loi qui à tout $x \in R$ fait correspondre une valeur $f(x)$ bien déterminée, par le processus

$$x \longrightarrow x^2 \longrightarrow 1 + x^2 \longrightarrow \frac{1}{1+x^2}$$

avec en plus le passage à la dérivée:

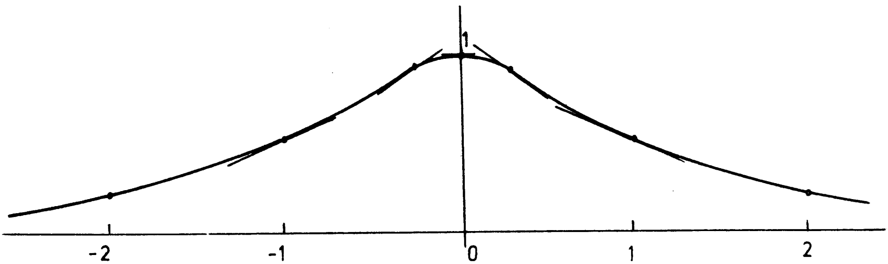
$$\frac{1}{1+x^2} \longrightarrow \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

et le calcul de la limite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

C'est ce qu'on peut appeler l'aspect algorithmique de l'étude de cette fonction.

2) à la fonction f peut être associé dans $\mathbf{R}^2$ son graphe $\{(x, f(x))\}$ réalisable matériellement sur une feuille de papier



Là, la fonction est considérée globalement, comme un être susceptible de représentation matérielle. C'est ce qu'il est possible d'appeler l'aspect ontologique de l'étude de la fonction. Un tel graphe peut toujours être représenté matériellement pour une fonction

$$f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \quad \text{ou} \quad f: [a,b] \longrightarrow \mathbf{R},$$

au moins en partie.

Mon but est d'exposer quelques réflexions sur cette distinction: sa nécessité, la complémentarité des deux aspects, et leur influence dans l'enseignement secondaire, principalement en analyse, sans pouvoir éviter de parler de géométrie.

A mon avis, les mathématiques sont comme un domaine sphérique muni d'un pôle algorithmique et d'un pôle ontologique en liaison constante; avec la croissance du rayon de la sphère ces deux pôles se différencient de mieux en mieux.

ONTOLOGIE ET ALGORITHME A PROPOS DE QUELQUES POINTS D'ANALYSE ELEMENTAIRE

A propos de la droite numérique réelle **R**.

"Soit **R** la droite numérique réelle" et voila évoqué dans nos esprits quelque chose de précis - u n ê t r e d e r a i s o n , un objet de pensée - un objet pourvu richement de certaines particularités, revêtu de plusieurs structures - un objet connaissable, qu'il faut introduire de façon précise, à l'aide d'un discours verbal ou typographique, mais qui dépasse ce discours.

Historiquement, notre notion actuelle de la droite numérique réelle provient de deux sources: l'arithmétique et la géométrie; le mot "droite" évoque la géométrie et le mot "numérique" l'arithmétique. Bien plus, **R** regorge de structures, et en elle s'enracinent aujourd'hui la géométrie, l'algèbre, l'analyse, etc.

Sous l' a s p e c t a l g o r i t h m i q u e , l'ensemble **R** possède, on le sait, diverses structures manifestées par des axiomes qui sont traduits par certains assemblages typographiques:

A) Une structure de corps commutatif exprimée par:

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{R}\times\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}\\ (x,y)\rightsquigarrow x+y\end{array}}\qquad\qquad \boxed{\begin{array}{l}\mathbf{R}\times\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}\\ (x,y)\rightsquigarrow xy\end{array}}$$

$$\begin{array}{ll}x+y = y+x & xy = yx\\ (x+y)+z = x+(y+z) & (xy)z = x(yz)\\ \exists\, 0\in\mathbf{R} : x+0 = x & \exists\, 1\in\mathbf{R}: x1 = x\\ \forall\, x, \exists\, x' : x+x' = 0 & \forall\, x\neq 0,\ \exists\, x^{*} : xx^{*} = 1\end{array}$$

$$x(y+z) = xy + xz$$

B) Une structure d'ordre total $\leq$.

$$\begin{array}{ll}\forall\ (x,y,z)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R} : & x\leq x\ ;\ (x\leq y \text{ et } y\leq x)\Longrightarrow x = y\\ & (x\leq y \text{ et } y\leq z)\Longrightarrow x\leq z\\ & x\leq y \text{ ou } y\leq x\end{array}$$

compatible avec la structure de corps:

$$\forall\ (x,y,z) \in R\times R\times R\ :\quad x \leqslant y \Longrightarrow (x+z \leqslant y+z)$$

$$(0 \leqslant x \text{ et } 0 \leqslant y) \Longrightarrow (0 \leqslant xy)$$

C) a) Si $a<b$, l'intervalle $]a,b[$ contient au moins un élément;

b) toute partie majorée a une borne supérieure; ce qu'on pourrait écrire dans le s t y l e p r é c é d e n t.

On dispose ainsi d'une base opérative complète apte à fournir toutes les propriétés de **R.**

Question: la théorie de **R** se réduit-elle au déroulement correct des textes issus des axiomes A, O, C? D'une façon plus générale: qu'y a-t-il de plus en mathématique que le texte algorithmique?

Celui qui enseigne à des étudiants ingénieurs ou architextes par exemple, complète invariablement les opérations affinées du texte formel par un dessin - un trait de graphite, d'encre ou de craie - sur une surface réputé plane - feuille, tableau noir -. C'est la droite matérielle, support de la droite géométrique, qui fournit l'aspect que l'on peut appeler pratique, ou bien intuitif, mais non pas naïf. La droite ne saurait se renier elle-même.

Dans les arêtes architecturales, arbres élancés, rayons lumineux dans un milieu homogène, fils tendus, traits faits à la règle sur une feuille, dans une très vaste famille d'objets matériels gisait la "belle au bois dormant", l'intelligible couchée dans la matière, dans ces choses en soi connaissables, - la droite - cette essence qui a un mode d'exister universel dans l'esprit, et un mode d'exister individuel dans la chose: cette nature qui est à la fois dans la chose pour exister, et dans le concept pour être perçue; cet objet de pensée indestructible qui, par le travail des chercheurs, révèle de mieux en mieux ses richesses.

De même le point matériel, tache calibrée de graphite, d'encre ou de craie... fournit la notion de point géométrique.

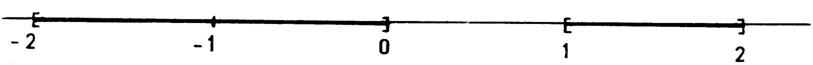
LA DROITE EN TANT QU'OBJET DE PENSEE EXTRAIT DE FIGURES MATERIELLES, voilà l'aspect ontologique de **R**.

La liaison entre les deux aspects de **R** est bien connue: au groupe additif **Z** des entiers correspond dans le dessin une suite de points équidistants numérotés. A un intervalle [a,b] correspond un segment sur la droite, etc. Quelque imparfaites que soient ces représentations matérielles, elles fournissent néanmoins à l'intelligence la possibilité de s'élever à des représentations immatérielles.

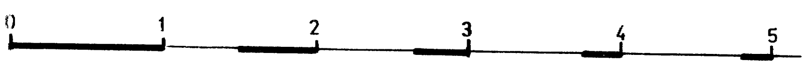
Voilà posé dans notre esprit un ê t r e , de qui procède le déploiement algorithmique basé sur les axiomes A, O, C et qui se manifeste matériellement par un trait. Si il convient d'etre habitué au maniement p r é c i s des règles de calcul, il convient aussi d'être familiarisé avec les constructions p r é c i s e s faites sur la droite matérielle: ce maniement-ci développe le sens ontologique, ce maniement-là le sens algorithmique.

Dans l'ensemble de l'exposé j'insiste seulement sur l'acquisition du sens ontologique en donnant quelques indications incapables d'épuiser le sujet:

a) <u>Sens visuel de la topologie de **R**.</u>



On peut faire dessiner avec precision quelques intervalles] 1,2[, [-2,0] ... (9 types), puis représenter quelques familles finies d'intervalles ouverts disjoints, quelques familles dénombrables de tels intervalles...



$]n-\frac{1}{n}, n[\qquad n = 1,2,3, \ldots$

$]1-\frac{1}{2^n}, \ 1-\frac{1}{2^{n+1}}[$ $\qquad n = 0,2,4,\dots$

L'élève pourra démontrer et vérifier par le dessin que les intervalles ouverts bornés forment une base de la topologie de **R** c'est-à-dire que

a) **R** est réunion de tels intervalles

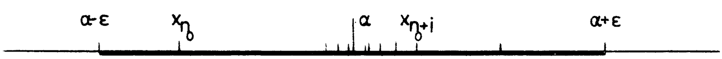
b) toute intersection finie d'intervalles ouverts bornés est réunion de tels intervalles.

b) <u>Sens visuel de la notion de limite.</u>

"La suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $a \in \mathbf{R}$ si à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un entier n_0 tel que $n > n_0$ implique $|x_n - a| < \varepsilon$. C'est l'aspect algorithmique.

"$(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $a \in \mathbf{R}$ si tout intervalle fermé de milieu a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang".

C'est l'aspect "visuel", qui peut être accompagné d'un dessin.



c) <u>Sens visuel de la notion de borne supérieure.</u>

Soit $A \subset R$ une partie majorée.

"La borne supérieure de A est le nombre a tel que

1) a est un majorant de A,

2) à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre $c \in A$ tel que $a - \varepsilon < c \leqslant a$."

Autre aspect:

"La borne supérieure **a** de A est caractérisée par:

1) $A \subset]-\infty, a]$

2) $\forall x < a, A \cap]x, a] \neq \emptyset$."

C'est un jeu, dans toutes les questions de nature topologique d'insister sur l'aspect visuel des notions, car c'est précisément le but de la théorie des espaces topologiques de donner à l'analyse un fondement simple et "géométrique".

d) <u>Aspects de la notion de continuité.</u>

Dans l'introduction, la notion de fonction a subi deux éclairages: c'est le tour maintenant de la notion de continuité: d'une part la définition apte aux calculs pratiques, d'autre part la définition apte à la saisie conceptuelle globale, voire à un dessin matériel.

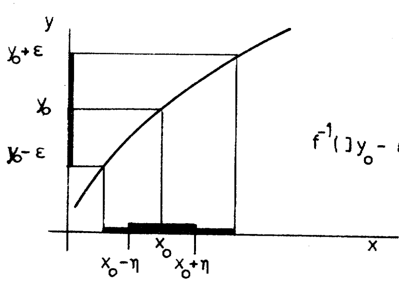
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction;

<u>1ère forme:</u> f est dite continue en $x_0 \in [a,b]$ si à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre $\eta > 0$ tel que $|x-x_0| < \eta$ entraîne $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

<u>2e forme:</u> f est dite continue en $x_0 \in [a,b]$ si l'image réciproque de tout intervalle ouvert de milieu $y_0 = f(x_0)$ contient un intervalle ouvert de milieu x_0.

Ces deux énoncés expriment le même fait mathématique sous deux éclairages complémentaires. En passant de la première à la seconde forme, on "substitue les idées au calcul", on "géométrise l'analyse", on "ontologise".

La continuité uniforme peut subir le même traitement. Par des dessins, on améliore ici encore le second éclairage.



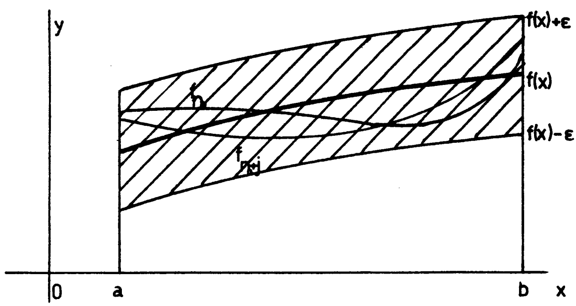
$$f^{-1}(]y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon[) \supset]x_0-\eta, x_0+\eta[$$

e) <u>Aspects de la notion de convergence uniforme.</u>

Considérons les fonctions $f:[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ bornées sur $[a,b]$; elles forment un espace vectoriel $\mathcal{V}$ sur $\mathbf{R}$.

"Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in \mathbf{N}}$ de $\mathcal{V}$ converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{V}$ si à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un entier n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $|f(x)-f_n(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [a,b]$."

"Si petite que soit la bande $f(t)-\varepsilon$, $f(t)+\varepsilon$ les graphes des f_n y sont tous contenus à partir d'un certain rang."



On peut, comme on sait, améliorer encore le second éclairage en introduisant dans $\mathcal{V}$ une métrique définie par

$$d(f,g) = \sup_{t\in [a,b]} | f(t) - g(t)|$$

La convergence uniforme $f_n \longrightarrow f$ se traduit alors simplement par la convergence $f_n \longrightarrow f$ au sens b) :

"f_n converge uniformément vers f si toute boule de centre f contient toutes les f_n à partir d'un certain rang."

Il y a en résumé la saisie algorithmique de la notion de convergence uniforme apte aux démonstrations, procurant rigueur et sûreté, et la saisie ontologique, conceptuelle, capable de guider la première.

Ce serait maintenant l'occasion d'insister sur la valeur ontologique et algorithmique de l' e x e m p l e . Un exemple traité avec précision des deux points de vue, est nécessaire pour bien éclairer toute théorie.

ONTOLOGIE ET ALGORITHME A PROPOS DE LA GEOMETRIE ELEMENTAIRE

On sait que l'algèbre linéaire permet de donner à la géométrie élémentaire de la droite, du plan et de l'espace une perfection et une simplicité admirables.

Axiomes V du plan E_2 ou de l'espace E_3, d'apres [1]:

On a $E \times E \longrightarrow E$ $\quad (x,y) \rightsquigarrow x+y$

$R \times E \longrightarrow E$ $\quad (\lambda, x) \rightsquigarrow \lambda x$

$E \times E \longrightarrow R$ $\quad (x,y) \rightsquigarrow (x|y)$ avec

V1	$x + y = y + x$	V5	$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
V2	$(x+y)+z = x+(y+z)$	V6	$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
V3	$\exists\, e \in E: x+e = x$	V7	$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
V4	$\forall\, x \in E, \exists\, x' \in E: x+x'=e$	V8	$1.x = x$
	$\forall (x,y,z) \in E \times E \times E$		$\forall\ (\alpha,\beta) \in R \times R$

Axiomes D_2

$$\forall (x,y,z),\ \exists (\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0): \alpha x + \beta y + \gamma z = e$$

$$\exists (a,b) \in E \times E: \ \lambda a + \mu b = e \Longrightarrow \lambda = \mu = 0$$

Axiomes D_3

$$\forall (x,y,z,t),\ \exists (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \neq (0,0,0,0): \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = e$$

$$\exists (a,b,c) \in E \times E \times E: \lambda a + \mu b + \nu c = e \Longrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$$

Axiomes E

E1	$(x\|y) = (y\|x)$	$\forall (x,y)$
E2	$((x+y)\|z) = (x\|z) + (y\|z)$	$\forall (x,y,z)$
E3	$(\alpha x\|y) = \alpha (x\|y)$	$\forall (x,y), \forall \alpha \in R$
E4	$(x\|x) > 0$	$\forall x \neq e$

V, D_2, E caractérisent le plan euclidien E_2.

V, D_3, E caractérisent l'espace euclidien E_3.

Les axiomes V caractérisent les espaces vectoriels réels: si deux tels espaces X et Y sont donnés, une application linéaire $u: X \longrightarrow Y$ est caractérisée par

$$u(x+y) = u(x) + u(y) \qquad \forall (x,y) \in X \times X$$

$$u(\alpha x) = \alpha u(x) \qquad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \quad x \in X$$

Il convient toutefois de remarquer la nature plutôt algorithmique de cette perfection: ce sont les règles opérationnelles qui ont subi la mise au point. Faut-il encore des figures à côté du texte?

A mon avis, le texte mathématique est un langage, une notation bien précise, bien codifiée, mais créé pour exprimer quelque chose. Reprenons une comparaison musicale: le texte algorithmique, c'est la musique notée; la tendance ontologique veut en faire une musique jouée, si possible directement sensible, ce qui arrive en analyse élémentaire et aussi en géométrie élémentaire.

En géométrie, le texte typographique et les figures matérielles se correspondent d'une façon qui n'est ni naïve ni sentimentale, et qui doit être explicitée, quelque préscientifiques que puissent paraître les constatations expérimentales. Je vois là justement, le rôle de l'axiomatique en géométrie élémentaire: un raccord organique entre nos figures matérielles et nos constructions mentales traduites typographiquement. Divers auteurs ont proposé des solutions fort valables.

Serait-il possible de partir d'objets matériels simples – points, droites, vecteurs, translations – et de tirer directement d'expériences effectuées sur ces objets les axiomes R^1, R^2, R^3?

Peut-on établir une injection de la famille des opérations manuelles portant sur les vecteurs matériels dans la famille des opérations de l'algèbre linéaire? Cela bien entendu sans rien présupposer de la géométrie euclidienne. L'axiomatique d'Euclide est fondée sur des objets matériels: point – portion de droite – portion de plan matériel – et sur des observations physiques faites sur ces objets.

Il doit être possible, en partant de la droite, du vecteur et de la translation matériels, d'obtenir les propriétés de la droite rationnelle **Q**, en constatant que les translations associées à une même droite forment un germe de groupe, puis en introduisant le produit d'une translation par un entier, par l'inverse d'un entier, par un nombre rationnel quelconque. Cela fournirait une construction expérimentale des axiomes de l'espace vectoriel **Q**.

L'expérience encore donnerait les axiomes qui permettent de passer à **R**.

Une construction analogue effectuée à propos du plan et de l'espace matériels aboutirait aux axiomes vectoriels de $\mathbf{R}^2$ et de $\mathbf{R}^3$. Resterait à introduire un produit scalaire.

Ce point de vue pourrait garantir a priori le succès pratique des constructions matérielles effectuées à partir du texte, sans référence implicite à l'antique certitude euclidienne.

Quelle que soit la voie suivie, il y a dans notre esprit un être de raison bien déterminé: le plan $\mathbf{R}^2$ ou l'espace $\mathbf{R}^3$, traduisible par les axiomes vectoriels écrits, et par des figures matérielles au moins en partie, ces aspects étant complémentaires; cet être de raison est une essence, une capacité d'exister dans la matière, soumise à une manifestation discursive.

ONTOLOGIE PLANE A BASE VECTORIELLE

Il s'agit à mon point de vue de partir des notions fondamentales de point, droite, vecteur soumises aux axiomes V, traduites matériellement et d'en tirer progressivement tout un arsenal d'êtres de raison géométriques munis des deux éclairages. La valeur ontologique de l'exemple reparaît:

a) Sens géométrique du groupe des translations.

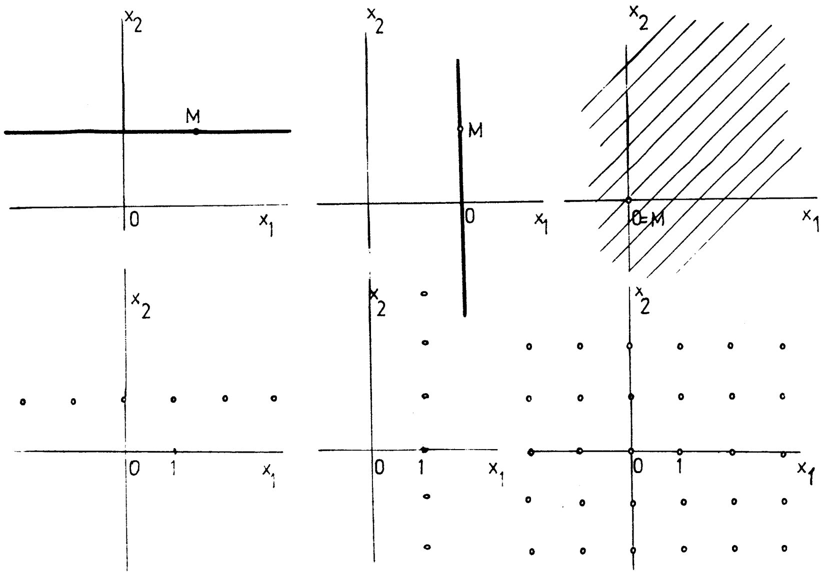
$$T_a \quad \begin{cases} x_1' = x_1 + a_1 \\ x_2' = x_2 + a_2 \end{cases}$$

On construit les figures qui correspondent aux cas:

$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbf{R}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbf{R}$; $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$

$\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbf{Z}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbf{Z}$; $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, $m, n \in \mathbf{Z}$

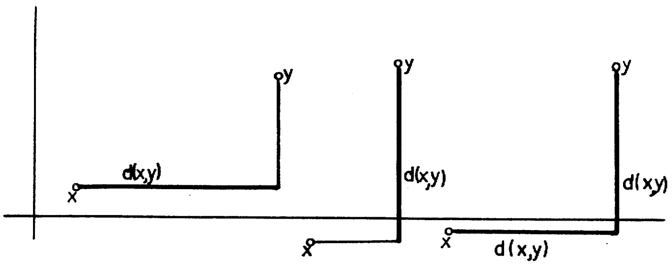
c'est-a-dire qu'on construit les orbites d'un point M (ensemble des transformés de ce point)



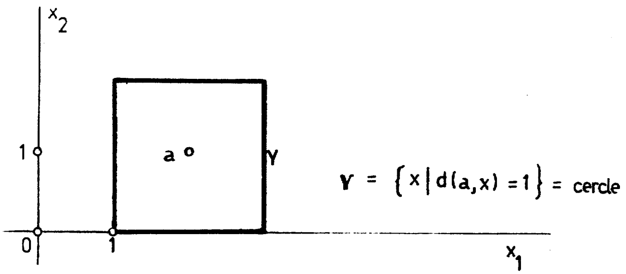
b) <u>sens visuel de la topologie de $\mathbf{R}^2$:</u>

par l'étude de la géométrie des pavés ouverts $a_i < z_i < b_i$. On peut représenter de tels pavés, en nombre fini, en infinité dénombrable, donner des exemples d'ensembles ouverts, de réunions d'ouverts, d'intersections finies, montrer que les pavés ouverts bornés forment une base de la topologie de $\mathbf{R}^2$, en s'inspirant du n° 1.

c) <u>sens visuel de la métrique produit</u> $d(x,y) = \sup_{i \in \{1,2,3\}} |x_i - y_i|$

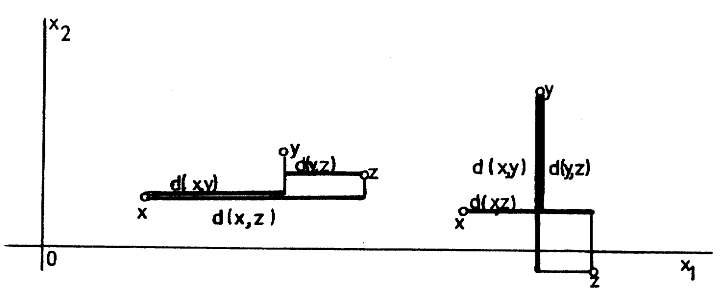


Lieu des points situés à une distance donnée d'un point donné:

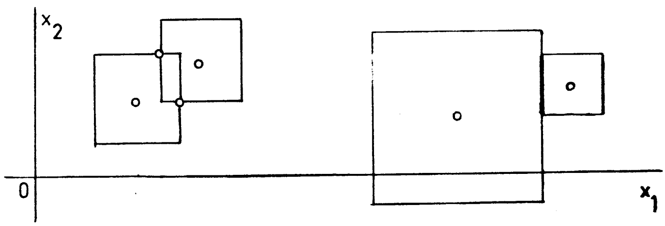


.Lieu $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,x_0) \leqslant \rho\}$ = boule fermée.

Vérification de l'inégalité triangulaire dans divers cas:



Intersection de deux boules, de deux "cercles":



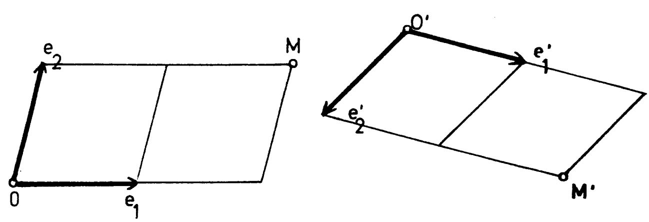
d) <u>Sens visuel de la métrique</u> $d(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$

Problèmes et constructions analogues.

e) <u>Sens visuel de la notion de transformation linéaire affine.</u>

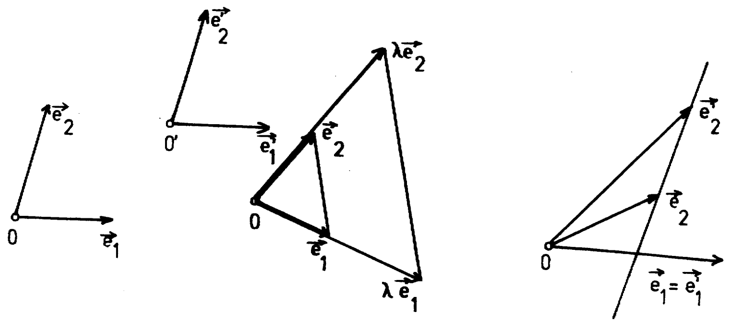
$\alpha : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \longrightarrow x_1\vec{e}\,'_1 + x_2\vec{e}\,'_2$

où $0\ \vec{e}_1\vec{e}_2$ $\quad 0'\ \vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2$ sont deux repères,



avec les cas particuliers

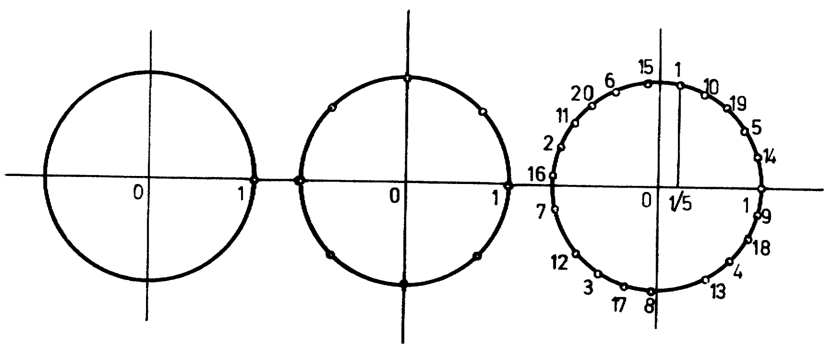
$\vec{e}_1 = \vec{e}\,'_1$	$0 = 0'$	$0 = 0'$
$\vec{e}_2 = \vec{e}\,'_2$	$\vec{e}\,'_1 = \lambda\,\vec{e}_1$	$\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1$
	$\vec{e}\,'_2 = \lambda\,\vec{e}_2$	$\vec{e}\,'_2$ quelconque
translation	homothétie	affinité



f) Sens visuel du groupe des rotations SO(2).

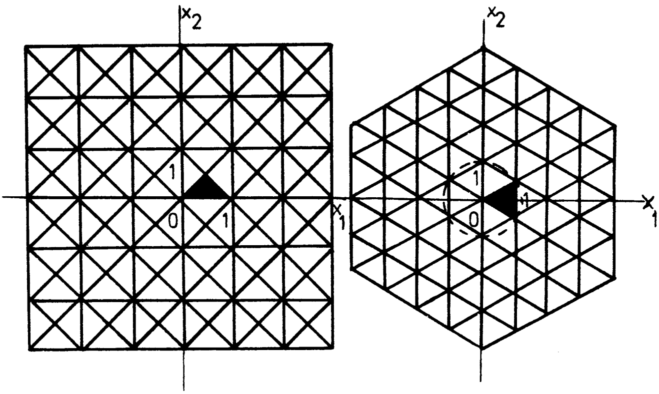
$$\begin{Bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{Bmatrix} \quad \text{groupe qui conserve } x_1^2 + x_2^2 .$$

Ce sens peut s'acquérir par l'étude des orbites de ce groupe ou de ses sous-groupes:



g) Sens visuel de divers groupes.

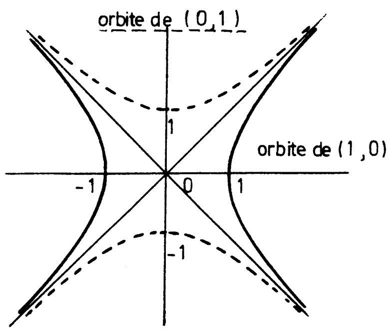
(groupes cristallographiques, groupes ornementaux) par exemple le groupe engendré par les symétries par rapport aux côtés du triangle (0,0) (0,1) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ou bien (0,0) $(\sqrt{3}/2, \frac{1}{2})$ $(\sqrt{3}/2, -\frac{1}{2})$ ou bien (0,0) $(\sqrt{3}/2, \frac{1}{2})$ $(\sqrt{3}/2, 0)$.



ou encore divers groupes ornementaux [4] , [5]

h) <u>Sens visuel du groupe hyperbolique.</u>

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \mathrm{ch}t & \varepsilon_2 \mathrm{sh}t \\ \varepsilon_3 \mathrm{sh}t & \varepsilon_4 \mathrm{ch}t \end{Bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \varepsilon_i = \pm 1 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_3\varepsilon_4 \end{array} \qquad \text{groupe qui conserve } x_1^2 - x_2^2$$



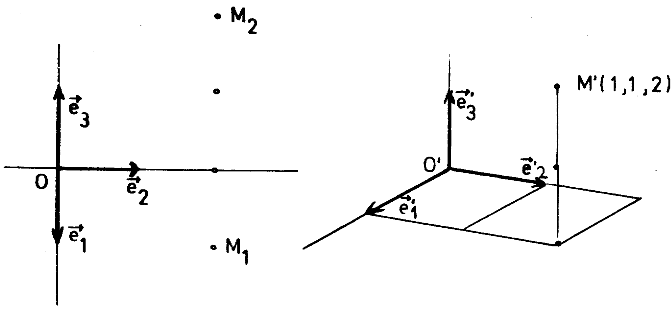
Au texte logique simple basé sur l'algèbre viendraient s'adjoindre des dessins bien faits, destinés à éveiller le sens visuel et le sens esthetique.

ONTOLOGIE SPATIALE A BASE VECTORIELLE.

Pour étudier l'espace, il faut en avoir les moyens. Dès que les axiomes V de l'espace tridimensionnel sont posés, dès que l'espace $\mathbf{R}'^3 = \{(x_1, x_2, x_3)\}$ est suscité, je propose d'étudier les applications linéaires affines $\alpha : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}'^2$ par l'outil très simple constitué par un repère $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ de $\mathbf{R}^3$ et par son image $O'\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2\vec{e}\,'_3$ dans $\mathbf{R}'^2$:

$$\alpha(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = x_1\vec{e}\,'_1 + x_2\vec{e}\,'_2 + x_3\vec{e}\,'_3 \quad ,$$

deux des trois vecteurs $\vec{e}\,'_i$ engendrant $\mathbf{R}'^2$



On peut aussi utiliser la méthode de Monge:

$$M(x_1, x_2, x_3) \rightsquigarrow \{M(x_1, x_2),\ M(-x_3, x_2)\}.$$

La notion importante de noyau apparaît ici avec "pureté". J'ai développé ailleurs ces considérations [2] [3].

L'outil vectoriel permet alors d'aborder efficacement l'étude globale de $\mathbf{R}^3$:

géométrie des translations, géométrie des symétries affines permutables,
géométrie des transformations linéaires affines,
géométrie des pavés et de la topologie associée,
géométrie des déplacements euclidiens,
géométrie des groupes discontinus.

Par exemple divers groupes de translations et les orbites correspondantes

$$x'_i = x_i + t_i$$

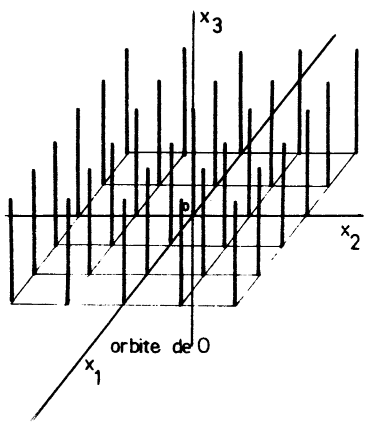
1) $(t_1,\ t_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

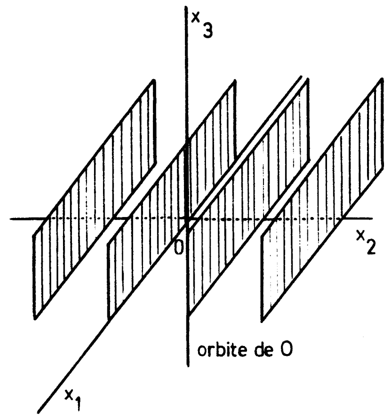
$t_3 \in \mathbb{R}$

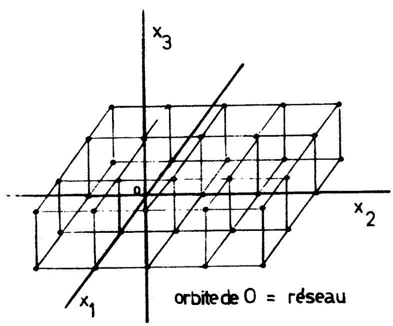
2) $t_1 \in \mathbb{Z}$

$(t_2,\ t_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

3) $(t_1,\ t_2,\ t_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$







Citons encore le groupe engendré par les symétries relatives aux faces d'un cube.

Le groupe SO(3) des rotations euclidiennes dont le rôle est capital dans les groupes de Lie semi-simples sera étudié aussi bien que possible, géométriquement par des constructions axonométriques, et algébriquement par des considérations matricielles.

LE ROLE DE LA GEOMETRIE DESCRIPTIVE.

Je reviens sur la représentation axonométrique de l'espace $\mathbf{R}^3$. Il m'est en effet impossible de quitter le domaine de la géométrie élémentaire sans dire quelques mots d'une branche souvent décriée, ignorée voire abandonnée dans l'enseignement secondaire et universitaire: la géométrie dite descriptive, considérée comme fossile.

On sent bien, je l'espère, qu'il est possible grâce aux méthodes de l'algèbre linéaire, d'insuffler à la géométrie descriptive un esprit tout à fait nouveau, qu'il s'agisse des projections de Monge, de l'axonométrie ou de la perspective.

J'appelle axonométrie $\alpha : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}'^2$ toute application linéaire surjective déterminée par un repère orthogonal $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ de $\mathbf{R}^3$ et par son image $O'\vec{e}'_1\vec{e}'_2\vec{e}'_3$ dans $\mathbf{R}'^2$. Tous les résultats utiles peuvent être déduits de cette conception, qui permet d'étudier de façon rentable la notion d'application linéaire à noyau non trivial (bel exemple de morphisme). [2], [3].

On peut même associer la géométrie descriptive et l'analyse en considérant $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}'^2$ comme pourvus d'une norme euclidienne, et α comme une application linéaire (uniformément) continue. La norme de α est le demi grand axe de l'ellipse image de la sphère unité.

Si, algorithmiquement, le contenu de l'axonométrie se réduit à peu de chose, du point de vue ontologique par contre, les possibilités sont considérables. L'axonométrie permet de faire des dessins simples et parlants des figures de l'espace, ou des esquisses manuelles rapides où l'élève peut cultiver un certain coup de crayon. Il peut se rendre familières, par des dessins clairs, toutes ces figures de l'espace qui reviennent si souvent en mécanique, en physique, en architecture, etc. La perspective traitée de façon semblable exige l'introduction de la notion d'espace projectif P^3 et de plan projectif P'^2 à l'aide des droites de $\mathbf{R}^4$ ou de $\mathbf{R}'^3$ issues d'un point. [2] , [3].

Poussant encore à la saisie globale des êtres mathématiques de $\mathbf{R}^3$, on pourra introduire ou renforcer l'usage des anaglyphes, grâce auxquels tant de merveilleuses figures de l'espace prennent vie en surgissant hors du plan. Et pourquoi ne pas introduire ou développer l'emploi de films, tellement aptes à visualiser dynamiquement les formes spatiales?

Il y a beaucoup de notions mathématiques qui sont issues d'une lecture intelligente d'une configuration rectiligne, plane ou spatiale capable d'exister matériellement en partie au moins. Un des rôles de l'enseignement secondaire est, ce me semble, de poser solidement ces configurations, d'en extraire le plus grand nombre possible de traits, l'élève sachant qu'il a vu les germes des développements de la recherche mathématique vivante.

Cela implique une étude du maniement du graphisme axiomatique, du déroulement correct des assemblages de lettres, de signes logiques ou autres; cela implique encore l'étude esthétique des figures imbriquées, un amour de la chose dessinée, même concrétisée en une maquette, la main s'exerçant à des traits de plus en plus sûrs. Heureux le maître capable d'élever l'esprit de ses élèves jusqu'à la beauté latente des objets proposés. L'intuition spatiale et la rigueur discursive sont faites pour s'enrichir mutuellement: les beaux théorèmes sont des théorèmes "ontologiques", mais ce sont des théorèmes.

QUELQUES DEVELOPPEMENTS EN ANALYSE ET EN GEOMETRIE.

En mathématiques, nous vivons une époque merveilleuse où sous la poussée de nombreux savants se créent de véritables autoroutes qui permettent avec commodité d'accéder à tous les domaines. Les progrès sont marquants aussi bien dans le sens ontologique que dans le sens algorithmique.

Toute une partie de la mathématique, on le sent, est aujourd'hui polarisée vers l'algorithme: les **mathématiques** dites appliquées, ou précisément algorithmiques.

Dans l'autre direction, la géométrisation de l'analyse par les notions topologiques a été une source de progrès importants. On sait que Riemann déjà parlait de construire une théorie des grandeurs continues en faisant abstraction de toute mesure et en étudiant seulement leurs rapports de position et d'inclusion. Par ailleurs la définition et l'étude géométrique de l'espace d'Hilbert par E. Schmidt, en analogie complète avec la géométrie euclidienne, a bien marqué encore cette tendance ontologique.

Arrêtons-nous un instant sur la notion d'espace de Banach: espace vectoriel E sur le corps $\mathbf{R}$ ou sur le corps des nombres complexes, normé, la métrique associée à la norme étant une métrique d'espace complet:

$$\begin{array}{lll}
E \times E \longrightarrow E & \mathbf{R} \times E \longrightarrow E & E \longrightarrow \mathbf{R} \\
(x,y) \rightsquigarrow x+y & (\lambda, x) \rightsquigarrow \lambda x & x \rightsquigarrow \|x\|
\end{array}$$

groupe commutatif — espace vectoriel

$$\begin{array}{lll}
x+y=y+x & (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) & \|x\| \geq 0 \\
(x+y)+z = x+(y+z) & (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x & \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \\
\exists\, 0 \in E : x+0 = x & \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y & \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \\
\forall x \in E, \exists x' : x+x'=0 & 1.x = x & \|\lambda x\| \leq |\lambda| . \|x\|
\end{array}$$

$d(x,y) = \|x-y\|$ toute suite de Cauchy converge.

Exemples: E^1 E^2 E^3.

Par rapport à l'analyse et à la géométrie élémentaire, il y a un saut manifeste; l'apparence concrète, charnue disparaît, sauf si $E = \mathbf{R}^3$. Il n'y a plus qu'un texte typographique auquel on serait tenté de réduire la théorie. On ne "voit" plus rien, à la lettre, en général. Néanmoins l'analyste continue à raisonner sur un tel espace de Banach comme s'il existait dans quelque substrat matériel. Une matière impalpable, un éther, constitue cet espace, qui est structuré, a des lignes, des formes, qui a gardé de la matière ce qu'elle a de meilleur. La mathématique porte ici la matière à son plus haut degré de noblesse.

Qu'on ait dans l'esprit cette admirable théorie des applications linéaires continues d'un espace de Banach dans un autre: le théorème de Hahn-Banach, le théorème du graphe fermé,...

Comment ne pas être séduit par la puissance et la beauté de ces théorèmes, par leur contenu, qui prend des allures intuitives. Et voici le calcul différentiel et intégral qui entre dans ce cadre avec les dérivées successives des applications d'un ouvert A d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F, dérivées qui sont des éléments de l'espace $\mathcal{L}_p$ (E,F) des applications p-linéaires continues de ExEx...xE dans F.

La géométrie des variétés différentiables se voit enrichie parce que mieux pourvue de moyens simples et clairs. Une telle variété V n'est que le résultat de l'agencement de morceaux ouverts d'un espace de Banach E par une disposition harmonieuse. Lorsque $E = \mathbf{R}^n$ on a sous des conditions très larges l'admirable théorème de Withney qui nous assure que toute variété différentiable à n dimensions n'est qu'une sous-variété d'un espace $\mathbf{R}^{2n+1}$, ce qui ramène au schéma intuitif des surfaces ordinaires dans $\mathbf{R}^3$.

A ce niveau, la géométrie devient l'étude globale des êtres de raison, tandis que l'analyse s'attache à leur étude locale, ces points de vue réagissant l'un sur l'autre. Par ailleurs la géométrie en un certain sens n'est qu'une partie de l'algèbre. Il devient difficile de démêler les domaines respectifs.

Je propose ici une classification simple, qui se rattache à nos considérations:

La géométrie est l'étude des êtres de raisons issus de la droite $\mathbf{R}$, du plan $\mathbf{R}^2$ et de l'espace $\mathbf{R}^3$; exemples: topologie combinatoire, homotopie, revêtements.

L'algèbre est l'étude des êtres de raison issus de l'anneau Z des entiers, du corps Q des nombres rationnels ou du corps R; exemples: corps, anneaux, modules, algèbres...

L'analyse est l'étude des êtres de raison issus de la notion de fonction numérique définie dans une partie de **R**.

R ou **Q**, c'est la graine; il en est sorti un arbre extrêmement ramifié.

La géométrie porte sur la disposition mutuelle globale des êtres de raison hyperspatialisés; l'algèbre sur les règles opératoires en général, tandis que l'analyse régit les rapports de contiguïté.

QUELQUES NOTES SUR LES ENSEMBLES.

Ontologiquement parlant, partout nous manipulons des ensembles: agrégats stables constitués par des atomes: les éléments; des corps immatériels ayant néanmoins les caractères de la matière, singulièrement surélevée, tandis que algorithmiquement, le texte typographique correspondant est constitué par une suite rectiligne d'assemblages de signes, constituée suivant des règles définies: domaine de la mathématique formelle. Les deux éclairages se maintiennent par exemple dans la présentation de la notion de relation d'équivalence:

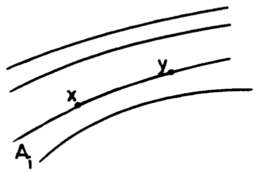
1) éclairage discursif:

   S est une relation d'équivalence dans l'ensemble E si
   1) xSx ; 2) $xSy \Rightarrow ySx$; 3) $(xSy \text{ et } ySz) \Rightarrow xSz$
   quels que soient $x, y, z \in E$

2) éclairage global:

   soit $(A_i)_{i \in I}$ une p a r t i t i o n de E, on dit que x et y sont liés s'ils sont dans une même partie A_i.

Pour beaucoup le dessin fait vibrer quelque chose de plus que l'écriture.



Pour une loi de composition partout définie sur E, compatible avec une relation d'équivalence S, c'est pareil:

1) la loi $X \times X \longrightarrow X$: $(x,y) \rightsquigarrow x \perp y$
est dite compatible avec la relation d'équivalence S si

$$(x\ S\ x' \text{ et } y\ S\ y') \Longrightarrow (x \perp y)\ S\ (x' \perp y')$$

2) Deux classes U,V étant données, il existe une classe W telle que $U \perp V \subset W$ ou:

$x \perp y$ varie dans une classe lorsque x et y varient chacun dans une classe déterminée.

CONCLUSION.

Etudier un être mathématique, la droite R, c'est un peu agir en zoologue penché sur un animal, examinant les structures osseuse, musculaire, nerveuse, sanguine... et leurs interactions. La faune mathématique est d'une richesse extraordinaire; le mathématicien, dans cet ordre d'idées, explore, découvre, étudie, catalogue, est toujours à l'affût d'espèces nouvelles, qu'il découvre ou construit. Et quel avantage sur son confrère naturaliste! Il peut reproduire ses exemplaires indéfiniment par de simples opérations de l'esprit. Le mathématicien est donc une sorte de biologiste qui se penche sur des êtres qu'il extrait d'objets matériels et qu'il amplifie de façon grandiose par des constructions successives, en distinguant espèces, genres, embranchements,... à l'intérieur desquels s'applique une même théorie.

Caractère ontologique donc de toute théorie mathématique, inséparable de l'esprit algorithmique. L'intuition mathématique s'accroche à des représentations mentales à 1, 2 ou 3 dimensions, en extrait une idée qu'elle va soumettre à la clarté inexorable du discours logique linéaire. Inversément, passer du calcul formel aux idées, c'est dresser les formules dans le champ ontologique.

L'ontologie ainsi comprise élève l'esprit du mathématicien enseignant ou chercheur au-dessus de son atelier artisanal, elle l'aspire vers le haut. Le discours formel est comme une musique notée, l'aspect ontologique comme une musique jouée.

En écoutant tel exposé remarquable, n'a-t-on pas la certitude d'une telle musique jouée, libre?

Mais cette étude, et la contemplation de ces êtres nécessite un appareillage de processus bien définis, sans quoi notre faune verrait proliférer les monstres et les faussaires. Tout être mathématique ne peut subsister qu'accompagné d'expressions discursives, algorithmiques précises, forçant impitoyablement l'imagination à suivre les chemins de la rigueur. Toute théorie mathématique doit soumettre son troupeau d'objets à des manoeuvres d'ensemble réglées, se servant d'un langage soumis à des règles strictes, capable d'exprimer la richesse ontologique de ses individus, et de leur donner une efficacité pratique maximale à l'intention du physicien et du technicien. Ce langage est aujourd'hui une collection de signes qui se combinent, s'ordonnent, s'engendrent, un formalisme rigoureux qui maintient l'esprit dans des voies praticables et utiles. L'ontologie mathématique est inconcevable sans un appareillage algorithmique complet, simple et efficace. Un esprit trop strictement ontologique, "synthétique", effectue des constructions mentales qui peuvent être branlantes. Une saine attitude algorithmique aboutit à l'utilisation pratique - physique, technique - des notions acquises par l'exploration respectueuse de la matière. Le travail dans les instituts de mathématiques appliquées, quel magnifique exemple des capacités algorithmiques de l'activité humaine prolongée par la machine!

La réciproque est vraie. Quel danger que de limiter la démarche mathématique à une suite évolutive de signes graphiques totalement ordonnée, en réduisant le tore T^2 par exemple à n'être qu'une tache d'encre sur un papier. Un esprit trop strictement formel déroule les signes et les calculs, risque de se perdre dans le maquis des processus et de fabriquer des assemblages chimériques. Un cas typique où apparaît ce défaut est celui de l'étudiant qui aborde une surface simple proposée par des équations paramétriques, sans en reconnaître la nature.

Le langage algorithmique ne fait que traduire l'infirmité de notre condition humaine livrée à la matière et au temps. Le caractère rectiligne de ce temps et du discours implique une description linéaire des êtres les plus charnus de la mathématique. Et cependant, il y a une beauté propre à ce langage!

Finalement un philosophe a dit: "C'est en entrant de la façon la plus décidée dans le champ de l'être de raison et de la pure idéalité que les mathématiques modernes ont fait tant d'admirables découvertes." C'est là qu'il faudrait attirer les jeunes intelligences qui nous sont confiées, tout en développant simultanément leurs aptitudes aux techniques discursives.

[1] J. Dieudonné: Algèbre linéaire et géométrie élémentaire (Hermann, 1964)

[2] J. de Siebenthal: Essai de rénovation de la géométrie descriptive (Bull. de la Soc. Math.Belg. 15 (1963) 201-221)

[3] — Géométrie descriptive (Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne, 1960)

[4] A. Speiser: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung (Springer, 1927)

[5] L. Fejes Toth: Reguläre Figuren (Akadémiai kiado, Budapest, 1965)

METHODEN FUR DEN UNTERRICHT IN WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND STATISTIK

von

L.N.H. Bunt

(Utrecht)

1. Die Einladung Ihnen über die Möglichkeiten des Unterrichts in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik zu sprechen, hat mich gefreut, denn der Unterricht in diesem Teil der Mathematik liegt mir nahe am Herzen. Es gab eine kleine Schwierigkeit als es sich herausstellte, dass es noch einen zweiten Vortrag über dasselbe Thema geben würde. In einem Briefwechsel haben Herr Engel und ich uns darüber verständigt, dass ich mich auf eine einfache Beschreibung meines holländischen Kursus in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik[1] und den anderen Lehrgang beschränken werde, den ich in Zusammenarbeit mit zwei amerikanischen Freunden geschrieben habe[2]. Ich möchte dann etwas von unsren Erfahrungen mit dem Umterricht hinzufügen und auf mögliche Erweiterungen des Lehrstoffes hinweisen.

2. Die Geschichte der Entstehung und Entwicklung des holländischen Lehrganges, mit dem ich mich zuerst beschäftigen werde, lasse ich vollständig beiseite. Ich will aber etwas sagen über die Schüler, für die er bestimmt ist. Es sind die Schüler der humanistischen Oberstufe des Gymnasiums. Diese Oberstufe umfasst die fünfte und sechste Klasse des sechsjährigen Gymnasiums, also die elfte und zwölfte Klasse nach dem Anfang der Grundschule. Die Schüler der fünften Klasse sind ungefähr 17 Jahre alt. In den ersten vier Klassen des

---

1) Dr.L.N.H. Bunt, Statistiek voor het Voorbereidend Hoger en Middelbaar Onderwijs. 3e Auflage. Wolters,Groningen, 1963.

2) Howard F. Fehr, Lucas N.H. Bunt, George Grossman, An Introduction to Sets, Probability and Hypothesis Testing. Heath, Boston, 1964.

Gymnasiums haben diese Schüler denselben mathematischen Lehrstoff gelernt wie die Schüler der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der Oberstufe, d.h. Algebra, Planimetrie und ein wenig Trigonometrie. Unter den Abiturienten der humanistischen Abteilung befinden sich die zukünftigen Soziologen, Psychologen, Oekonomen, usw.

3. Selbstverständlich berücksichtigt der Lehrgang in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (für diese Kombination werde ich im folgenden nur kurz "Statistik" sagen) die Bedürfnisse und die mathematische Veranlagung der Schüler. Deshalb wird alles sehr einfach gehalten, und irgend eine Art Vollständigkeit wird nicht angestrebt. Es wird mit den folgenden Themen angefangen: Häufigkeitsverteilung, Mittelwert, Median, mittlere Abweichung, Streuung (im Sinne von Standardabweichung), Permutationen, Kombinationen, Pascalsches Dreieck, Binomialsatz, einige einfache Theoreme der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Binomialverteilung, mathematische Erwartung und Streuung für eine Binomialverteilung mit $p = \frac{1}{2}$, das Testen einer Hypothese für eine Population mit zwei Merkmalen, und die Normalkurve als Limes des Histogramms für die Binomialverteilung (nicht analytisch, nur anschaulich behandelt).

4. Bei der Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehen wir von der hergebrachten Definition aus: Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses ist gleich den Quotienten aus der Anzahl der für das Ereignis günstigen und der Anzahl der überhaupt möglichen Fälle. Ich werde mich nicht darin vertiefen, ob diese Definition in jeder Hinsicht als richtig angesehen werden kann, aber didaktisch bietet sie Vorteile. Es muss leider hinzugefügt werden, dass alle Fälle eine gleich grosse Wahrscheinlichkeit haben, und bekanntlich fangen hier die Schwierigkeiten an. Nicht für die Schüler jedoch: diese sind ganz einig mit der Behauptung, dass z.B. die sechs Seiten eines symmetrischen Würfels gleichwahrscheinlich sind. Die Schwierigkeiten kommen später bei den empiri-

schen Wahrscheinlichkeiten.

Wir gehen also von der klassischen Definition aus und beweisen in bekannter Weise folgende drei Regeln:

a) Vollständigkeitstheorem. Die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreffen eines Ereignisses ist gleich 1 minus der Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis eintrifft.

b) Additionstheorem. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten irgendeines der Ereignisse E_1 und E_2 in einer gewissen Operation ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse, wenn diese miteinander unverträglich sind.

c) Multiplikationstheorem. Die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreten zweier voneinander unabhängiger Ereignisse ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse.

Hier zeigt sich schon unsre Beschränkung bei der Wahl des Lehrstoffes: wir beschäftigen uns nur mit unabhängigen Ereignissen.

Die Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, auch in dieser beschränkten Form, bietet dem Lehrer schon die Gelegenheit, ausserordentlich nützliche Aufgaben zu stellen. Ein gegebenes Problem wird zunächst formell logisch analysiert, danach mittels der drei erwähnten Regeln mathematisiert und dann wird der Lösungswert berechnet.

Wir beweisen weiter folgenden Satz:

d) Theorem der Binomialverteilung. Wenn eine Operation aus n unabhängigen Teiloperationen besteht und die Wahrscheinlichkeit eines Treffers für jede Operation gleich p ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit für k Treffer gleich $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

5. So weit haben wir uns beschränkt auf Beispiele und Aufgaben mit Bezug auf das Werfen mit Münzen, das Ziehen von Bällen oder Karten, usw. In solchen Fällen gibt es Elementarereignisse, die als gleichwahrscheinlich aufgefasst werden können. Wir wollen aber die Resultate unserer Theorie auch auf Fragestellungen des praktischen Lebens

anwenden. Dann wird es schwierig, Elementarereignisse zu finden, die gleichwahrscheinlich sind, und deshalb wird eine neue Definition der Wahrscheinlichkeit zweckmässig. Diese Definition beruht auf der folgenden Tatsache: Wenn sich bei einer hinreichend grossen Anzahl von Fällen herausgestellt hat, dass ein gewisses Ereignis bei a% aller Fälle eintritt, können wir erwarten, dass immer dann, wenn nur eine genügend grosse Anzahl von Fällen vorausgesetzt wird, das Ereignis bei a% dieser Fälle eintreten wird. Wir sagen dann, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis a% ist. Mit Hilfe von Betrachtungen mit relativen Häufigkeiten stellen wir einfach fest, dass für Wahrscheinlichkeiten, die auf Grund dieser neuen Definition festgestellt worden sind, die Vollständigkeits-, Additions- und Multiplikationstheoreme ihre Gültigkeit behalten.

6. Mittels einfacher Beispiele kann das Thema "Stichproben" behandelt werden.

Beispiel. Wir wollen mal den hypothetischen Fall betrachten, dass ich anfange, kahl zu werden. Es gibt ein gewisses neues Haarmittel, aber ich weiss nicht, ob ich es kaufen soll oder nicht. Mein Friseur behauptet, dass es in 70% der Fälle wirkt.

Ich entschliesse mich, die Behauptung des Friseurs zu testen. Ich kenne zehn Leute die das Haarmittel probiert haben und das Resultat mitteilen wollen. Ich werde diese zehn Personen als eine gute Stichprobe aus allen Käufern des Haarmittels betrachten. Wenn diese Stichprobe zu wenig Leute erfasst, die sagen, dass das Haarmittel bei ihnen gewirkt hat, werde ich es nicht kaufen; im andern Fall werde ich es wohl kaufen.

Die Behauptung des Friseurs ist:

$$p = 0.7 ,$$

wo p der Bruchteil der Käufer ist, die das Mittel mit gutem Erfolg probiert haben. Deshalb werde ich die Hypothese

$$H: p = 0.7$$

testen.

Ich werde diese Hypothese verwerfen, und also das Mittel nicht kaufen, wenn X, die Anzahl der Treffer in meiner Stichprobe, zu klein ist. Ich werde H also links-einseitig testen.

Damit ich eine taugliche Entscheidungsvorschrift finde, berechne ich erst einige Wahrscheinlichkeiten. Wenn H wahr ist und wenn wir aselekt eine Person aus der Population aller Käufer des Haarmittels herausgreifen, ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person ein Treffer ist, gleich 0.7. Anwendung des Theorems der Binomialverteilung ergibt also folgendes:

$$P(X = 0) = (0.3)^{10} \approx 0.000,$$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1}(0.7)^1(0.3)^9 \approx 0.000,$$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2}(0.7)^2(0.3)^8 \approx 0.001,$$

$$P(X = 3) = \binom{10}{3}(0.7)^3(0.3)^7 \approx 0.009,$$

$$P(X = 4) = \binom{10}{4}(0.7)^4(0.3)^6 \approx 0.037.$$

Hieraus folgt:

$P(X \in \{0, 1, 2, 3\}) \approx 0.000+0.000+0.001+0.009=0.010,$

$P(X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}) \approx 0.010+0.037=0.047.$

Wenn wir also die Entscheidungsvorschrift

Verwerfe H als $X \in \{0, 1, 2, 3\}$

einhalten, riskieren wir die Wahrscheinlichkeit von 0.010, dass wir H verwerfen, wenn H wahr ist. Anders gesagt: die Unzuverlässigkeit, α, ist 0.010.

Wenn wir die Entscheidungsvorschrift

Verwerfe H als $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

einhalten, ist $\alpha = 0.047$.

Wenn ich in einem einseitigen Test den Wert von α unter 2.5% = 0.025 halten will, werde ich die erstgenannte Entscheidungsvorschrift wählen. Ich werde also die Hypothese H: p = 0.7 verwerfen, wenn meine Stichprobe 0, 1, 2 oder 3 Treffer erfasst, das heisst, wenn 3 oder weniger als 3 von den 10 Personen sagen, dass das Haarmittel bei ihnen gewirkt hat.

Nehmen wir jetzt an, dass 5 von den 10 befragten Personen erklären, dass das Haarmittel bei ihnen gewirkt hat. Ich werde dann die Hypothese $p = 0.7$ nicht verwerfen, und ich werde das Haarmittel kaufen.

Population	Alle Käufer des Haarmittels
H_o	$p = 0.7$
Verfahren	Nimm eine Stichprobe von 10 Käufern
E	$\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$
Art des Tests	Links-einseitig
Entscheidungsvorschrift	Verwirf H_o für $X \in \{0, 1, 2, 3\}$
Kritisches Gebiet von E	$\{0, 1, 2, 3\}$
Graphische Darstellung von E	●—●—●—●—○—○—○—○—○—○—○ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 X
α	$0.01 = 1\%$

7. Auf der Grundlage solcher Beispiele bilden wir eine Theorie vom Testen von Hypothesen. Ich werde jetzt kurz ausführen, wie das geschieht.

Wir betrachten den Fall einer Urne mit einer sehr grossen Anzahl von roten und weissen Kugeln, wobei der Bruchteil p der roten Kugeln unbekannt sei. Wir wollen annehmen, dass sich in den gegebenen Beispielen eine Methode herausgestellt hat, die Hypothese H_o: $p = 0.5$ ein- bezw. zweiseitig mit Hilfe einer Stichprobe zu testen. Es hat sich dann ergeben, dass folgende Entscheidungsvorschriften gewählt werden könnten:

a) Bei linksseitigem Testen: Verwirf H_o für $X = 0$ oder 1.

b) Bei rechtsseitigem Testen: Verwirf H_o für $X = 9$ oder 10.

c) Also bei beidseitigem Testen: Verwirf H_o für $X = 0$, 1, 9 oder 10.

In den Fällen a und b ist dann die Wahrscheinlichkeit für einen α-Fehler nicht grösser als 0.025, im Falle c nicht grösser als 0.05.

Setze $\frac{X}{10} = \underline{p}$. Die Hypothese H_0: p = 0.5 wird dann für $\underline{p}$ = 0, 0.1, 0.9 oder 1 verworfen. Auf einer horizontalen Achse bezeichnen wir die Werte von $\underline{p}$, die nicht mit p=0.5 vereinbar sind, durch kleine Vollkreise, dagegen die Werte, die damit vereinbar sind, durch Nullkreise (Fig. 1).

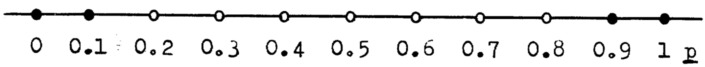


Fig. 1

In der gleichen Weise kann man das Testen der Hypothese H_0: p = 0.6 behandeln. Dann erweist es sich, dass die Entscheidungsvorschriften für eine Stichprobe mit n = 10 wie folgt passend gewählt werden:

a) Bei linksseitigem Testen: Verwirf H_0 für X = 0, 1 oder 2.
b) Bei rechtsseitigem Testen: Verwirf H_0 für X = 10.
c) Also bei beidseitigem Testen: Verwirf H_0 für X = 0, 1, 2 oder 10.

Wie eben werden nun wieder die Werte von $\underline{p}$, die nicht mit p = 0.6 vereinbar sind, auf einer horizontalen Achse durch kleine Vollkreise, die anderen damit wohl zu vereinbarenden Werte dagegen durch Nullkreise markiert (Fig.2).

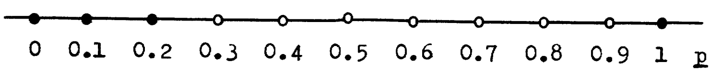
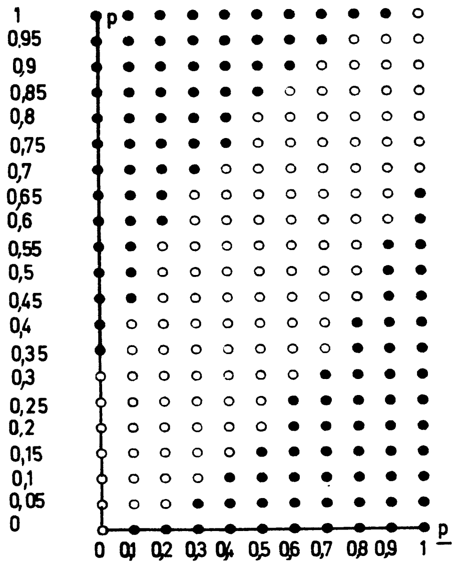


Fig. 2

8. So können nun auch bei den anderen Werten von p in derselben Weise Werte von $\underline{p}$ gefunden werden, die damit vereinbar oder damit nicht vereinbar sind. Die entsprechenden Darstellungen für p = 0, 0.05, 0.10, ..., 1 bilden das in Fig. 3 dargestellte System.

Wir denken uns nun für weitere p-Werte die Schemata der entsprechenden Entscheidungsvorschriften in das System der Figur 3 eingezeichnet, die also durch weitere Vollkreise und Nullkreise vervollständigt wird. Vollkreise und Nullkreise geben dann immer an, ob gewisse Werte von p und $\underline{p}$ im Widerspruch oder nicht im Widerspruch zueinamder stehen. Die Stellen des Systems, an denen Vollkreise in Nullkreise übergehen (die Grenzpunkte), verbinden wir durch zwei kontinuierlich verlaufende Kurvenzüge. Durch diese

fig.3



Grenzkurven können wir das System der Vollkreise und Nullkreise besser überblicken. Sie begrenzen das Gebiet G_{10}. Dieses enthält auf den Geraden $\underline{p} = 0$, $\underline{p} = 0.1$, ..., $\underline{p} = 1$ offenbar nur Nullkreise. Aus Fig. 4 kann man jetzt ablesen, welche p- und $\underline{p}$-Werte miteinander verträglich sind.

<u>Beispiel.</u> Welche p-Werte stehen nicht im Widerspruch zu $\underline{p} = 0.4$?

<u>Lösung.</u> Wir betrachten in Fig. 4 die Gerade $\underline{p} = 0.4$. Jeder zwischen den Grenzkurven liegende Punkt dieser Geraden gibt einen Wert von p an, der mit $\underline{p} = 0.4$ vereinbar ist. Wir lesen als Grenzen für p die Zahlen 0.12 und 0.74 ab. Die gesuchten p-Werte genügen also der Ungleichung

$$0.12 < p < 0.74.$$

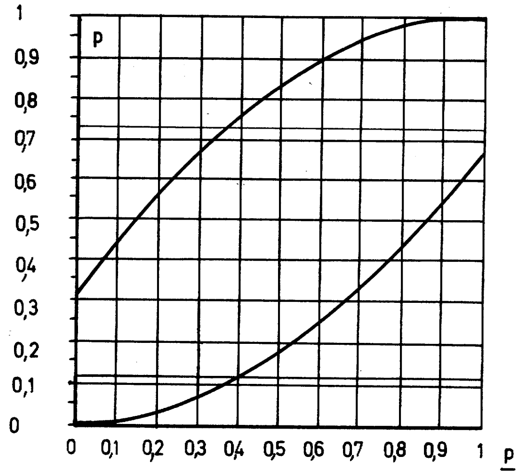


Fig. 4

Man kann jetzt leichtfolgenden Satz beweisen: Beurteilt man die p-Werte mittels einer Stichprobe, die aus 10 Elementen besteht, und wendet die Methode der Fig. 4 an, dann riskiert man eine Wahrscheinlichkeit von höchstens 2.5%, dass man den wahren Wert von p auf Grund eines zu kleinen (zu grossen) p-Wertes verwirft.

Aehnliche Betrachtungen können für Stichproben, die aus einer grösseren Anzahl von Elementen bestehen, angestellt werden. Die entsprechenden Gebiete G_n werden übersichtlich in einem Nomogramm dargestellt. Dann kann man offenbar mit verschiedenen Genauigkeitsgraden auf Grund der in den Stichproben vorgefundenen p-Werte Aussagen über den zugehörigen p-Wert machen. Dafür gilt immer, dass man bei einseitigem Testen höchstens eine Wahrscheinlichkeit von 2.5% riskiert, dass man den wahren Wert von p verwirft.

9. Ich möchte an einem Beispiel zeigen, welche Aufgaben durch Anwendung der behandelten Theorie gelöst werden können.

Anwendung. Ein Tomatenzüchter will untersuchen, ob eine gewisse Kreuzungsmethode von Tomaten zum Resultat hat, dass 25% der Ernte aus gelben Tomaten besteht. Eine Stichprobe von 100 Tomaten enthält 36 gelbe. Was wird er daraus schliessen? Das Signifikanzniveau ist 5%.

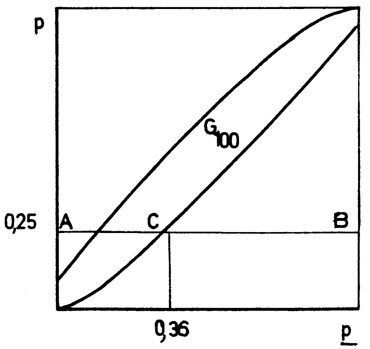


Fig. 5

<u>Lösung</u> (Fig. 5). Es sei p der Bruchteil der Ernte, der aus gelben Tomaten besteht. Der Tomatenzüchter will nach Möglichkeit vermeiden, dass er zu Unrecht p = 0.25 annimmt. Es ist also p = 0.25 die zu prüfende Hypothese. Diese Hypothese soll zweiseitig getestet werden.

Mit den bisherigen Bezeichnungen ist $X = 36$, $n = 100$ und daher $\underline{p} = 0.36$. Wir betrachten die Figur, in der das Gebiet G_{100} angegeben ist. Die Gerade AB hat die Gleichung $p = 0.25$. Sie schneidet den unteren Rand des Gebietes G_{100} in C. Der Punkt mit den Koordinaten $\underline{p} = 0.36$, $p = 0.25$ liegt rechts von C. Die Hypothese $p = 0.25$ wird also verworfen, und der Tomatenzüchter schliesst, dass nicht 25% der Ernte aus gelben Tomaten besteht.

10. Diesem Lehrgang könnten noch verschiedene andere Begriffe hinzugefügt werden, wie zum Beispiel die Normalverteilung. Die Erfahrung hat uns aber gelehrt, dass der gerade beschriebene Lehrgang schon ziemlich umfangreich ist. Zudem glaube ich nicht, dass der Wert eines Kursus in Statistik daher rührt, dass er eine Vielzahl von Themen behandelt. Der Kern des Lehrganges sollte von den Ele-

menten einer Theorie über das Testen einer Hypothese gebildet werden.

Statt an eine Erweiterung des Lehrganges können wir aber auch an eine Vertiefung denken. Wir sind von der klassischen Definition ausgegangen und wir haben einfach angenommen, dass die hergeleiteten Regeln für empirische Wahrscheinlichkeiten ihre Gültigkeit behalten. Das wird nicht jedermann befriedigen, insbesondere nicht die zukünftigen Studenten in einer mehr exakten Disziplin. Im amerikanischen Buch sind wir darum anders vorgegangen. Vom Anfang an arbeiten wir in der Richtung einer axiomatischen Grundlegung. Es wird dazu mit der Behandlung einiger elementaren Eigenschaften von Mengen und Abbildungen angefangen und es wird der Begriff der additiven Mengenfunktion eingeführt.
Eine Mengenfunktion f heisst additiv, wenn für zwei beliebige Mengen A und B des Definitionsbereichs von f, für welche $A \cap B = \emptyset$, gilt:

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B).$$

Es werden folgende Sätze bewiesen:

1) $f(\emptyset) = 0$;

2) Wenn jedes Paar von den Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ einen leeren Durchschnitt hat, ist

$$f(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = f(A_1) + f(A_2) + \ldots + f(A_n);$$

3) $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.

11. Zur Vorbereitung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes wird jetzt der Begriff eines Ereignisraumes erarbeitet. Ein Ereignisraum für ein Verfahren ist eine Menge mit folgenden Eigenschaften:

1) jedes Element der Menge ist ein mögliches Resultat des Verfahrens,

2) jede Ausführung des Verfahrens liefert genau ein Element der Menge.

Wir beschäftigen uns nur mit endlichen Ereignisräumen. Die Elemente werden angegeben mit

$$e_1, e_2, \ldots, e_n.$$

Ein Ereignis wird jetzt definiert als eine Teilmenge des Ereignisraumes. Ist das Verfahren zum Beispiel das Werfen mit einem Würfel, dann kann der Ereignisraum angegeben werden mit

$$E = \{1, 2, \ldots, 6\},$$

und das Werfen einer geraden Zahl mit der Teilmenge

$$A = \{2, 4, 6\}$$

von E.

Das Nichteintreten eines Ereignisses korrespondiert mit der Komplementärmenge einer gegebenen Menge, die logischen Begriffe "und" und "oder" mit dem Durchschnitt, bezw. der Vereinigung zweier Mengen. Das alles lässt sich mit Hilfe einfacher Beispiele verdeutlichen. Es ergibt sich ein Parallelismus zwischen den Begriffen der Ereignisse und der Mengen. Zum Beispiel:

Ereignisse	Mengen
Elementarereignis	$\{e\}$
Ereignis A tritt ein	$e \in A$ (mit $A \subset E$)
Ereignis A tritt nicht ein	$e \in A'$
Ereignisse A und B sind miteinander unverträglich	$A \cap B = \emptyset$
Wenn A eintritt, dann auch B	$A \subset B$

12. Jetzt sind wir so weit, dass wir eine Definition von Wahrscheinlichkeit geben können.

Nehmen wir an, eine gewöhnliche Münze wird geworfen. Wir sagen, dass die Chancen für Kopf 50-50 sind. Damit meinen wir, dass wir keine Veranlassung haben zu erwarten, dass die Münze eher Kopf als Wappen fällt. In Wirklichkeit wird es nur selten vorkommen, dass in einer Reihe von 100 Würfen genau 50 Mal Kopf und 50 Mal Wappen eintritt. Wir machen aber eine Annahme. Wir setzen voraus, dass die Chancen wirklich 50-50 sind, und wir ordnen jedem Ereignis eine Zahl zu, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses. Wir versuchen nicht mittels Experimente ein Mass für die Wahrscheinlichkeit zu finden, sondern wir nehmen eine hypothetische Wahrscheinlichkeit an.

Unser Problem wird jetzt also: wie werden wir den Punkten des Ereignisraumes Wahrscheinlichkeiten zuordnen? Wir werden dabei gewisse Vorschriften einhalten. Das Arbeiten mit relativen Häufigkeiten macht es auf der Hand liegend, dass diese Vorschriften folgende sind:

1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$,

2) Die Wahrscheinlichkeiten bilden eine additive Mengenfunktion, in solcher Weise, dass

$$P(E) = \Sigma\, P(\{e_i\}) = 1.$$

Diese Definition von Wahrscheinlichkeit sieht vielleicht ziemlich willkürlich und abstrakt aus, aber sie bringt zum Ausdruck, dass die Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den Ereignissen in der Tat willkürlich ist und eine mathematische Beschreibung des betreffenden Verfahrens sein will.

Wenn insbesondere die den Elementarereignissen zugeordneten Wahrscheinlichkeiten einander gleich sind, kommen wir zur klassischen Definition zurück, jetzt als beweisbaren Satz.

13. Die im Anfang angegebenen Vollständigkeits- und Additionstheoreme sind nun unmittelbare Folgen der Wahrscheinlichkeitsdefinition. Das Multiplikationstheorem bekommt jetzt in folgender Weise eine gute mathematische Grundlage.

Erst wird die "bedingte Wahrscheinlichkeit" eingeführt. Wir geben ein Beispiel. Man wirft mit zwei Würfeln, angegeben mit den Nummern I und II. Die Resultate geben wir an mit X und Y. Es werde gefragt nach $P(X=6 \mid X+Y \geqslant 11)$, d.h. nach der Wahrscheinlichkeit, dass X = 6, wenn wir wissen, dass die Summe von X und Y mindestens 11 ist. Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass I eine Sechs geben wird, wenn die Summe der mit I und II erzielten Resultaten schon bekannt ist, scheint ziemlich sinnlos. Deshalb geben wir dem Problem folgende Bedeutung. Erst betrachten wir den Ereignisraum E (Fig. 6):

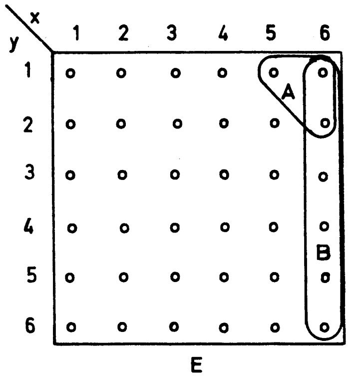


Fig. 6

Wenn die Teilmenge A das Ereignis $X + Y \geqslant 11$ darstellt und die Teilmenge B das Ereignis $X = 6$, nehmen wir <u>A als einen neuen Ereignisraum E'</u>, und berechnen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B in E'. Wir bekommen dann

$$P(X = 6 \mid X + Y \geqslant 11) = P(B|A) = P(A \cap B) \text{ in } E' =$$
$$= \frac{\text{Anzahl der Fälle in } A \cap B}{\text{Anzahl der Fälle in } E'} = \frac{2}{3} .$$

Es ist völlig selbstverständlich, dass im neuen Ereignisraum E' die elementaren Ereignisse immer noch gleichwahrscheinlich sind. Für Anfänger ist es schwer zu verstehen, dass hier eigentlich ein Axiom vorliegt, speziell wenn man an relative Häufigkeiten denkt oder wenn man bedenkt, dass jeder Ereignisraum als eine Teilmenge unendlich vieler anderen Ereignisräume betrachtet werden kann.

Im Allgemeinen leiten wir im Falle gleichwahrscheinlicher Elementarereignisse eine Formel für $P(A|B)$ wie folgt ab:

$$P(A|B) = \frac{\text{Anzahl der Fälle in } A \cap B}{\text{Anzahl der Fälle in } B} =$$

$$= \frac{\text{Anzahl der Fälle in } A \cap B}{\text{Anzahl der Fälle in } E} : \frac{\text{Anzahl der Fälle in } B}{\text{Anzahl der Fälle in } E} =$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (\text{in } E).$$

In analoger Weise kann man den Fall nicht gleichwahrscheinlicher Elementarereignisse behandeln.

Das Multiplikationstheorem bekommt jetzt die Form:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A).$$

14. Bis jetzt haben wir neben dem Additionstheorem in der Form

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

noch eine spezielle Form für den Fall, dass die Ereignisse A und B miteinander unverträglich sind, nämlich

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Analog können wir uns fragen, ob für das Multiplikationstheorem in einem Spezialfall eine derartige spezielle Form

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

angegeben werden kann. Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir folgendes Beispiel.

Zwei Würfel, No I und No II, werden geworfen, und wir nehmen an, dass das Ergebnis von II nicht vom Ergebnis von I beeinflusst wird. Wenn also das Ergebnis von I z.B. 3 ist, ist für jedes Ergebnis von II die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.

Wir können uns aber vorstellen, dass jeder der beiden Würfel einen Magneten enthält, wodurch einige Seiten der zwei Würfel einander anziehen und andere einander abstossen. In diesem Fall kann es sein, dass, wenn I 3 fällt, die Wahrscheinlichkeit von 6 mit II verschieden ist von den Wahrscheinlichkeiten der anderen Nummern. Es ist z.B. möglich, dass wir haben

$$P(\text{Würfel II fällt } 6 \mid \text{Würfel I fällt } 3) = \frac{1}{3}.$$

Für Würfel II allein können wir immer noch haben

$$P(\text{Würfel II fällt } 6) = \frac{1}{6}.$$

Es besteht dann folgende Ungleichheit:

$$P(\text{II fällt } 6 \mid \text{I fällt } 3) \neq P(\text{II fällt } 6).$$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

II fällt 6 (Ereignis A)

hängt also davon ab, ob das Ereignis

I fällt 3 (Ereignis B)

eintritt oder nicht. Darum sagen wir, dass A abhängig ist von B.

Im Allgemeinen sagen wir, dass A abhängig ist von B, wenn $P(A|B) \neq P(A)$. Im andern Fall sagen wir, dass A unabhängig ist von B. Da

$$P(A|B) = P(A)$$

gleichwertig ist mit

$$P(B|A) = P(B),$$

kann man dann auch einfach sagen, dass A und B unabhängig sind.

Für zwei unabhängige Ereignisse A und B gilt jetzt die spezielle Form des Multiplikationstheorems, denn aus

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

ergibt sich, wegen der obigen Definition,

$$P(A \cap B) = P(A).P(B).$$

15. Ich bemerkte vorher, dass wir unser Augenmerk nicht auf die Behandlung einer Vielzahl von Problemen richten sollten. Es könnte aber sein, dass noch Zeit zur Verfügung steht. Dann würde die Normalverteilung in Betracht kommen. Der holländische Lehrgang behandelt sie denn auch in einem letzten Kapitel. Wir gehen dabei folgendermassen vor.

Wir werfen 4 Münzen und interessieren uns für die Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens der Ereignisse 0, 1, 2, 3 oder 4 "Köpfe". Wenn wir den oben genannten Satz d anwenden, finden wir $\frac{1}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{4}{16}$ und $\frac{1}{16}$. Von dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung zeichnen wir folgendes Histogramm (Fig. 7).

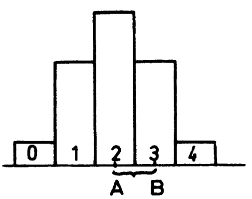


Fig. 7

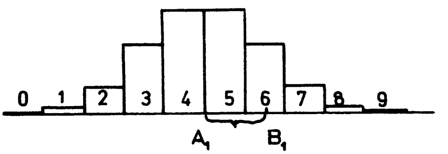


Fig. 8

Der Versuch wird mit 9 Münzen wiederholt. Das zugehörige Histogramm ist in Abb. 8 dargestellt. Es ist so angelegt, dass die gesamte Fläche inhaltsgleich mit der gesamten Fläche des ersten Histogramms ist und dass die Längen der Liniensegmente, die die einzelnen Klassen darstellen, mit den Längen der Liniensegmente in Fig. 7 übereinstimmen. Das 2. Histogramm ist also doppelt so breit wie das erste, aber dafür nicht so hoch. Die Standardabweichung (in allen Abbildungen durch das Liniensegment AB dargestellt) wird darum grösser sein. Eine einfache Berechnung zeigt, dass die Standardabweichung gleich 1 ist, wenn wir 4 Münzen werfen, und gleich $\frac{3}{2}$ für 9 Münzen.

Wir wollen die Form des 2. Histogramms so abändern, dass es äusserlich dem 1. Histogramm ähnlicher wird. Die gesamte Fläche soll dabei unverändert bleiben. Die Klasse wird nun durch ein kleineres Liniensegment dargestellt, derart, dass die Standardabweichung in beiden Fällen durch gleich lange Strecken angegeben wird. Das erreichen wir dadurch, dass $\frac{3}{2}$ Klassen die gleiche Streckenlänge zugeordnet wird, die vorher nur einer Klasse zugeordnet war. Fig. 9 zeigt das abgeänderte Histogramm.

Wir können uns ein solches Histogramm für den allgemeinen Fall gezeichnet denken, dass n Münzen geworfen werden. Eine mathematische Berechnung, die die Schüler leicht verstehen können, ergibt, dass in diesem Falle der Mittelwert ("mathematische Erwartung" genannt und dargestellt durch den Buchstaben E) gleich $\frac{1}{2}n$ ist und die Standardabweichung den Wert $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ hat. $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ Klassen werden entsprechend durch die gleiche Strecke, die vorher nur einer Klasse des 1. Histogramms zugeordnet war, dargestellt. Die gesamte Fläche soll dabei wieder unverändert bleiben und der Punkt A der

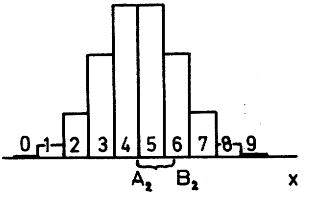


Fig. 9.

X-Achse, der die mathematische Erwartung darstellt, seine Lage beibehalten.

Wenn wir nun n über alle Grenzen wachsen lassen, ist es anschaulich klar, dass der obere Rand des Histogramms sich einer Kurve nähert. Diese Kurve wird "Normalkurve" genannt (Fig. 10). Der Beweis, dass der Grenzwert tatsächlich existiert, ist zu schwierig für die Schüler. Wir begnügen uns deshalb damit, den Sachverhalt durch einige Beispiele plausibel zu machen.

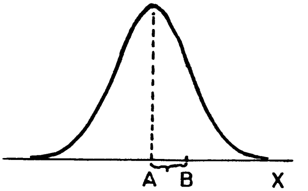


Fig. 10

16. Es gibt viele Möglichkeiten für die Behandlung interessanter Anwendungen der Normalverteilung. So können wir mittels eines Beispiels zeigen, wie die moderne Physik ihre Gesetze auf statistische Erwägungen gründet. Auch können wir die Normalverteilung beim Testen einer Hypothese anwenden. Oder aber wir können sie anwenden bei einer Behandlung des Gesetzes der grossen Zahlen in folgender speziellen Form: Wirft man eine Münze eine grosse Anzahl, n Male, dann ist es praktisch sicher, dass die Anzahl der "Köpfe" in der unmittelbaren Nähe von $\frac{1}{2}$n liegt. Dabei kann man wie folgt vorgehen.

Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit für eine Anzahl Male Kopf, X, die einer der folgenden Ungleichungen genügt:

$$X - E > \frac{E}{100}$$

und

$$X - E < \frac{E}{100}.$$

E ist der Erwartungswert der Anzahl Male Kopf in n Würfen.

Wir betrachten erst die Wahrscheinlichkeit

$$P(X - E > \frac{E}{100}) = P(\frac{X-E}{\sigma} > \frac{E}{100\sigma}).$$

Setzen wir
$$\frac{X-E}{\sigma} = Z,$$
und weiter
$$E = \tfrac{1}{2}n \text{ und } \sigma = \tfrac{1}{2}\sqrt{n}\ ,$$
dann wird unsre Wahrscheinlichkeit
$$P(Z > \frac{\sqrt{n}}{100}).$$
Strebt n nach unendlich, dann auch $\frac{\sqrt{n}}{100}$. Die Tabelle der Normalverteilung zeigt, dass dann die Wahrscheinlichkeit $P(Z > \frac{\sqrt{n}}{100})$ nach Null strebt.

Hieraus ergibt sich:
$$P(X - E > \frac{E}{100}) + P(X - E < -\frac{E}{100})$$
strebt nach Null wenn n nach unendlich geht. Und dann haben wir auch:
$$P(|X - E| \leq \frac{E}{100}) \longrightarrow 1.$$

Beim Anwenden der empirischen Definition von Wahrscheinlichkeit sind wir also praktisch sicher, dass für eine symmetrische Münze, das Ergebnis, nach Abrundung, ebenfalls $\frac{1}{2}$ ist.

17. Es gibt zumindest zwei Ursachen, weshalb man sich beim Unterricht in der Statistik beschränken muss: erstens wegen der mathemathischen Schwierigkeiten, zweitens wegen des Umfangs des Lehrstoffes. Es gibt aber Möglichkeiten zur Vertiefung ohne die Grenzen des heutigen Mathematikprogramms der höheren Schule zu überschreiten. So kann man das Bestimmen der Grenzpunkte im genannten Nomogramm in folgender Weise erklären.

In einer Population mit dem Bruchteil p der Treffer geben wir die Wahrscheinlichkeit für eine Stichprobe von 10 Elementen mit X Treffern an mit
$$P(X\,|\,p).$$
Eine einfache Berechnung (deren Resultate in einer schon anderweitig benutzten Tabelle vereinigt sind) ergibt:
$$P(0|0) = 1,$$
$$P(0|0.25) = 0.75^{10} = 0.056,$$

$$P(0|0.30) = 0.70^{10} = 0.028,$$
$$P(0|0.35) = 0.65^{10} = 0.013,$$
$$P(0|0.40) = 0.60^{10} = 0.006.$$

Die gefundenen Wahrscheinlichkeiten setzen wir ab gegen die Werte von p (Fig. 11).

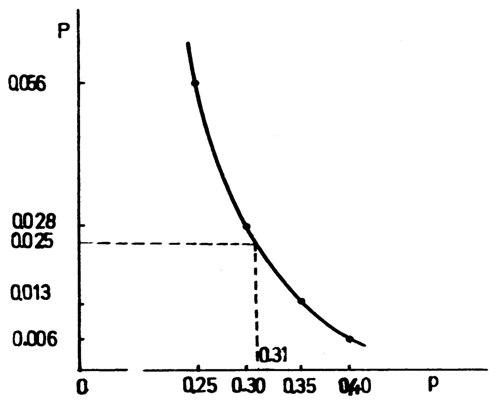


Fig. 11

Die Gleichung $$P(0 \mid p) = (1 - p)^{10} = 0.025$$
kann jetzt graphisch gelöst werden. Wir finden
$$p = 0.31.$$

Hiermit ist der auf der p-Achse liegende Grenzpunkt gefunden. Analog finden wir:

$$P(0 \text{ oder } 1 \mid 0) = 1,$$
$$P(0 \text{ oder } 1 \mid 0.40) = 0.60^{10} + 10 \cdot 0.40 \cdot 0.60^{9} = 0.046,$$
$$P(0 \text{ oder } 1 \mid 0.45) = 0.55^{10} + 10 \cdot 0.45 \cdot 0.55^{9} = 0.024,$$
$$P(0 \text{ oder } 1 \mid 0.50) = 0.50^{10} + 10 \cdot 0.50 \cdot 0.50^{9} = 0.011,$$
$$P(0 \text{ oder } 1 \mid 0.55) = 0.45^{10} + 10 \cdot 0.55 \cdot 0.45^{9} = 0.004.$$

Die gefundenen Wahrscheinlichkeiten werden wieder gegen die Werte von p abgesetzt (Fig. 12).

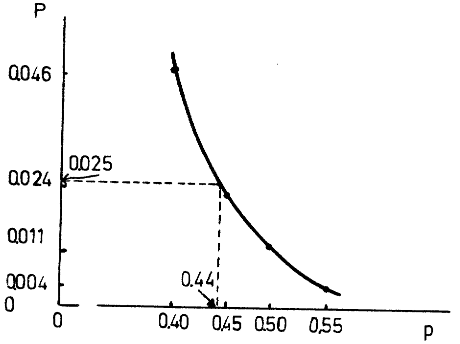


Fig. 12.

Die Gleichung

$$P(0 \text{ oder } 1|p) = (1-p)^{10} + 10p(1-p)^9 = 0.025$$

wird wieder graphisch gelöst. Wir finden

$$p = 0.44.$$

Dies ergibt einen der Grenzpunkte der Kolonne $\underline{p} = 0.1$.

In analoger Weise könnten die anderen Grenzpunkte gefunden werden.

18. Wenn die Normalverteilung behandelt worden ist, kann man noch ein wenig tiefer auf die Grenzkurven eingehen. In unsren Figuren verbinden diese Kurven die Grenzpunkte für einen bestimmten Umfang, n, der Stichprobe. Beim Bestimmen der Grenzpunkte gingen wir, für jedes p, von der zugehörigen binomialen Wahrscheinlichkeitsverteilung aus.

Wir betrachten z.B. den oberen Grenzpunkt der Kolonne $\underline{p} = 0.4$ für Stichproben mit $n = 10$ und einen α-Fehler von 5%. Der zugehörige Wert p_0 von p ist so bestimmt, dass für diesen Wert von p die Wahrscheinlichkeit für 0, 1, 2, 3 oder 4 Treffer genau 0.025 ist. Das Histogramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung für $X = 0, 1, \ldots, 10$, wenn $p=p_0$, hat also die Eigenschaft, dass die Gerade $X = 4.5$ an der linken Seite einen Teil mit dem Flächeninhalt 0.025 abschneidet.

In dem praktischen Gebrauch benutzt man meistens Nomogramme, in welchen die Grenzkurven ein wenig verschieden sind von den unsrigen. Sie gehen dann durch Punkte, die ein wenig anders bestimmt worden sind. Wir betrachten wieder den Fall $n = 10$, $p = 0.4$. Zuerst ersetzt man, für jeden Wert von p, die Wahrscheinlichkeitsverteilung für $X = 0, 1, \ldots, 10$ durch die zugehörige Normalverteilung. Das Histogramm wird also durch eine Normalkurve ersetzt und statt eines Teiles des Histogramms an der linken Seite betrachtet man jetzt einen Teil der Figur unter der Normalkurve. Diese zwei Teile haben aber nicht dieselbe Fläche, denn wegen des kleinen Umfangs der Stichprobe ist die Normalkurve nicht eine ausreichend genaue Approximierung der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Zweitens betrachtet man nicht den Teil links von der Geraden $X = 4.5$, sondern den Teil links von $X = 4$. Die Rechtecke, welche die einzelnen Wahrscheinlichkeiten angeben, sind aber für $n = 10$ noch ziemlich breit, und dies ergibt eine zweite ziemlich erhebliche Ungenauigkeit. Aus diesen zwei Gründen gibt es einen beträchtlichen Unterschied zwischen den neuen und den alten Grenzpunkten. Für $n = 10$, und im Allgemeinen für kleine Stichproben, werden hierdurch die neuen Grenzkurven keine zuverlässigen Resultate ergeben.

Die erstgenannten Kurven haben also nicht nur den didaktischen Vorteil, dass ihre Bedeutung leichter zu verstehen ist, sondern sie geben für kleine Werte von n auch präzisere Resultate. Dagegen aber haben die letztgenannten Kurven die erfreuliche Eigenschaft, dass es Ellipsen sind, was man wie folgt zeigen kann.

Es sei $\underline{p}_0$ ein bestimmter Wert von $\underline{p} = \frac{X}{n}$ und p_0 der Wert von p der zum oberen Grenzpunkt der Kolonne $\underline{p} = \underline{p}_0$ gehört. Wir betrachten die Normalverteilung für $p = p_0$. Die Gerade $X = n\underline{p}_0$ schneidet von der Figur zwischen der Normalkurve und der X-Achse einen Teil ab, dessen Fläche 0.025 ist. Die z-Koordinate dieser Geraden ist -1.96. Da für diese Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt

$$E = np_0 \text{ und } \sigma = \sqrt{np_0(1 - p_0)},$$

folgt aus der Beziehung

$$\frac{X - E}{\sigma} = Z:$$

$$\frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = -1.96,$$

was ergibt

$$\frac{\underline{p}_0 - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}} = -1.96,$$

oder
$$(\underline{p}_0 - p_0)^2 = 1.96^2 . \frac{p_0(1-p_0)}{n} .$$

Setzt man
$$\frac{1.96^2}{n} = k^2,$$

dann geht die gefundene Relation, nach Weglassung des Indexes, über in

$$\underline{p}^2 - 2\underline{p}p + p^2 = k^2p - k^2p^2,$$

oder
$$\underline{p}^2 - 2\underline{p}p + (1+k^2)p^2 - k^2p = 0.$$

Dieses stellt aber eine Ellipse dar, wegen

$$4 - 4(1+k^2) = -4k^2 < 0.$$

Für $p = 0$ bekommt man $\underline{p} = 0$ als Doppelwurzel, für $p = 1$ gleichfalls $\underline{p} = 1$. Die Ellipse hat also die Geraden $p = 0$ und $p = 1$ als Tangenten.

Die Gleichung der Ellipse ermöglicht das Bestimmen der Grenzpunkte mittels einer Berechnung, wenn die Anzahl der Treffer in einer Stichprobe gegeben ist.

MATHEMATISCHE FORSCHUNG UND DIDAKTIK DER WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

von

A. Engel

(Stuttgart)

Einleitung

Die Grundlegung wichtiger mathematischer Ideen muss so früh wie möglich erfolgen. Die gilt besonders für die Untersuchung zufälliger Erscheinungen. Die Wahrscheinlichkeitstheorie (WT) ist der vielseitigste Zweig der Mathematik und erfordert die Einführung einer grossen Zahl neuer und ungewohnter Begriffe. Der Schüler braucht Zeit, um mit ihnen vertraut zu werden. Daher muss die WT organisch in den Lehrstoff eingeschmolzen werden. Sie wird dadurch allgegenwärtig von der ersten bis zur letzten Klasse. Nur so geht das statistische Denken unter die Haut. Der wichtigste Teil der Arbeit wird in den drei ersten Jahren der höheren Schule geleistet. In Deutschland sind dies das 5. bis 7. Schuljahr. Die Schüler sind dabei 11- bis 13-jährig.

Der Schüler hat keine anschauliche Vorstellung von den Begriffen, die der WT zugrunde liegen. Daher ist ein propädeutischer Kurs unerlässlich. Hier muss der Schüler an einfachen Beispielen und vielen Experimenten die Begriffe und Methoden der WT erleben. So wird ein anschaulicher Hintergrund für die abstrakte Theorie geschaffen, die im 8. Schuljahr einsetzen kann. Der Zufall übt auf den Schüler einen ungewöhnlichen Reiz aus. Daher gelingt es in kurzer Zeit tief in die WT einzudringen.

Eine wesentliche Aenderung des Stoffplans ist dabei nicht einmal nötig. Die Grundbegriffe der Mengenlehre sind allerdings unentbehrlich. Sonst braucht man nur die Aufgaben zu ändern. Das Aufgabenmaterial für diese Altersstufe zeichnet sich durch grosse Ideenarmut aus. Es stammt zum Teil noch aus altbabylonischen Tempelschulen. Die teilweise Auswechslung dieser Aufgaben durch Probleme kombinatorischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Inhalts bedeutet einen grossen Gewinn.

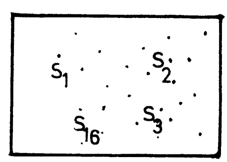
Auf den folgenden Seiten unterbreiten wir genaue Vorschläge für das 5. bis 7. Schuljahr und erläutern sie an markanten Beispielen.

5. Schuljahr

Gegen Ende des Jahres sollten die Schüler mit den Begriffen Menge, Teilmenge, Vereinigung, Durchschnitt und Komplement bezüglich einer Grundmenge vertraut sein. Dann kann man mit der Kombinatorik beginnen, verwendet aber gleich die Sprache der WT.

Man wirft eine Münze. Sie kann auf zwei Arten fallen: a) Wappen. Stattdessen sagt man "F e h l s c h l a g" und schreibt O. b) Zahl. Stattdessen sagt man "E r f o l g" und schreibt 1. Durch diese Sprachregelung wird die Münze zu einer Ziffernquelle. Sie erzeugt binäre Zufallsziffern, mit denen man jeden noch so komplizierten stochastischen[1)] Prozess nachahmen (simulieren) kann. Darauf wird später eingegangen. Dieser Ziffernquelle kan man eine Stichprobe entnehmen, einen binären Ziffernblock.

Man betrachtet einen Versuch: Die Münze wird viermal geworfen und das Ergebnis notiert. Das Versuchsprotokoll ist ein Zettel, auf dem eine vierstellige binäre Zahl steht, z.B. 0100. Die Menge S aller möglichen Ausfälle des Versuchs nennt man Stichprobenraum. Für den Schüler ist das einfach eine Zettelmenge, die in einer Schachtel oder Urne (Fig. 1) untergebracht ist.



S

Fig. 1

1) Stochastisch heisst zufällig.

Die einzelnen Zettel nennt man Stichprobenpunkte s. Eine Teilmenge $A \subset S$ nennt man Ereignis. In bekannter Weise werden die Begriffe Gegenereignis $\bar{A}' = S \setminus A$, sicheres Ereignis S, unmögliches Ereignis $\emptyset$ und die Ereignisse $A \cup B$, $A \cap B$ eingeführt. Dies ist für den Schüler nur eine neue Redeweise für bekannte Begriffe der Mengenlehre.

Jetzt studiert man die Anzahlfunktion n über den Teilmengen von S. Die erste Frage lautet: Wieviel Zettel enthält S? Diese Frage wird durch Sortieren der Zettel nach den einzelnen Ziffern beantwortet, was auf ein Baumdiagramm führt (Fig. 2). Nun werden verschiedene Ereignisse definiert und ausgezählt. Hier muss man sich vor dem altbabylonischen Geist hüten. Es ist nicht gleichgültig welche Ereignisse man untersucht.

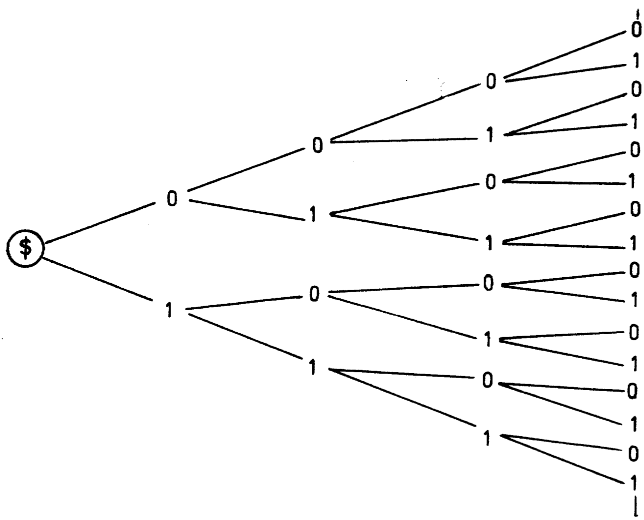


Fig. 2

Welche Ereignisse sind denn wichtig? In der WT betrachtet man reelle Zahlenfunktionen auf dem Stichprobenraum S, also Abbildungen von S in die Zahlengerade R. Solche Funktionen heissen zufällige Variable. Sie werden traditionell mit grossen Buchstaben X, Y, Z usw bezeichnet. Es sei $s \longrightarrow X(s)$ eine solche Funktion. Dann interessieren vor allem Ereignisse von der Form $X=r$, $X \leq r$, $a \leq X \leq b$ usw. Dabei versteht man z.B. unter dem Ereignis $X=r$ die Menge aller Punkte von S, in denen die Funktion X den festen Wert r annimmt, d.h. die Menge $\{s \in S \mid X(s)=r\}$. Wenn man dies von der ersten Stunde an berücksichtigt, kann man viel Zeit gewinnen. Man wird auch davor bewahrt sinnlose Aufgaben über Karten, Urnen, Würfel und Münzen zu lösen.

In unserem Beispiel (Fig. 2) ist S die Menge aller vierstelligen binären Zahlen. Die Ziffern eines Punktes s nennen wir Z_1, Z_2, Z_3, Z_4. Die sind zufällige Variable, die nur die beiden Werte 0 und 1 annehmen können. Solche Funktionen heissen Indikatoren. Sie spielen später eine grosse Rolle. Noch wichtiger ist die Quersummenfunktion $Q=Z_1+Z_2+Z_3+Z_4$. Sie gibt die Anzahl der Erfolge in vier Würfen an. Man betrachtet jetzt Ereignisse wie

$$Z_1=1,\quad Z_1=1 \cap Z_2=0,\quad Z_1=1 \cup Z_2=0,\quad \overline{Z_1=1 \cap Z_2=1},\quad Q=2,\quad Q\leq 3,\quad 1\leq Q<4$$

und lässt die Anzahl ihrer Elemente ermitteln. Das Ereignis $Z_1=1$ ist die Menge aller Punkte (4-stelligen binären Ziffernblöcke), die mit 1 beginnen. Daher ist $n(Z_1=1)=8$. $Q=2$ besteht aus allen Punkten mit der Quersumme 2. Also ist $n(Q=2)=6$. In kurzer Zeit lösen die Schüler Dutzende solcher Aufgaben im Kopf.

Ich bespreche noch einen zweiten Versuch: Ein Würfel wird zweimal geworfen. S besteht hier aus 36 Zahlenpaaren (X,Y) und jedes Ergebnis wird als Gitterpunkt dargestellt (Fig.3). Dann werden Ereignisse definiert und die Anzahl ihrer Elemente bestimmt, z.B.

$$X = 2,\quad X < 3,\quad X = 2 \cup Y = 3,$$
$$X < 5 \cap Y < 5,\quad Y = X + 1,$$
$$Y < X,\quad 4 \leq X + Y \leq 8.$$

Wichtig ist hier die Augensumme $Q=X+Y$ und die Ereignisse $Q=r$ $(r=2,3,4,\ldots,12)$. In der Fig. 3 ist das Ereignis $Q=7$ eingerahmt.

Die Schüler lösen diese Aufgaben mühelos im Kopf. Sie werden mit dem Gitter vertraut. Der Funktionsbegriff wird vorbereitet, Ungleichungen werden geübt, für die Koordinatengeometrie wird Vorarbeit geleistet. Alle Mengenoperationen werden eingeübt. Hier tritt ganz zwanglos der Begriff des Produktes von Mengen auf. Denn der natürliche Stichprobenraum für einen wiederholten Versuch ist ein Mengenprodukt. Z.B. gehört zum einfachen Münzenwurf der Raum $S=\{0,1\}$ und zu 5-fachen Wurf der Produktraum $S\times S\times S\times S\times S = S^5$. Diese letzte Mengenoperation führe ich nicht explizit ein, obwohl dem nichts im Wege steht.

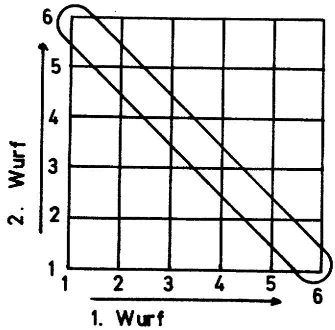


Fig. 3

Welche Punkte haben es leichter zu erscheinen? Die Schüler machen 360 Versuche. Die Ergebnisse werden in der Fig.3 eingetragen. Es zeigt sich, dass die gleiche Aussicht (Chance) besteht, auf irgendeinem der 36 Punkte zu landen. Wenn die Bruchrechnung schon da ist, kann man gleich das Wetten auf das Eintreffen von Ereignissen einführen und die Gewinnchancen ausrechnen lassen.

Ein sehr wichtiger Begriff ist die zufällige ("gerechte") Auswahl eines Elementes aus einer Menge. Die Klasse habe 32 Schüler mit den Nummern 0,1,2,...,31. Jeder kennt seine Nummer. Der Lehrer hat eine Tafel Schokolade in der Hand, die verlost werden soll. Wie kann man das gerecht machen? Man lässt eine Münze entscheiden. Es wird ihr eine fünfstellige Stichprobe entnommen, z.B. $01101_2 = 1+4+8=13$. Dies ist die Nummer des glücklichen Gewinners im Zweiersystem. Ist eine Münze unparteiisch? Mit einem Würfel geht die Auswahl schneller. Zwei Würfe genügen, um einen von höchstens 36 Schülern auszuwählen. Deutet man die "6" als

"O", so ergibt ein Doppelwurf eine zweistellige Zahl im Sechsersystem, z.B. 21_6=1+12=13. Ein Schüler der Schule soll ausgelost werden. Darf ich zuerst die Klasse und dann in der Klasse den Schüler auslosen? Nein! Denn die Klassen haben ungleiche Stärke.

Ein Punkt der Tafel soll zufällig ausgewählt werden. Wie macht man das? Zwei Schüler werfen je eine Münze. Es ergeben sich zwei Ziffernfolgen, z.B.

x = 1101010101...

y = 0110000011...

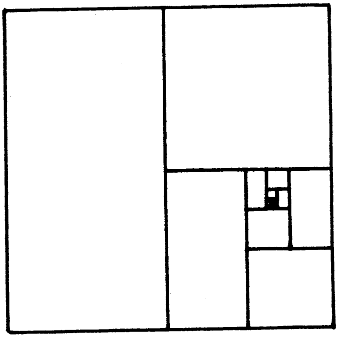


Fig. 4

Da x mit 1 beginnt, wird die linke Hälfte der Tafel ausgeschieden. Die Anfangsziffer 0 bei y bedeutet, dass vom Rest der Tafel die obere Hälfte ausgeschieden wird usw. Die beiden Ziffernfolgen bestimmen die Intervallschachtelung der Fig. 4. Das Zusammenschrumpfen auf einen Punkt ist sehr eindrucksvoll. Wenn die Dezimaldarstellung schon bekannt ist, kann man x und y als binäre Koordinaten des Gitterpunktes (0,1101...|0,0110...) deuten. Um einen Punkt im Zimmer auszuwählen, werden drei Münzen oder Würfel geworfen.

Der Schüler bekommt so ein Gefühl für die Gleichverteilung, und er wird mit Zufallsziffern vertraut. Begriffe wie reelle Zahl und Intervallschachtelung werden vorbereitet. Später wird so die Poisson-Verteilung simuliert. Vor allem aber lernt er: will man eine zufällige Auswahl treffen, dann muss man die Objekte durchnummerieren und die Nummern durch Zufallsziffern auslosen.

Nach diesen Vorbereitungen wird der Schüler in die schwierige Kunst des Zählens eingeführt. Er verwendet dabei zwei einfache Zählprinzipien:

a) Das Zählen erlaubter Wege in gerichteten Graphen (die

Summenregel). Beispiel: Die Fig. 5 stellt ein System von Einbahnstrassen dar. Wieviel Wege führen von S (Start) nach Z (Ziel)? Die Anzahl der möglichen Wege zu den einzelnen Kreuzungen lassen sich rasch ermitteln und in die Figur eintragen. Es sind die Fibonacci-Zahlen.

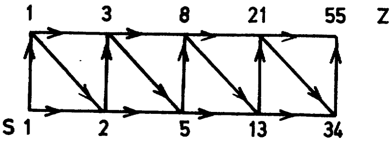


Fig.5. Der Fibonaccigraph

b) Am wichtigsten ist die Grundregel des Zählens (die Produktregel). Gegeben ist ein Versuch. Man möchte die Zahl der möglichen Ausfälle (Versuchsprotokolle) bestimmen. Ein Versuchsprotokoll ist in der Regel eine Zeichenreihe. Wenn man eine Zeichenreihe aufschreibt, muss man eine Folge von Entscheidungen treffen. Für die 1.,2.,..., r. Entscheidung gebe es $n_1, n_2, \ldots, n_r$ Möglichkeiten. Dann gibt es insgesamt $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_r$ verschiedene Versuchsprotokolle.

Diese Regel wird jetzt an zahlreichen Beispielen eingeübt. Insbesondere löst man folgendes Problem: Auf wieviel Arten kann man einer Menge von n Elementen eine geordnete Stichprobe $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ von r Elementen entnehmen? Die Grundregel liefert sofort die Antwort

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Für n=r erhält man die Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen. Die Grundregel berücksichtigt die Reihenfolge der Zeichen.

6. Schuljahr

Man geht jetzt von geordneten zu ungeordneten Stichproben $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ über. Es wird also folgende Aufgabe gelöst: Gegeben ist eine Menge mit n Elementen. Wieviel Teilmengen mit r Elementen hat sie? Die gesuchte Zahl wird $\binom{n}{r}$ bezeichnet. Zur Einführung betrachtet man folgenden Versuch: Eine Münze wird 10mal geworfen. Der Stichprobenraum S ist hier die Menge aller 10-stelligen binären Zahlen. Dieser Versuch lässt sich anschaulich als eine "I r r - f a h r t" im Koordinatengitter deuten. Man startet im Ursprung. Bei 0 (Wappen) geht man einen Schritt nach rechts und bei 1 (Zahl) einen Schritt nach oben. Ein Versuchsergebnis, z.B. s=0010111011 ist dann einfach ein Weg im

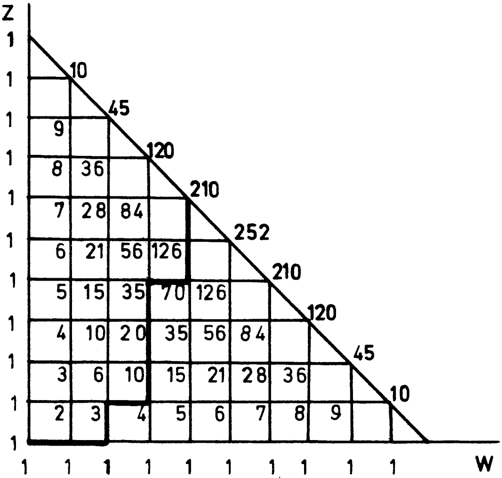


Fig. 6

Gitter, der in (0|0) beginnt und auf der Geraden x+y=10 endet. Die Anzahl der Wege zu den einzelnen Gitterpunkten lässt sich von (0|0) aus leicht auszählen und eintragen. Jede Zahl ist offenbar die Summe aus ihrem linken und unteren Nachbar. Man erkennt das <u>Pascaldreieck</u>. Jetzt wird die Quersummenfunktion Q untersucht. Alle Wege mit gleicher Quersumme enden im gleichen Punkt. Das Ereignis Q=6 besteht z.B. aus allen Wegen von (0|0) nach (4|6). Also ist n(Q=6)=210. Sind alle 2^{10}= 1024 Wege gleichberechtigt? Man lässt die Schüler insgesamt 1024 Versuche machen und erhält die Bestätigung. Die Versuchsprotokolle werden aufbewahrt. Sie enthalten 10 240 binäre Zufallsziffern, die man später dringend braucht. Jeder Schüler muss im Laufe des Jahres ein Heft mit Zufallsziffern füllen.

Jetzt kann die Kombinatorik für die gesamte Schulzeit abgeschlossen werden. Man beweist die Gleichwertigkeit der folgenden vier Probleme:

1) Wieviel Wege führen im Gitter von $(0|0)$ nach $(n-r|r)$?
2) Wieviel n-stellige binäre Ziffernfolgen mit der Quersumme r gibt es?
3) Wieviel Teilmengen mit r Elementen hat eine Menge mit n Elementen? (ungeordnete Stichproben!)
4) Von n Personen sollen r im Zimmer Nr. 1 untergebracht werden und die restlichen $n-r$ im Zimmer Nr. 0. Auf wieviel Arten geht dies?

Mit der Grundregel wird bewiesen, dass die Anzahl der Möglichkeiten jedesmal $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ beträgt. Dieses Ergebnis muss gründlich eingeübt werden.

Sobald die Schüler das Bruchrechnen gelernt haben, wird man mit naiver Wahrscheinlichkeitsrechnung anfangen. Man beschränkt sich auf endliche Probleme, die am Baum und Gitter gelöst werden. Dabei verwendet man die Begriffe Zufallsgrösse und Mittelwert.

1. Beispiel. Panzerschlachten.

Zwei blaue Panzer treffen auf einen roten Panzer. Das nächste Opfer kann dann ein blauer oder ein roter Panzer sein. Die entsprechenden Chancen seien 1/3 und 2/3. Wie gross sind die Siegeschancen der beiden Seiten?

Man zeichnet den Baum aller möglichen Schlachtverläufe mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsbelegung (Fig. 7). Man denkt sich viele solche Schlachten durchgefochten. Welcher Bruchteil B (R) der Schlachten endet mit dem Sieg von Blau (Rot)? Die Anzahl der über-

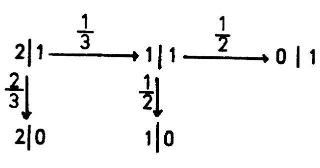


Fig. 7

lebenden Panzer ist eine Zufallsgrösse, welche die Werte 1 und 2 annehmen kann. Welches ist der Mittelwert oder Durchschnittswert $\overline{X}$ dieser zufälligen Variablen? Dem Baum entnimmt man

$$R = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\ , \quad B = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{6}\ , \qquad R + B = 1\ ,$$

$$\overline{X} = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot 2 = 1\frac{2}{3}$$

Jetzt werden 300 bis 400 Schlachten mit dem Würfel durchgefochten und die Ergebnisse mit der Rechnung verglichen. Dann wird der Kampfwert eines roten Panzers auf das 2-, 3- und 4-fache erhöht. Erst dann werden die beiden Seiten annähernd gleichstark (dies ist das bekannte N^2-Gesetz von Lanchester). Nach dem Ende der Schlacht taucht ein zweiter roter Panzer auf. Wie sind jetzt die Siegeschancen? Der Fig. 8 entnimmt man

$$R = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{13}{36}\ .$$

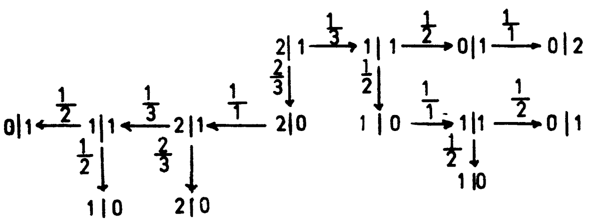


Fig. 8

Man lässt jetzt 4 Panzer gegen 3 oder 2 antreten. Der vollständige Baum bedeckt eine ganze Heftseite und es müssen umfangreiche Bruchrechnungen durchgeführt werden, was ja einer der Hauptzwecke dieser Aufgaben ist. Das nächste Beispiel ist viel anspruchsvoller.

2. Beispiel. Der gestörte Nachrichtenkanal.

Ein sog. binärer symmetrischer Kanal kann die Zeichen 0 und 1 übertragen. Wegen der Anwesenheit von "Geräusch" wird manchmal eine gesendete 0 als 1 empfangen und umgekehrt. Die Fehlerhäufigkeit ist in der Fig. 9 angegeben. Am anderen Ende der Leitung wartet man auf meine Anweisung. Je nachdem ich 0 oder 1 sende, werden zwei verschiedene Entscheidungen getroffen. Eine Fehlentscheidung hat schwerwiegende Folgen. Ich sende daher 00000 statt 0 und 11111 statt 1. Der Empfänger kann dann 32 verschiedene Nachrichten empfangen. Bei der Deutung trifft er eine Mehrheitsentscheidung. a) In wieviel % aller Fälle ist die Entscheidung richtig? b) Die Uebertragung eines Zeichens kostet 1 DM, eine Fehlentscheidung 1 000 DM. Wie oft muss das gesendete Zeichen wiederholt werden, damit auf die Dauer der Verlust am kleinsten wird? Es handelt sich hier um Beispiele zur binomischen Verteilung. Die Uebertragung wird als eine Irrfahrt im Gitter gedeutet. Gedanklich macht die Lösung den Schülern keine Schwierigkeit. Dagegen ist die Rechnung bei b) so umfangreich, dass sie nur in Gemeinschaftsarbeit bewältigt werden kann. Bei a) ergibt sich leicht 94,208%. Für b) lautet die Lösung 15 Zeichen (Tabelle 1).

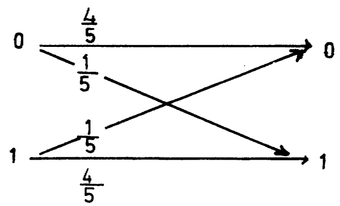


Fig. 9

Anzahl der gesendeten Zeichen	5	7	9	11	13	15	17
Durchschnittlicher Verlust in DM	62,92	40,32	24,75	22,65	20,00	19,24	19,58

7. Schuljahr

Die Monte-Carlo-Methode. Die Monte-Carlo-Methode ist experimentelle Mathematik. Wenn ein Problem für eine rechnerische Lösung zu kompliziert ist, dann wird es simuliert. Durch n Versuche erhält man die Lösung mit einer Genauigkeit von der Grössenordnung $1/\sqrt{n}$. Für die Monte-Carlo-Methode braucht man einen Rechenautomaten und eine Quelle von Zufallsziffern. Der Rechenautomat ist die Klasse selbst. Sie kann oft in 2 bis 3 Minuten 1 000 Versuche anstellen. Damit hat man die gesuchte Zahl auf ca 3% genau. Leider ist die Auswertung der Versuche zeitraubender.

Quellen für Zufallsziffern sind Münze und Würfel, leider im Zweier- und Sechsersystem. Die Schüler haben schon einen grossen Vorrat dieser Ziffern gesammelt. Jetzt werden sie genauer untersucht. Die Schüler müssen zwei Dinge erkennen:

a) Alle Ziffern kommen ungefähr gleich oft vor.

b) Alle Ziffernblöcke gleicher Länge kommen ebenfalls ungefähr gleich oft vor.

Um lästige Umrechnungen zu vermeiden, legen sich die Schüler noch eine Tafel im Zehnersystem an. Nebenbei bemerkt gibt es keine mathematischen oder physikalischen Vorrichtungen, die Zufallsziffern erzeugen. Mit diesen Zufallsziffern werden zahlreiche Probleme experimentell gelöst. Der grösste Teil der Probleme wird auch rechnerisch behandelt (teils vor, teils nach dem Experiment). Theorie und Erfahrung werden miteinander verglichen. Der Begriff der zufälligen Variablen, ihres Mittelwertes und ihrer Verteilung nimmt jetzt eine zentrale Stellung ein. Im ersten Halbjahr studiert man einfache endliche Probleme. Sobald die Schüler lineare Gleichungen mit einer Unbekannten lösen können, geht man zu abzählbaren Stichprobenräumen über.

1. Beispiel. (Hier wird die rechnerische Lösung nicht versucht.)

In einen kleinen Hafen sind in 100 Tagen 300 Lastschiffe eingelaufen. Auf die Rückseite der Tafel schreibe ich die Anzahl der Tage, an denen 0,1,2,3,4,5,6,7,8,... Schiffe angekommen sind. Dann werden die Schüler aufgefordert herauszufinden, was auf der Rückseite der Tafel steht. Das Einlaufen der Schiffe wird simuliert und das Ergebnis mit den beobachteten Zahlen verglichen. Geleitzüge sind in Friedenszeiten nicht üblich. Ankünfte der Schiffe aus verschiedenen Häfen sind praktisch unabhangig voneinander. Daher nimmt man an, dass die Schiffe zufällig ankommen. Man verwendet die Tafel mit Zufallsziffern zweistellig und entnimmt ihr 300 Ziffernpaare, welche die Nummern der Tage angeben, an denen das betreffende Schiff ankam. Die beobachteten Werte und die durch Simulieren gewonnenen Werte stimmen in der Regel ausgezeichnet überein.

2. Beispiel. Ein Spiel.

In der Fig. 10 steht auf dem Feld 1 ein Spielstein. Bei "Zahl" darf er ein Feld vorrücken und bei "Wappen" muss er sofort nach dem Feld Nr. 1 zurück. Wieviel Würfe braucht man im Mittel, um das Feld Nr. 5 zu erreichen?

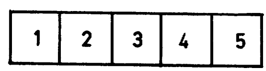


Fig. 10

Für den gesuchten Mittelwert x entnimmt man dem Baum (Fig. 11) die Gleichung

$$x = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+2) + \frac{1}{8}(x+3) + \frac{1}{16}(x+4) + \frac{1}{16}\cdot 4$$

$$x = 30.$$

Solche Aufgaben kann man sich in beliebigen Mengen und in faszinierender Vielfalt ausdenken. Sie können viele geistlose Textaufgaben ersetzen, die auf Gleichungen führen.

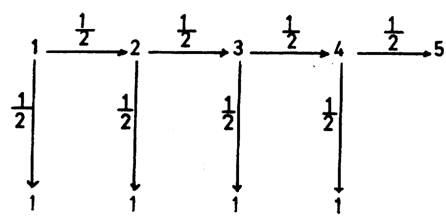


Fig. 11

3. Beispiel. Irrfahrten von Käfern auf regulären Körpern und von Ratten in Labyrinthen.

Ein Käfer "irrt" auf den Kanten eines Würfels. Um eine Kante zurückzulegen, braucht er eine Minute. Wenn er an eine Ecke kommt, dann wählt er auf gut Glück eine der von dieser Ecke ausgehenden Kanten und kriecht auf ihr weiter. Er startet in S. In Z ist eine Absaugvorricht angebracht. Sobald er nach Z kommt, wird er "absorbiert" und gilt als tot. Wir möchten gerne wissen, wie lange der Käfer lebt. Aber die Lebensdauer **X** des Käfers ist eine zufällige Variable, welche die Werte $3,5,7,\dots,2n+1,\dots$ Minuten annehmen kann. Wie häufig nimmt die Grösse X ihre möglichen Werte an? Welchen Wert nimmt X im Mittel an? Die Schüler machen daheim 1 000 Versuche. Sie legen auf den Punkt S eine Münze (Käfer). Dann erzeugen sie mit dem Würfel einen "Ziffernwurm", oder sie entnehmen ihn einem Heft mit Zufallsziffern. Diese Ziffern dirigieren den Käfer nach Z. Die Kan-

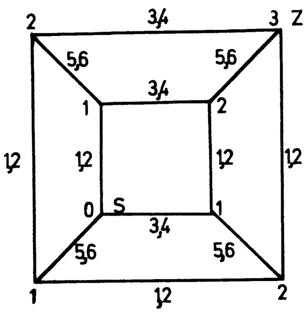


Fig. 12

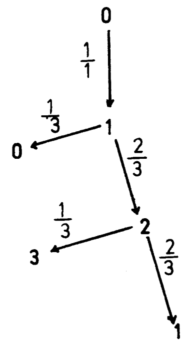


Fig. 13

ten in der Fig. 12 sind beziffert. An jeder Ecke entscheidet der Würfel auf welcher Kante es weitergeht. In der nächsten Stunde geht eine Liste um, in der die Schüler ihre Ergebnisse eintragen. Gleichzeitig wird das Problem rechnerisch behandelt. Die acht möglichen Zustände des Käfers werden in vier Klassen eingeteilt, je nach dem Abstand von S. Die durchschnittliche Lebensdauer in 0 sei x. Im Zustand 1 ist sie dann x-1. Dem Baum der Fig. 13 entnimmt man die Gleichung $x = \frac{1}{3}(2+x) + \frac{4}{9}(3+x-1) + \frac{2}{9}\cdot 3$

mit der Lösung x = 10. Die theoretische Häufigkeitsverteilung der Zufallsgrösse X ergibt sich leicht aus der Fig. 14. Es ist

$$P(X=2n+1) = \frac{2}{7}\left(\frac{7}{9}\right)^n ,$$

$n = 1,2,3,...$

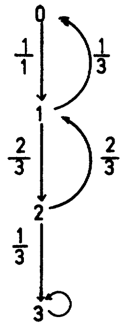


Fig. 14

Jetzt werden die Versuchsergebnisse der Schüler mit den theoretischen Werten verglichen. Die Uebereinstimmung ist in der Regel gut. Die Tabelle 2 zeigt die Ergebnisse eines Schülerversuchs.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	>10
Beobachtete Häufigkeit von X=2n+1	225	167	140	99	71	58	42	49	34	27	88
theoretische Häufigkeit $\frac{2}{7}\left(\frac{7}{9}\right)^n.1000$	222	173	135	105	82	63	49	38	30	23	81

Tabelle 2

Die mittlere Schrittzahl betrug in diesem Fall 10,12.

4. Beispiel. Die Qualitätskontrolle. Der Folgetest von A. Wald. Dies ist ein sehr inhaltsreiches Beispiel, das eine Vielzahl wichtiger Deutungen zulässt. Seine vollständige Erledigung gelingt erst im 10. und 11. Schuljahr.

Eine Fabrik stellt zwei Arten von Urnen her:

a) Weisse Urnen. Sie enthalten 3 weisse und 1 schwarze Kugel.

b) Schwarze Urnen. Sie enthalten 3 schwarze und eine weisse Kugel.

Jede Urne hat oben ein Fenster, in dem bei Schütteln genau eine Kugel sichtbar wird (Ziehen einer Kugel mit Zurücklegen!). Beim Sortieren der Urnen macht man eine Folge von Ziehungen. In Fig. 16 geht man bei einer schwarzen

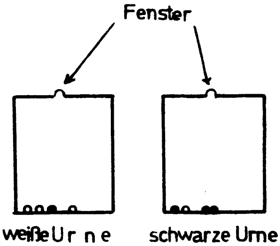


Fig. 15

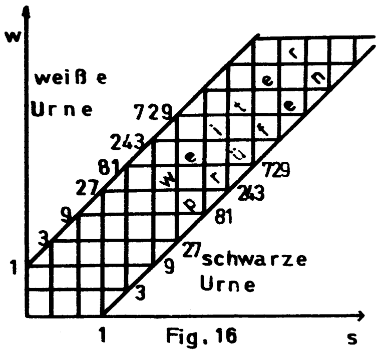


Fig. 16

Kugel einen Schritt nach rechts und bei einer weissen einen Schritt nach oben. Sobald man bei dieser Irrfahrt auf die Gerade $y=x+3$ ($y=x-3$) stösst, wird die Prüfung abgebrochen und die Urne als weiss (schwarz) deklariert. Wieviel % der Urnen werden falsch sortiert?

Lösung.

Wir betrachten weisse Urnen. Die Gitterlinien werden als ein Röhrensystem gedeutet, durch welches Urnen strömen. An jeder Kreuzung gehen rund 3/4 nach oben und 1/4 nach rechts. In einem oberen Punkt kommen daher immer 27 mal mehr Urnen an, als im entsprechenden unteren Punkt. Deshalb werden 1/28 = 3,57% aller Urnen falsch sortiert. Die Prüfdauer X einer Urne ist eine zufällige Variable, welche die Werte 3,5,7,... annehmen kann. Die Verteilung von X lässt sich leicht ermitteln. Es ist

$$P(X=2n+1) = \frac{7}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \qquad n=1,\ 2,3,\ldots$$

Die Schüler sind vor allem besorgt, dass eine Prüfung kein Ende findet. Diese Besorgnis lässt sich an Hand der Verteilung leicht zerstreuen. Lange Prüfzeiten kommen sehr selten vor. Die mittlere Prüfdauer $5\frac{4}{7}$ können die Schüler noch nicht berechnen, da sie Gleichungen mit mehreren Unbekannten noch nicht lösen können.

Daneben laufen ununterbrochen statistische Erhebungen. Die Schüler studieren die Statistik der Unfälle, Geburten, Todesfälle, Selbstmorde, die Herkunftsorte der Münzen, die Verteilung der Geburtstage auf die einzelnen Monate. Ist die Selbstmordrate vom Luftdruck abhängig? Jeder Schüler zählt den Anteil der VW unter 100 Autos. Individuell schwanken die Prozentsätze stark. Dann lässt man je 2,4,8,16,32 Schüler ihre Werte zusammenfassen. Die Schwankungen nehmen ab. Die Mittelwerte stabilisieren sich.

In den Beispielen Nr. 2,3,4 handelt es sich um Versuche mit unendlichen Stichprobenräumen. Bei der Berechnung der Mittelwerte haben wir auf listige Art unendliche Reihen summiert, bei der Käferaufgabe z.B.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\frac{2}{7}\left(\frac{7}{9}\right)^n = 10$$

Das Verfahren klappt nur, wenn die Reihen konvergieren. Man kann jetzt den Schülern unendliche Stichprobenräume verleiden, indem man sie mit Zufallsgrössen konfrontiert, die keinen Mittelwert besitzen. Die Schockwirkung, die von diesem Erlebnis ausgeht, macht sie dann reif für einen exakten Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie. Sie sind dann auch bereit, sich auf endliche Räume zu beschränken, wo es keine böse Ueberraschungen gibt.

Beispiel. Die "Paradoxie" von Petersburg.

Bei einer Spielbank darf man eine Münze werfen. Wenn "Zahl" zum ersten Mal beim 1., 2., 3., ... Wurf erscheint, gewinnt man 2, 2^2, 2^3,... DM. Wie gross ist der mittlere Gewinn je Spiel?

Die Klasse macht ein Experiment. Jeder spielt einmal und notiert seinen Gewinn. Es ergibt sich der Mittelwert 10,84 DM. Man lässt das Spiel wiederholen. Der neue Mittelwert ist 15,35 DM. Die ungewöhnliche Schwankung überrascht. Dann macht jeder 10 Spiele. Der Mittelwert für die Klasse ist

78,03 DM, eine gewaltige Ueberraschung. Die Sache wird unheimlich. Hausaufgabe: Jeder macht daheim soviel Spiele wie er kann. In der nächsten Stunde wird der Mittelwert ausgerechnet: 5 175,50 DM. Einigen beginnt es zu dämmern. Der Mittelwert stabilisiert sich nicht. Er läuft davon. Wohin? Die Rechnung führt für den Mittelwert x auf die Gleichung

$$x = \tfrac{1}{2}.2 + \tfrac{1}{2}.2x \quad \text{oder } x = 1+x,$$

welche keine Lösung besitzt. Der Mittelwert existiert nicht! Was heisst das? Jetzt wird gezeigt, dass der Mittelwert unendlich ist. Das schnelle Wachsen der Mittelwerte überrascht auch den Lehrer. Aber nicht alle Münzen sind gut.

Wir fassen zusammen: Ein propädeutischer Kurs ist unerlässlich! Die Schüler lernen dabei die Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie. Sie sammeln Erfahrungen im Bereich der zufälligen Erscheinungen, von denen die Wahrscheinlichkeitstheorie ein mathematisches Modell darstellt. Durch Beschränkung auf konkrete Zahlenbeispiele gelingt es mit geringsten Mitteln sehr tief in die Wahrscheinlichkeitstheorie einzudringen. Die Schüler sind stark interessiert. Der ganze Stoff passt gut in den Rechen- und Algebraunterricht des 5. bis 7. Schuljahres, so dass keine Zeit verloren geht. Vom 8. Schuljahr an kann man dann die WT endlicher Räume vollkommen exakt aufbauen. Dieser Aufbau gipfelt im Beweis des schwachen Gesetzes der grossen Zahlen (10. Schuljahr). Im 11. Schuljahr geht man zu abzählbaren Räumen über und behandelt u.a. Markow-Ketten und die Poisson-Verteilung. Auf die weitere Entwicklung sowie auf den Einbau der Statistik wollen wir hier nicht eingehen.