KLASSENZAHLEN EINIGER TOTALDEFINITER KLASSISCHER GRUPPEN ÜBER ZAHLKÖRPERN

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität in Göttingen

vorgelegt von

Ulf Rehmann

aus Berlin

Göttingen 1971

D 7

Referent: Prof. Dr. Martin Kneser

Korreferent: Prof. Dr. Max Deuring

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Juli 1971

Inhalt

Einleitung

Die Frage nach der Klassenzahl einer ganzzahligen quadratischen Form über einem algebraischen Zahlkörper K läßt sich deuten als Frage nach der Anzahl gewisser zweiseitiger Nebenklassen in der Adelgruppe der zugehörigen orthogonalen Gruppe, und in dieser Form gestattet das Problem die Übertragung auf eine beliebige, über K definierte, lineare algebraische Gruppe G. Ist nämlich für einen K-Vektorraum W die Gruppe G enthalten in der allgemeinen linearen Gruppe von W, so operiert die Adelgruppe G_A von G in einer in § 1 näher beschriebenen Weise auf der Menge der Gitter in W. Die Bahn eines Gitters M unter G_A heißt das G-Geschlecht von M, die Bahn unter der Gruppe G_K der K-rationalen Punkte (die man sich diagonal in G_A eingebettet zu denken hat) ist die G-Klasse von M. Bezeichnet g_M die Fixgruppe von M in G_A, so ist also die Anzahl der G-Klassen im G-Geschlecht von M gleich der Anzahl der Doppelnebenklassen $g_M x G_K$ in G_A. Mit den Definitionen in § 1 läßt sich leicht sehen, daß im Fall, daß W ein quadratischer Vektorraum und M ein ganzes Gitter hierin ist, diese Geschlechts- und Klassenbegriffe mit den klassischen der durch M repräsentierten quadratischen Form zusammenfallen, und Entsprechendes gilt auch für HERMITEsche Formen. (Ein anderes Beispiel mit klassischer Bedeutung erhält man, wenn man für G einen K-trivialen algebraischen K-Torus vom Rang 1 (d.h. die multiplikative Gruppe von K) und W = K wählt. Dann ist die G-Klassenzahl im Geschlecht des Ganzheitsringes von K gerade die Idealklassenzahl von K.)
Allgemein ist bekannt, daß ein G-Geschlecht nur endlich viele G-Klassen enthält [2].
Im Fall halbeinfacher Gruppen erhält man Aussagen über die Anzahlen solcher Klassen beispielsweise aus dem starken Approximationssatz, jedoch

nur unter der Voraussetzung, daß G an einer unendlichen Primstelle nicht kompakt ist (dem entspricht im orthogonalen Fall eine indefinite Form). Dies ist beispielsweise in der Arbeit "Strong Approximation" von KNESER (Proc. of Symp. in Pure Math. Vol. IX (Boulder), Providence, R. I. (1966)) ausgeführt (für den orthogonalen Fall auch in [8]).
Insbesondere zeigt sich, daß für einfach zusammenhängende Gruppen die Klassenzahl stets 1 ist, falls der starke Approximationssatz gilt. Ist G halbeinfach und an allen unendlichen Primstellen kompakt - wir sprechen hier dann in Anlehnung an die Bezeichnungen bei quadratischen Formen von totaldefiniten Gruppen; K ist in diesem Fall notwendigerweise totalreell - so scheint die Situation gänzlich anders zu sein, wie man bereits aus Untersuchungen über quadratische Formen weiß [13] und wie in dieser Arbeit für totaldefinite Spin- und spezielle unitäre Gruppen gezeigt wird. Satz 1 (p. 11) besagt, daß die Klassenzahlen von Spingruppen fast aller Ähnlichkeitsklassen totaldefiniter quadratischer Räume (der Dimension ≥ 3) unabhängig vom Körper größer sind als jede endliche Zahl, und eine ähnliche, obwohl nicht ganz so scharfe Aussage macht Satz 3 (p. 37) für spezielle unitäre Gruppen.
Die Beweise werden stets mit Hilfe einer der MINKOWSKI-SIEGELschen Maßformel für quadratische Formen analogen Formel geführt, die man bekanntlich aus der Kenntnis der TAMAGAWAzahl der Gruppe ableiten kann. Dieser Zusammenhang wird in § 1 erläutert. Das Ergebnis über die Spingruppen wird dann bewiesen, indem ein Zusammenhang zwischen den Maßformeln isogener Gruppen hergeleitet wird (§ 2), der es zusammen mit einem Hilfssatz über lokale Spinornormen erlaubt, die entsprechenden Abschätzungen für die Klassenzahlen orthogonaler Gruppen in [13] anzuwenden. Dort werden die Schranken für die Klassenzahlen direkt durch Berechnen bzw. Abschätzen der in der SIEGELschen Maßformel auftretenden lokalen Darstellungsmaße ermittelt, und ganz analog gehen wir auch im zweiten Teil

dieser Arbeit bei der Behandlung der speziellen unitären Gruppe vor. (Daß das Ergebnis in Satz 3 schwächer als das entsprechende in [13] ist, liegt daran, daß hier die lokalen Darstellungsmaße der geraden Primstellen nur sehr grob abgeschätzt werden (p. 33), da genauere Untersuchungen wegen der komplizierten Verzweigungsarithmetik des quadratischen Erweiterungskörpers von K umfangreiche Rechnungen erfordern.)

Die im ersten Teil bewiesene Beziehung der Maßformeln isogener Gruppen erlaubt noch eine Aussage über die Klassenzahl von Spinorgeschlechtern totaldefiniter quadratischer Gitter (Satz 2, p. 17), die in § 3 bewiesen wird. Während auch hier wieder für den indefiniten Fall nach einem Satz von EICHLER [6] gilt, daß jedes Spinorgeschlecht einklassig ist, sagt Satz 2 für den definiten Fall, daß über einem gegebenen Zahlkörper immer nur die Gitter endlich vieler Ähnlichkeitsklassen Spinorgeschlechter beschränkter Klassenzahl haben. Darüberhinaus wird eine Aussage über die Abhängigkeit vom Körper gemacht.

Herrn Professor Dr. M. Kneser danke ich für die Anregung und ständige Förderung dieser Arbeit.

Bezeichnungen:

$\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen,

$\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen.

K ist stets ein algebraischer Zahlkörper, hierzu sei

n der Grad über $\mathbb{Q}$,

d die Diskriminante über $\mathbb{Q}$,

$\mathfrak{o}$ der Ganzheitsring,

$\mathfrak{N}$ die Absolutnorm,

V die Primstellenmenge,

P die Menge der endlichen,

∞ die Menge der unendlichen Primstellen und

A der Adelring.

Elemente aus V werden meist mit v bezeichnet. Zu $v \in V$ sei

$| \ |_v$ die zugehörige Bewertung in der üblichen Normierung,

K_v die Komplettierung von K bei v,

$\mathfrak{o}_v$ der Ganzheitsring von K_v, falls $v \in P$, und $\mathfrak{o}_v = K_v$, falls $v \in \infty$;

zu $v \in P$ sei

$\mathfrak{N}v$ die Elementezahl des Restklassenkörpers bei v,

ord_v die exponentielle Bewertung von K_v und

$\mathfrak{p}_v$ das Primideal in $\mathfrak{o}_v$. Schließlich sei noch

$A_\infty := \prod_{v \in V} \mathfrak{o}_v$ definiert.

Ist M eine Menge, so sei $[M]$ die Kardinalzahl von M. Den Index einer Untergruppe H in einer Gruppe G bezeichne $[G:H]$.

Für einen beliebigen Ring R sei R^* die Gruppe der Einheiten von R.

Ist G eine K-definierte algebraische Matrizengruppe und R ein Unterring eines Erweiterungskörpers von K, so sei G_R oder G(R) die Menge der Punkte von G mit Koordinaten in R, für $v \in P$ ist G^v die Reduktion von G modulo $\mathfrak{p}_v$.

Weiter bezeichnet $H^1(K,G)$ die i-te Galoiskohomologiemenge von G bezüglich dem algebraischen Abschluß von K.

I. Teil: Klassenzahlen von Spingruppen totaldefiniter quadratischer Formen über totalreellen algebraischen Zahlkörpern

§ 1. Die Maßformel totaldefiniter halbeinfacher algebraischer Gruppen

G sei eine affine algebraische Matrizengruppe über K vom Grade r. Ist $x=(x_v)_{v\in V}\in G_A$ und M ein $\mathfrak{o}$-Gitter in K^r, so ist ebenfalls

$$Mx := \bigcap_{v\in P} M_v x_v$$

(wo M_v das in K_v^r von M erzeugte Gitter ist) ein $\mathfrak{o}$-Gitter in K^r, und auf diese Weise operiert G_A auf der Menge der $\mathfrak{o}$-Gitter in K^r. G_{A_∞} ist die Fixgruppe des Gitters $\mathfrak{o}^r$ in K^r, und wir bemerken, daß die Fixgruppe eines jeden $\mathfrak{o}$-Gitters in K^r mit G_{A_∞} kommensurabel ist [2, § 8.7].
Mit C(G) bezeichnen wir die Menge aller Untergruppen g von G_A von der Form

$$g = \prod_{v\in V} g_v$$

(mit $g_v = G_{K_v}$ für $v\in\infty$, $g_v \subseteq G_{K_v}$ für $v\in P$), welche mit G_{A_∞} kommensurabel sind.
Nach [2, Th. 5.1] gestattet die Adelgruppe G_A die endliche Zerlegung

$$G_A = \bigcup_{i\in I} G_{A_\infty} x_i G_K$$

($x_i \in G_A$ für $i\in I$, I endlich) in disjunkte Doppelnebenklassen; nach den obigen Bemerkungen hat man daher für jedes $g\in C(G)$ eine analoge Zerlegung

$$G_A = \bigcup_{i=1}^{h} g x_i G_K .$$

h = h(g,G) heißt die Klassenzahl von G bezüglich g.
In Anlehnung an die analoge Bezeichnung bei quadratischen Formen nennen wir eine halbeinfache algebraische K-Gruppe totaldefinit, wenn $G_\infty = \prod_{v\in\infty} G_{K_v}$ kompakt ist. Totaldefinite K-Gruppen gibt es also offenbar nur über totalreellen Zahlkörpern, und diese Eigenschaft ist äquivalent mit der Kompaktheit einer und damit aller Gruppen aus C(G). - G sei im Folgenden stets totaldefinit.

Für die im weiteren verwandten Bezeichnungen sei auf [17, chap. II] verwiesen.

ω sei eine linksinvariante Eichform auf G mit lokalen (linksinvarianten) HAARschen Maßen ω_v. Da G halbeinfach ist, zeigt [12, Lemma 1.1.1], daß $\{\lambda_v = 1 \mid v \in V\}$ ein System konvergenzerzeugender Faktoren für G ist. Das durch ω und dies System fixierte TAMAGAWAmaß von G bezeichnen wir mit Ω. Ω definiert ein linksinvariantes Maß τ auf G_A/G_K.

G_K ist diskrete, also abgeschlossene Untergruppe von G_A, jedes $g \in C(G)$ ist offen in G_A. Mithin ist die Isomorphie

$$gG_K/G_K \cong g/G_K \cap g$$

homogener Räume sogar eine Homöomorphie, und das Maß τ läßt sich kanonisch übertragen. $G_K \cap g$ ist als diskrete Untergruppe einer kompakten Gruppe endlich, und da G als halbeinfache K-Gruppe unimodular ist, erhalten wir für das Maß des homogenen Raumes

$$\tau(G_A/G_K) = \sum_{i=1}^{h} \tau(gx_iG_K/G_K) = \Omega(g) \sum_{i=1}^{h} [x_i^{-1}gx_i \cap G_K]^{-1} .$$

Diese Zahl ist die TAMAGAWAzahl $\tau(G)$ der Gruppe G [17, chap. II].

Die von der Auswahl der x_i unabhängige Zahl

$$(1.1) \qquad M(G,g) := \sum_{i=1}^{h} [x_i^{-1}gx_i \cap G_K]^{-1} = \frac{\tau(G)}{\Omega(g)}$$

liefert offenbar eine untere Schranke für die Zahl $h = h(G,g)$.

Die Formel (1.1) wird als Maßformel, die Zahl $M(G,g)$ als Maß von G bezüglich g bezeichnet.

§ 2. Klassenzahlen der Spingruppen totaldefiniter quadratischer Formen

Zunächst wird ein Zusammenhang zwischen Maßen isogener Gruppen bewiesen:

<u>Hilfssatz 2.1:</u> Ist $f : G \to G'$ eine Isogenie totaldefiniter halbeinfacher K-Matrizengruppen, und gilt für $g \in C(G)$, $g' \in C(G')$

$$f_A(g) \subseteq g',$$

so ist

$$\frac{M(G,g)}{\tau(G)} = \prod_{v \in V} c_v(f,g,g') \frac{M(G',g')}{\tau(G')},$$

wobei

$$c_v(f,g,g') := \left[(\mathrm{Ker}\ f)_{K_v} \cap g_v\right]^{-1}\left[g'_v : f_{K_v}(g_v)\right]$$

für $v \in V$ ist.

<u>Beweis:</u> Die in der Definition von $c_v(f,g,g')$ auftretenden Gruppenindizes sind endlich, denn es ist $\left[G'_{K_v} : f_{K_v}(G_{K_v})\right] \leq \left[H^1(K_v, \mathrm{Ker}\ f)\right] < \infty$ für $v \in \infty$, und für alle $v \in V$ ist f_{K_v} als analytische Submersion offen [14, part II, chap. III, §11], mithin ist $f_{K_v}(G_{\mathfrak{o}_v}) \cap G'_{\mathfrak{o}_v}$ offen und, da $G'_{\mathfrak{o}_v}$ nach [14, part II, chap. IV, §9] projektiver Limes von p-Gruppen (p ist die Charakteristik des Restklassenkörpers bei v) ist, von endlichem Index in $G'_{\mathfrak{o}_v}$. Da g_v und g'_v kommensurabel mit $G_{\mathfrak{o}_v}$ bzw. $G'_{\mathfrak{o}_v}$ sind ($v \in P$), folgt damit auch die Endlichkeit von $\left[g'_v : f_{K_v}(g_v)\right]$.

Weiter ist für fast alle $v \in P$ sowohl $g_v = G_{\mathfrak{o}_v}$ als auch $g'_v = G'_{\mathfrak{o}_v}$, und damit läßt sich für fast alle $v \in P$

$$\omega_v(g_v) = \omega'_v(g'_v)$$

für linksinvariante Eichformen ω, ω' auf G bzw. G' zeigen. Denn für fast alle $v \in P$ existieren die Reduktionen G^v, $(G')^v$ von G, G' modulo $\mathfrak{p}_v$ und sind halbeinfache, isogene Gruppen über dem Restklassenkörper bei v, und nach [17, Th. 2.2.5] ist für fast alle $v \in P$

$$\omega_v(G_{\mathfrak{o}_v}) = \mathfrak{N}v^{-\dim G}\left[G^v(\mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v)\right], \quad \omega'_v(G'_{\mathfrak{o}_v}) = \mathfrak{N}v^{-\dim G'}\left[(G')^v(\mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v)\right].$$

Nach [10] ist $\left[G^v(\mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v)\right] = \left[(G')^v(\mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v)\right]$. Wegen $\dim G = \dim G'$ folgt damit die obige Gleichung.

Weiter sind invariante Eichformen auf halbeinfachen Gruppen bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt, mithin sind die zu ω, ω' gehörigen TAMAGAWAmaße nach [17, Th. 2.3.1] von der speziellen Wahl von ω, ω' unabhängig. Da, wie man leicht sieht, $f^*(\omega')$ invariante Eichform auf G ist, wenn ω' eine solche auf G' ist, setzen wir $\omega = f^*(\omega')$ und haben

$$\omega'_v\,(g'_v) = c_v(f,g,g')\,\omega_v(g_v) \qquad (v \in V).$$

Hieraus folgt die Behauptung des Hilfssatzes sofort unter Benutzung der Maßformel (1.1) für G und G'.

Sei nun W ein nicht entarteter quadratischer Vektorraum über K mit $3 \leq \dim_K W < \infty$ und der quadratischen Form $q : W \to K$, sei

$$(x,y) = \tfrac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)] \quad (x,\ y \in W)$$

die zugehörige Bilinearform und SO_q die spezielle orthogonale Gruppe von q. Dann gilt für $v \in P$:

<u>Hilfssatz 2.2:</u> Das Bild einer maximalen kompakten Untergruppe g von $SO_q(K_v)$ unter der Spinornorm θ umfaßt die Gruppe $\mathfrak{o}_v^* K_v^{*2}/K_v^{*2}$.

<u>Beweis:</u> Wir zeigen: $W_v = W \otimes_K K_v$ enthält ein $\mathfrak{o}_v$-Gitter L mit den Eigenschaften

i) $g = SO_q(L)$ (= Einheitengruppe von L geschnitten mit $SO_q(K_v)$),

ii) L besitzt eine orthogonale Zerlegung $L = M \perp N$ mit unimodularem M und $\mathfrak{p}_v$-modularem N.

Hieraus folgt die Behauptung für den Fall $v \nmid 2$ allgemein: Es ist nämlich entweder der Rang von M oder der Rang von N größer als 1, und [11, 92:5] liefert das Gewünschte. Im Fall $v | 2$ kann man analog mit [11,Ex. 93:20] für $\dim_K W \geq 5$ schließen, für $\dim_K W = 3, 4$ benötigt man jedoch die im folgenden bewiesenen Hilfssätze, aus denen die Behauptung auch für höhere Dimensionen folgt.

Wir konstruieren also das Gitter L. (Für die Definitionen der dabei benutzten Begriffe und Symbole verweisen wir auf [11, chap. VIII, IX].)

Zunächst ist klar, daß ein Gitter L_o in W_v existiert mit $g \subsetneq SO_q(L_o)$, und wegen der Maximalität von g gilt sogar $g = SO_q(L_o)$. Weiter kann offenbar sogar $(L_o,L_o) \subseteq \mathfrak{o}_v$ (d.h. L_o ganz) angenommen werden.

Nun sei $L_o = \perp_{i=1}^{t} L_{o,i}$ eine modulare Zerlegung von L_o mit $sL_{o,i} = \mathfrak{p}_v^{s_i}$ ($s_i < s_{i+1}$ für $i=1,\dots,t-1$). Ist $s_t \leq 1$, so ist bereits L_o ein Gitter mit i), ii). Falls $s_t \geq 2$ ist, sei k die kleinste Zahl, so daß $s_k \geq 2$.

Wir werden aus L_o ein Gitter L_1 konstruieren, das die Eigenschaft i) hat und bei dem die Summe der uni- und $\mathfrak{p}_v$-modularen Komponenten von größerer Dimension ist als in L_o. Wir setzen

$$L_1' := (\mathfrak{p}_v^{-[s_k/2]} L_o) \cap L_o^{\#}.$$

(Hierin ist $[s_k/2]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als $s_k/2$ ist.)

L_1' ist orthogonale Summe der modularen Teilgitter

$$(\mathfrak{p}_v^{-[s_k/2]} L_{o,i}) \cap L_{o,i}^{\#},$$

die für $i \geq k$ den Teiler

$$\mathfrak{p}_v^{s_i - 2[s_k/2]}$$

und, falls es das gibt, für $i < k$ den Teiler $\mathfrak{p}_v^{\varsigma}$ mit $\varsigma = 0$ oder $\varsigma = -1$ haben. Im Gitter

$$L_1 := L_1' \cap (L_1')^{\#}$$

ist daher (wegen $0 \leq s_k - 2[s_k/2] \leq 1$) die Dimension der Summe der uni- und $\mathfrak{p}_v$-modularen Komponenten um wenigstens den Rang des Gitters $L_{o,k}$ größer als im Gitter L_o.

Evidenterweise ist aber auch $SO_q(L_1) = SO_q(L_1') = SO_q(L_o) = g$.

Durch fortgesetztes Wiederholen der beschriebenen Konstruktion gelangt man offensichtlich nach höchstens t Schritten zu einem Gitter L mit i), ii).

Wir haben den Beweis von Hilfssatz 2.2 noch für den Fall $v|2$ zu komplettieren:

Dazu können wir zunächst ohne Einschränkung annehmen, daß die unimodulare Komponente von L wenigstens den Rang 2 hat. Denn ist dies nicht der Fall, betrachten wir stattdessen das Gitter $L^{\#}$ und multiplizieren hier die Form mit einem Primelement aus $\mathfrak{p}_v$. Dies ändert an den auftretenden Gruppen nichts, und die Spinornorm von Elementen aus $SO_q(K_v)$ ändert sich ebenfalls nicht.

Wir haben also eine orthogonale Zerlegung $L = N \perp N^{\perp}$ mit unimodularem binärem N, und es bedeutet offenbar ebenfalls keine Einschränkung, wenn man $N^{\perp}$ als modular, $1 \leq \mathrm{rg}\, N^{\perp} \leq 2$ und $sN^{\perp} = \mathfrak{p}_v^{\varepsilon}$ mit $\varepsilon = 0, 1$ annimmt.

Wir wählen eine Basis x, y von N mit $(x,y) = 1$, $\xi = (x,x)$, $\eta = (y,y)$ und formulieren mit diesen Bezeichnungen

<u>Hilfssatz 2.2':</u> Ist $\xi = 2\xi_0$ mit $\xi_0 \in \mathfrak{o}_v$, so ist für die Gültigkeit der Behauptung in Hilfssatz 2.2 hinreichend, daß 2 Teiler von η ist oder ein $z \in N^{\perp}$ existiert, so daß $\mathrm{ord}_v(\eta\,(z,z))$ ungerade und $\mathrm{ord}_v(z,z) < \mathrm{ord}_v \eta$ ist.

Daß man sich in unserem Fall stets auf diese Situation zurückziehen kann, sieht man mit

<u>Hilfssatz 2.2":</u> Zu $z = x$ oder $z \in N^{\perp}$, primitiv, gebe es eine ganz-rationale Zahl $r \geq 0$ mit $\mathrm{ord}_v(z,z) + 2r = \mathrm{ord}_v \eta$. Dann gibt es $y_1 \in M$ (im Fall $z = x$ sogar $y_1 \in N$), so daß - mit $\eta_1 = (y_1,y_1)$ - gilt: $\mathrm{ord}_v \eta_1 \geq \min\{\mathrm{ord}_v 2,\ 1 + \mathrm{ord}_v \eta\}$, $(x,y_1) = 1$. Weiter gibt es ein primitives $z_1 \in M$ mit $(x,z_1) = (y_1,z_1) = 0$ und $\mathrm{ord}_v(z_1,z_1) = \mathrm{ord}_v(z,z)$, falls $z \in N^{\perp}$.

Denn ist etwa 2 Teiler von ξ und gibt es ein $z \in N^{\perp}$ wie in Hilfssatz 2.2", so kann man durch wiederholte Anwendung dieses Satzes zu einer Zerlegung gelangen, so daß die Voraussetzungen von Hilfssatz 2.2' erfüllt sind.

Ist 2 weder Teiler von ξ noch von η, so konstruiert man mit fortgesetzter Anwendung von Hilfssatz 2.2" - indem man $z = x$ oder $z = y$ setzt - eine Basis x_1, y_1 von N, für die entweder 2 Teiler von $\xi_1 = (x_1,x_1)$ ist oder 2 weder ξ_1 noch $\eta_1 = (y_1,y_1)$ teilt, aber $\mathrm{ord}_v \xi_1\eta_1$ ungerade ist. Gibt es im letzten Fall ein z wie in Hilfssatz 2.2", so gelangt man wieder durch fortgesetzte Anwendung dieses Satzes zu einer Zerlegung, auf die man Hilfssatz 2.2' anwenden kann. Wir müssen also zeigen, daß ein $z \in N^{\perp}$ wie in Hilfssatz 2.2" existiert, falls $2 \nmid \xi$, $2 \nmid \eta$, $\mathrm{ord}_v \xi\eta$ ungerade oder falls $2 \mid \xi$, $2 \nmid \eta$ und keine der Bedingungen in Hilfssatz 2.2' erfüllt ist.

Ist rg $N^{\perp} = 1$, so kann man für z ein erzeugendes Element wählen, wie man leicht sieht.

Falls rg $N^{\perp} = 2$ ist, so gibt es nach dem bereits Bemerkten eine Basis x', y' von $N^{\perp}$ mit $(x', y') = \pi^{\varepsilon}$ (wenn π Primelement in $\mathfrak{p}_v$ ist).

Ist 2 Teiler von $\xi' = \pi^{-\varepsilon}(x', x')$ und von $\eta' = \pi^{-\varepsilon}(y', y')$, so ist - nach Hilfssatz 2.2' - nichts mehr zu zeigen.

Sei $2 \nmid \xi'$, $2 \nmid \xi$, $\mathrm{ord}_v \pi^{\varepsilon} \xi' \xi$ gerade. Ist nun $\mathrm{ord}_v \pi^{\varepsilon} \xi' > \mathrm{ord}_v \xi$, so ist sogar $\mathrm{ord}_v \pi^{\varepsilon} \xi' \geq \mathrm{ord}_v \xi + 2$, also $\mathrm{ord}_v \xi' \geqq \mathrm{ord}_v \pi^{\varepsilon} \xi$.

Man betrachtet in diesem Fall anstelle von L das duale Gitter $L^{\#}$, auf dem man die mit π^{ε} multiplizierte quadratische Form nimmt- an der Spinornorm der Gittereinheiten ändert dies nichts, wie wir bereits sahen-, und hat- bei Vertauschung von x, y mit x', y' - nur noch die Situation $\mathrm{ord}_v \pi^{\varepsilon} \xi' \leq \mathrm{ord}_v \xi$ zu betrachten. Hier kann man offensichtlich z = x' wählen. Ist $\mathrm{ord}_v \pi^{\varepsilon} \xi' \xi$ ungerade, so kann man sogar ohne weiteres z = x' setzen.

Wir haben daher nur noch die beiden Hilfssätze zu beweisen.

<u>Beweis von Hilfssatz 2.2':</u> Wegen der Vollkommenheit des Restklassenkörpers genügt es zu zeigen, daß die Klassen aller Einheiten aus $1 + \mathfrak{p}_v$ als Spinornormen von Einheiten von L vorkommen. Im Fall $2 \mid \eta$ entnimmt man [11, 93:11], daß entweder $\xi = \eta = 0$ oder $\xi = 2\varrho$, $\eta = 2$ mit $\varrho \in \mathfrak{o}_v^*$ angenommen werden kann. Im ersten dieser beiden Fälle ist die Behauptung leicht zu sehen; wir brauchen daher nur noch die Fälle $\eta = 2$ oder $2 \nmid \eta$ zu betrachten. Für $w = \lambda x + y$ ($\lambda \in \mathfrak{o}_v$) erhält man in $s_w(a) = a - 2\frac{(a,w)}{(w,w)} w$ ($a \in L$) die Spiegelung an der zu w orthogonalen Hyperebene, und da im Fall $\lambda \in \mathfrak{p}_v$ $(w,w) = \eta + 2\lambda + 2\lambda^2 \xi_0$ Teiler von 2 ist, ist s_w Einheit von L mit der

Spinornorm $\eta(1+\frac{2}{\eta}(\lambda+\lambda^2\xi_0))K_v^{*2}$. Eine einfache Anwendung des HENSELschen Lemmas zeigt daher, daß alle Klassen $(1+\frac{2}{\eta}\mathfrak{p}_v)K_v^{*2}$ als Spinornormen von Einheiten von L auftreten. Dies ist im Fall $\eta = 2$ die Behauptung. Im Fall $2 \nmid \eta$ ist nach Voraussetzung $\frac{(z,z)}{\eta} = \varepsilon_0\pi^{-2\varsigma+1}$ mit $\varepsilon_0 \in \mathfrak{o}_v^*$, $\varsigma > 0$, ganz, und man sieht wie oben, daß für $\alpha\in\mathfrak{o}_v$ die zu $w = y + \pi^{\varsigma}\alpha z$ gehörige Spiegelung Einheit von L ist mit der Spinornorm $\eta(1+\varepsilon_0\pi\alpha^2)K_v^{*2}$, d.h. man erhält als Bilder die Klassen aller Einheiten, die sich in der Form $1+\varepsilon_0\pi\alpha^2$ mit $\alpha\in\mathfrak{o}_v$ und einer von x und z abhängigen Einheit ε_0 repräsentieren lassen.

Nun aber läßt sich eine beliebige Einheit aus $1+\mathfrak{p}_v$, die nicht Quadrat ist, in der Form $1+\pi^{\varsigma}\varepsilon$ mit $\varepsilon\in\mathfrak{o}_v^*$ schreiben, wobei ς entweder ungerade oder $\pi^{\varsigma} = 4$ ist [11.63:2]. Wegen $1+4\mathfrak{o} \subseteq 1+\frac{2}{\eta}\mathfrak{p}_v$ brauchen wir nur den ersten dieser beiden Fälle zu betrachten.

Wir setzen daher $\varepsilon = \varepsilon_0\delta^2(1+\pi\beta)$ $(\delta\in\mathfrak{o}_v^*, \beta\in\mathfrak{o}_v)$, was wegen der Vollkommenheit des Restklassenkörpers möglich ist, und bekommen

$$1+\pi^{\varsigma}\varepsilon = 1+\pi^{\varsigma}\varepsilon_0\delta^2(1+\pi\beta) = (1+\pi^{\varsigma}\varepsilon_0\delta^2)(1+(1+\pi^{\varsigma}\varepsilon_0\delta^2)^{-1}\pi^{\varsigma+1}\varepsilon_0\delta^2\beta).$$

$1+\pi^{\varsigma}\varepsilon$ ist also Spinornorm einer Einheit von L, wenn der zweite Faktor in $1+4\mathfrak{o}_v$ liegt. Ist das nicht der Fall, so schreiben wir ihn in der Form $1+\pi^{\varsigma_1}\varepsilon_1$ mit $\varsigma_1 \geq \varsigma+1$ (ς ist ungerade), $\varepsilon_1\in\mathfrak{o}_v^*$. Ist ς_1 gerade, so wählen wir $\delta_1\in\mathfrak{o}_v^*$ so, daß $\delta_1^{\,2} \equiv \varepsilon_1 \bmod \mathfrak{p}_v$ ist. Dann ist

$$1+\pi^{\varsigma_1}\varepsilon_1 \equiv 1+\delta_1^{\,2}\pi^{\varsigma_1} \equiv (1+\delta_1\pi^{\frac{\varsigma_1}{2}})^2 \bmod \mathfrak{p}_v^{\varsigma_1+1},$$

man kann also $1+\pi^{\varsigma_1}\varepsilon_1 = \delta_2^{\,2}(1+\pi^{\varsigma_2}\varepsilon_2)$ mit δ_2, $\varepsilon_2\in\mathfrak{o}_v$ und $\varsigma_2 \geq \varsigma_1+2$ schreiben.

Indem wir die Konstruktion wiederholen, können wir, da wir nach endlich vielen Schritten notwendig zu einer Einheit aus $1+4\mathfrak{o}_v$ gelangen müssen, $1+\pi^{\varsigma}\varepsilon$ als Produkt von Spinornormen von Spiegelungen von L schreiben, und damit ist alles gezeigt.

<u>Beweis von Hilfssatz 2.2":</u> Ohne Einschränkung können wir wieder wegen der Vollkommenheit des Restklassenkörpers

$(z,z) = \delta^2(1+\alpha_1\pi)\pi^d$, $\eta = (1+\pi\alpha_2)\pi^{d+2r}$ mit $\delta \in \mathfrak{o}_v^*$, $\alpha_i \in \mathfrak{o}_v$ $(i=1,2)$ und $d \geq 0$ schreiben. Es ist dann

$(y+\pi^r\delta^{-1}z,\ y+\pi^r\delta^{-1}z) = (1+\pi\alpha_2)\pi^{d+2r} + (1+\pi\alpha_1)\pi^{d+2r} + 2\pi^r\delta^{-1}(y,z)$

$\equiv \pi^{d+2r+1}(\alpha_1+\alpha_2) \bmod 2\mathfrak{o}_v$, und $(x, y+\pi^r\delta^{-1}z) = 1+\pi^r\delta^{-1}(x,z) =: \delta_o$,

wo $\delta_o \in \mathfrak{o}_v^*$ sicher gilt, wenn $z \in N^\perp$ oder $r \geq 1$. Ist $z = x$ und $r = 0$, so ist $\delta_o = 1+\delta(1+\alpha_1\pi)\pi^d \in \mathfrak{o}_v^*$, falls $d > 0$. Ist $d = 0$, so zeigt $\delta_o(1-\delta) \equiv (1+\delta)(1-\delta) \equiv 1-\delta^2 \equiv 1-\xi\eta \bmod \mathfrak{p}_v$ mit $1-\xi\eta \in \mathfrak{o}_v^*$, daß auch in diesem Fall $\delta_o \in \mathfrak{o}_v^*$ ist. Man setzt also $y_1 = \delta_o^{-1}(y+\pi^r\delta^{-1}z)$.

Die Existenz von z_1 muß nur für den Fall $z \in N^\perp$ noch gezeigt werden. Dann ist $\delta_o = 1$, und man rechnet nach: Für $z_1 := z + (1-\xi\eta_1)^{-1}(y_1,z)(\xi y_1 - x)$ gilt $(x,z_1) = (y_1,z_1) = 0$ und

$$\begin{aligned}(z_1,z_1) &= (z,z)(1-\xi\eta_1)^{-1}(1-\xi\eta_1+\pi^{2r+d}(1+\alpha_1\pi)\xi)\\ &\equiv (z,z)(1-\xi\eta_1)^{-1}(1+\pi^{2r+d}\xi) \bmod \xi\mathfrak{p}_v^{2r+d+1}\\ &\equiv (z,z)(1-\xi\eta_1)^{-1}(1+\eta\xi) \quad \bmod \xi\mathfrak{p}_v^{2r+d+1}.\end{aligned}$$

$\mathrm{ord}_v(z_1,z_1) = \mathrm{ord}_v(z,z)$ folgt daher im Fall $\xi\eta \in \mathfrak{p}_v$ sofort, im Fall $\xi\eta \in \mathfrak{o}_v^*$ wegen $\xi\mathfrak{p}_v^{2r+d+1} = \mathfrak{p}_v$ und $1+\xi\eta \equiv 1-\xi\eta \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}_v$.

Damit ist auch Hilfssatz 2.2" gezeigt und Hilfssatz 2.2 vollständig bewiesen.

Wir nehmen nun an, daß q totaldefinit ist (insbesondere also K totalreell), und daß $r = \dim_K W \geq 3$ ist. Dann sind Spin_q, SO_q totaldefinite fasteinfache K-Gruppen, und wir können beweisen:

<u>Hilfssatz 2.3:</u> Zu $g \in C(\mathrm{Spin}_q)$ gibt es $g' \in C(SO_q)$ mit $f_A(g) \subseteq g'$ und

$$M(\mathrm{Spin}_q, g) \geq \tfrac{1}{2}M(SO_q, g').$$

<u>Beweis:</u> Zu $g \in C(\mathrm{Spin}_q)$ konstruieren wir $g' \in C(SO_q)$ folgendermaßen: Für fast alle $v \in P$ ist $g_v = \mathrm{Spin}_{q,\mathfrak{o}_v}$, $f_{K_v}(\mathrm{Spin}_{q,\mathfrak{o}_v}) \subseteq SO_{q,\mathfrak{o}_v}$, und Reduktion modulo $\mathfrak{p}_v$ zusammen mit [10] zeigt

$$[SO_{q,\mathfrak{o}_v} : f_{K_v}(\mathrm{Spin}_{q,\mathfrak{o}_v})] = [(\mathrm{Ker} f)_{K_v} \cap \mathrm{Spin}_{q,\mathfrak{o}_v}]$$

für fast alle $v \in P$; für diese sei $g'_v := SO_{q,\mathfrak{o}_v}$.

Für die endlich vielen übrigen wählen wir für g'_v eine maximale kompakte Untergruppe von SO_{q,K_v}, welche $f_{K_v}(g_v)$ umfaßt. Die Existenz einer solchen ist durch einen Satz von LANGLANDS [4,§2] gesichert.

Damit ist $f_A(g) \subseteq g'$. Hilfssatz 2.2 liefert $[g'_v : f_{K_v}(g_v)] \geq [\mathfrak{o}^*_v : \mathfrak{o}^{*2}_v]$, also hat man mit [11, 63:9]:

$$[g'_v : f_{K_v}(g_v)] \geq 2[\mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v]^{\operatorname{ord}_v 2} \geq [(\operatorname{Ker} f)_{K_v} \cap g_v][\mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v]^{\operatorname{ord}_v 2}.$$

An den reellen Primstellen induziert f eine Surjektion, da q als totaldefinit vorausgesetzt war, so daß $c_v(f,g,g') = \frac{1}{2}$ für $v \in \infty$ ist. Unter Ausnutzung von $\prod_{v \in P} [\mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v]^{\operatorname{ord}_v 2} = 2^n$ erhalten wir $\prod_{v \in V} c_v(f,g,g') \geq 1$, und da nach [17, chap. II] und [12] die TAMAGAWAzahlen der Spin- und der speziellen orthogonalen Gruppe $\tau(\mathrm{Spin}_q) = 1$, $\tau(SO_q) = 2$ sind, erhält man mit Hilfssatz 2.1 unmittelbar die Behauptung.

Diese Formel ermöglicht es, aus den Abschätzungen der Klassenzahlen totaldefiniter quadratischer Formen in [13] eine untere Schranke für die Klassenzahlen der zugehörigen Spingruppen zu gewinnen.

Zu $g' \in C(SO_q)$ läßt sich nämlich ein Gitter L in W finden, dessen Isotropiegruppe g_L die Gruppe g' enthält: Nach Definition sind g' und SO_{q,A_∞} kommensurabel, so daß die Menge aller transformierten Gitter $\mathfrak{o}^r x$ mit $x \in g'$ endlich ist; wir setzen L gleich der Summe dieser Gitter. Offensichtlich ist $[SO_{q,K} \cap x^{-1}g'x] \leq [SO_{q,K} \cap x^{-1}g_L x]$, also $M(SO_q, g_L) \leq M(SO_q, g')$.

Ist nun $\{L_i \mid i=1,\dots,k\}$ ein System von Vertretern der Gitterklassen aus dem Geschlecht von L (bezüglich der orthogonalen Gruppe von q) und $O_q(L_i)$ die Einheitengruppe von L_i, und setzen wir $M(L) = \sum_{i=1}^{k} [O_q(L_i)]^{-1}$, so erhält man

$$(2.1) \qquad 2M(L) = M(SO_q, g_L).$$

(Man hat sich nur klarzumachen, daß die Geschlechtsbegriffe von Gittern bezüglich orthogonaler und spezieller orthogonaler Gruppe zusammenfallen, und daß eine (globale) orthogonale Gitterklasse genau dann in zwei spezielle Klassen zerfällt, wenn die Gitterklasse Gitter mit uneigentlichen Einheiten enthält, cf. [11, § 82C, §102A].)

Indem man die quadratische Form q gegebenenfalls mit einer Zahl aus K multipliziert, was an den auftretenden Gruppen, Maßen und Klassenzahlen nichts ändert, erreicht man, daß $q(L) \subseteq \mathfrak{o}$, L also ganzes Gitter ist. Für solche Gitter ist $M(L)$ in [13,§4] abgeschätzt worden mit dem folgenden für uns wichtigen Ergebnis:

Ist h eine natürliche Zahl, so existieren nur endlich viele totalreelle algebraische Zahlkörper, die Gitter L in wenigstens dreidimensionalen totaldefiniten quadratischen Vektorräumen zulassen mit $h \geq M(L)$, und ist K ein fester solcher Körper, so gibt es nur endlich viele Isometrieklassen von totaldefiniten Gittern beschränkten Teilers mit dieser Eigenschaft.

Für $h(Spin_q) := \min\{h(Spin_q, g) \mid g \in C(Spin_q)\}$ folgt hieraus in Verbindung mit Hilfssatz 2.3:

Satz 1: Ist h eine natürliche Zahl, so existieren nur endlich viele totalreelle algebraische Zahlkörper K, über denen mindestens dreidimensionale, nicht entartete, totaldefinite quadratische Räume (mit der Form q) möglich sind, so daß $h(Spin_q) \leq h$ ist; für jeden solchen Körper K gibt es - bis auf Ähnlichkeit - nur endlich viele Räume mit dieser Eigenschaft.

§ 3. Spinorgeschlechter mit beschränkter Klassenzahl in totaldefiniten quadratischen Räumen

Die Abschätzungen in [13] gestatten zusammen mit den Überlegungen im letzten Paragraphen eine Aussage über die Klassenzahlen von Spinorgeschlechtern ganzer Gitter in totaldefiniten quadratischen Räumen. Wir legen den Begriff des eigentlichen Spinorgeschlechtes zugrunde, wie er in [8] und [11] definiert ist (der Zusammenhang dieser Definition mit der von EICHLER [6] wird beispielsweise in [8, §4] erläutert): Zwei Gitter L und M im gleichen nicht entarteten quadratischen Raum W liegen im gleichen Spinorgeschlecht, wenn es zu jeder Primstelle $v \in V$ einen eigentlichen Isomorphismus $\sigma_v \in SO_q(W_v)$ mit Spinornorm 1 gibt derart, daß das Gitter $\bigcap_{v \in V} M_v \sigma_v$ in der eigentlichen Klasse von L liegt. (M_v ist hier wieder das von M in $W_v \simeq W \otimes_K K_v$ erzeugte Gitter.)

Es ist leicht zu sehen, daß ein Geschlecht von Gittern in Spinorgeschlechter und ein Spinorgeschlecht in volle Klassen zerfällt. Wir wollen die Klassenzahl des Spinorgeschlechtes eines beliebigen Gitters nach unten abschätzen. Dazu sind die folgenden Vorbereitungen erforderlich: Zunächst halten wir fest, daß für jeden Körper K die Sequenz

$$\mathrm{Spin}_q(K) \xrightarrow{f_K} SO_q(K) \xrightarrow{\theta} K^*/K^{*2}$$

exakt ist, wenn f der Überlagerungshomomorphismus und θ die Spinornorm ist. Diese Situation läßt sich im Fall, daß K ein Zahlkörper ist, auch auf die adelisierten Gruppen übertragen, wobei an die Stelle von K^*/K^{*2} die Faktorgruppe I/I^2 der Idelgruppe I von K tritt. Denn ist $x = (x_v)_{v \in V} \in SO_{q,A}$, so setzt man $\theta(x) = (\theta x_v)_{v \in V}$. Da für ein beliebiges Gitter M in W für fast alle $v \in V$ die Lokalisierung M_v unimodular und x_v Einheit von M_v ist, ist $\theta x_v \subseteq \mathfrak{o}_v^* K_v^{*2}/K_v^{*2}$ für fast alle $v \in V$ (cf. [11,92:5]), also ist $\theta x \in I/I^2$. Die Exaktheit von

$$\mathrm{Spin}_{q,A} \xrightarrow{f_A} SO_{q,A} \xrightarrow{\theta} I/I^2$$

ist nach dem obigen klar. In $SO_{q,A}$ läßt sich die Gruppe $SO_{q,K}$ diagonal einbetten, ebenso haben wir die Diagonaleinbettung von K in I, und da nach einem bekannten Satz ein Element in K Quadrat ist, wenn es bei allen Primstellen (es genügt sogar: bei fast allen Primstellen) von K Quadrat ist, induziert die letztere Einbettung eine Injektion $K^*/K^{*2} \longrightarrow I/I^2$. Wir können daher die Einschränkung von θ auf $SO_{q,K}$ mit der Spinornorm identifizieren.

In der Adelgruppe von SO_q läßt sich ein Spinorgeschlecht als Vereinigung von Doppelnebenklassen beschreiben: Ist L ein Gitter in W und g_L die Isotropiegruppe von L in $SO_{q,A}$, so erhält man das Spinorgeschlecht von L offenbar gerade in $spn(L) := g_L SO_{q,K} \mathrm{Ker}\ \theta = g_L SO_{q,K} f_A(Spin_{q,A})$. Da $f_A(Spin_{q,A})$ die Kommutatorgruppe von $SO_{q,A}$ umfaßt, kann man auch $spn(L) = $ $= g_L f_A(Spin_{q,A}) SO_{q,K}$ schreiben.

Der Homomorphismus f_A ist stetig und eigentlich, daher ist $g := f_A^{-1}(g_L)$ offene und kompakte Untergruppe von $Spin_{q,A}$, also Element aus $C(Spin_q)$, und es gibt (nach §1) eine endliche disjunkte Zerlegung

(3.1) $$Spin_{q,A} = \bigcup_{x \in J} gxSpin_{q,K} \qquad (J \subseteq Spin_{q,A}, \text{ endlich}).$$

Folglich ist

(3.2) $$spn(L) = \bigcup_{x \in J} g_L f_A(x) SO_{q,K},$$

aber diese Zerlegung ist im allgemeinen nicht disjunkt.

Jedoch läßt sich die Klassenzahl h_L' von spn(L) nach unten abschätzen durch

Hilfssatz 3.1: Es ist $h_L' \geq 2^{-(2n+\delta)} k^{-1} h(g, Spin_q)$, hierin bedeutet k die Idealklassenzahl von K und δ die Anzahl der nichtarchimedischen ungeraden Primstellen $v \in V$ mit

(3.3) $$\theta(SO_q(L_v)) \nsubseteq \mathfrak{o}_v^* K_v^{*2}/K_v^{*2}.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß die Gruppenordnung $[\theta(g_L) \cap \theta(SO_{q,K})]$ eine obere Schranke für die Anzahl der Doppelnebenklassen in (3.1) ist, deren Bilder unter f_A in einer Doppelnebenklasse von (3.2) liegen. Sodann beweisen wir $[\theta(SO_{q,K}) \cap \theta(g_L)] \leq 2^{2n+\delta} k$.

Aus beiden Aussagen zusammen folgt dann unmittelbar die Behauptung.-

Ist für $x,y \in J$ $\quad g_L f_A(x) SO_{q,K} = g_L f_A(y) SO_{q,K}$, so existieren $\alpha \in g_L$, $\beta \in SO_{q,K}$ mit $f_A(x) = \alpha f_A(y)\beta$, was wegen $\theta \circ f_A = 1$ die Beziehung

(3.4) $$\theta(\alpha) = \theta(\beta)^{-1}$$

liefert. Daher ist $\theta(\alpha) \in \theta(g_L) \cap \theta(SO_{q,K})$. Gilt nun für $z \in J$, $z \neq y$ ebenfalls $g_L f_A(x) SO_{q,K} = g_L f_A(z) SO_{q,K}$, d.h. gibt es $\gamma \in g_L$, $\delta \in SO_{q,K}$ mit $f_A(x) = \gamma f_A(z)\delta$, so ist $f_A(z) = \gamma^{-1}\alpha f_A(y)\beta\delta^{-1}$.
Weiter ist $\gamma^{-1}\alpha \notin \mathrm{Ker}\ \theta$, denn sonst wäre (cf. (3.4)) auch $\beta\delta^{-1} \in \mathrm{Ker}\ \theta$, und es gäbe $\xi \in g$, $\eta \in \mathrm{Spin}_{q,K}$ mit $f_A(\xi) = \gamma^{-1}\alpha$, $f_A(\eta) = \beta\delta^{-1}$. z würde sich von $\xi y \eta$ also nur um ein Element aus $\mathrm{Ker}\ f_A \subsetneq g$ unterscheiden, so daß man ohne Einschränkung $z = \xi y \eta$ annehmen könnte, im Widerspruch zu $z \neq y$ und der Disjunktheit der Zerlegung (3.1). Folglich ist $\theta(\gamma) \neq \theta(\alpha)$ und die erste der beiden Teilaussagen ist bewiesen. Es sei nun S die Teilmenge von V, die aus ∞, den ungeraden v mit (3.3) und allen geraden v besteht. S ist endlich (cf. [11, 92:5]), und für $v \in V - S$ gilt

(3.5) $$\theta(SO_q(L_v)) \subseteq \mathfrak{o}_v^* K_v^{*2}/K_v^{*2}.$$

I_S sei die Untergruppe der Elemente von I, deren Komponenten außerhalb von S Einheiten sind. Dann ist $\theta(g_L) \subseteq I_S I^2/I^2$, $\theta(SO_{q,K}) \subseteq K^* I^2/I^2$, und wegen $(I_S \cap K^*)I^2/I^2 \subseteq (I_S I^2 \cap K^* I^2)/I^2$ folgt

(3.6) $$[\theta(g_L) \cap \theta(SO_{q,K})] \leq [I_S I^2 \cap K^* I^2 : (I_S \cap K^*)I^2][(I_S \cap K^*)I^2/I^2].$$

Hierin läßt sich der zweite Faktor mit

$$[I_S \cap K^*/I^2 \cap I_S \cap K^*] \leq [I_S \cap K^*/(I_S \cap K^*)^2]$$

und dem DIRICHLETschen Einheitensatz wegen $[S] \leq 2n+\delta$ durch $2^{2n+\delta}$ abschätzen. Vom ersten Faktor in (3.6) zeigen wir, daß er nicht größer ist als $[I:K^* I_S] \leq k$: Denn ist etwa $A \subseteq I$ ein Vertretersystem von I modulo $K^* I_S$ und $x \in I_S I^2 \cap K^* I^2$, so gibt es $y \in I_S$, $\eta \in K^*$, w_1, $w_2 \in I$ mit

(3.7) $$x = y w_1^{\,2} = \eta w_2^{\,2},$$

und zu w_1, w_2 existiert $\alpha \in A$, $\xi \in K^*$, $z \in I_S$ mit

(3.8) $$w_1^{-1} w_2 = \alpha \xi z.$$

Wegen (3.7) ist $w_1^{-2} w_2^{\,2} \in K^* I_S$, also nach (3.8) auch $\alpha^2 \in K^* I_S$, etwa $\alpha^2 = \varrho_\alpha r_\alpha$ ($\varrho_\alpha \in K^*$, $r_\alpha \in I_S$). Aus (3.7), (3.8) folgt $r_\alpha^{-1} z^{-2} y = \varrho_\alpha \xi^2 \eta \in K^* \cap I_S$, also

$x = yw_1{}^2 = r_\alpha(\varsigma_\alpha \xi^2 \eta) z^2 w_1{}^2 \in r_\alpha (K^* \wedge I_S) I^2$. Damit ist $[\theta(g_L) \wedge \theta(SO_{q,K})] \leq 2^{2n+\delta_k}$ gezeigt und der Hilfssatz 3.1 völlig bewiesen.

Den Faktor $h(g,\mathrm{Spin}_q)$ in Hilfssatz 3.1 schätzen wir nach Hilfssatz 2.1 ab mit $G = \mathrm{Spin}_q$, $G' = SO_q$, $g' = g_L$, wobei wieder $\tau(\mathrm{Spin}_q) = 1$, $\tau(SO_q) = 2$ benutzt wird (cf. §2, Hilfssatz 2.3). Danach ist - bei Benutzung von (2.1) und von $h(g,\mathrm{Spin}_q) \geq M(g,\mathrm{Spin}_q)$ -:

(3.9) $$h(g,\mathrm{Spin}_q) \geq \Big(\prod_{v \in V} \tfrac{1}{2}[\theta(SO_q(L_v))]\Big) M(L).$$

Für fast alle $v \in P$ ist $[\theta(SO_q(L_v))] = 2$; für $v \in \infty$ oder $v|2$ schätzen wir diese Gruppenordnung durch 1 ab (dies sind höchstens 2n Primstellen).

δ' sei die Anzahl der ungeraden $v \in V$ mit

(3.10) $$[\theta(SO_q(L_v))] = \begin{cases} 2 & \text{falls (3.3) für } v \text{ gilt,} \\ 1 & \text{falls (3.3) für } v \text{ nicht gilt.} \end{cases}$$

Damit ergibt sich aus Hilfssatz 3.1 und aus (3.9)

(3.11) $$h_L' \geq 2^{-(4n+\delta')} k^{-1} M(L).$$

δ' ist nun höchstens gleich der Anzahl der ungeraden $v \in P$, für die L_v in nicht weniger als $r = \mathrm{rg}L$ modulare Komponenten zerfällt. Ist dies nämlich nicht der Fall, so besitzt L_v eine wenigstens binäre modulare Komponente, und nach [11,92:5] ist dann $\theta(SO_q(L_v)) \supseteq \mathfrak{o}_v^* K_v^{*2}/K_v^{*2}$, also kann nicht (3.10) gelten.

Für das Weitere müssen wir auf die Abschätzung von M(L) in [13] eingehen. Nach SIEGELs Satz über Darstellungsmaße quadratischer Formen (cf. [16])

Der erste Faktor der rechten Seite ist nach unten beschränkt, ebenso der dritte, und dieser sogar durch 1 (da L ganz ist). Der zweite Faktor ist nach unten beschränkt, falls - bei festem n - der Rang r größer als eine von n abhängige untere Schranke $r_o(n)$ ist, und auch, wenn mit n auch d fixiert ist. Ist also K ein fester Zahlkörper, so sind die beiden ersten Faktoren nach unten beschränkt. Der dritte Faktor ist - wie h_L' - eine Invariante der Ähnlichkeitsklasse von L. Bei festem r kann man aber in der Ähnlichkeitsklasse von L ein ganzes Gitter L' finden, so daß $(\pi sL')^r$ unter einer nur von K abhängigen Schranke liegt. Da, wie die Reduktionstheorie quadratischer Formen lehrt, zu einem festen Zahlkörper nur endlich viele ganze Gitterklassen gegebenen Rangs mit vorgegebener Diskriminante existieren, folgt, daß nur für endlich viele Ähnlichkeitsklassen von Gittern vom Rang r $\pi(\mathfrak{d}L)(\pi sL)^{-r}$ unter einer gegebenen Schranke liegen kann. Insgesamt folgt also aus (3.15)

<u>Satz 2:</u> Zu natürlichem n gibt es eine Zahl $r_o(n)$ mit der Eigenschaft:

Ist h eine natürliche Zahl, so gibt es nur endlich viele totalreelle Körper vom Grade n, über denen totaldefinite Gitter L vom Rang $r \geq r_o(n)$ möglich sind, deren Spinorgeschlechter nicht mehr als h Klassen enthalten. Über jedem totalreellen Zahlkörper gibt es zu natürlichem h bis auf Ähnlichkeit endlich viele Klassen totaldefiniter Gitter vom Rang $r \geq 3$, deren Spinorgeschlechter nicht mehr als h Klassen haben.

II. Teil: Klassenzahlen totaldefiniter HERMITEscher Gitter

§ 4. Die Maßformel der speziellen unitären Gruppe

Über die eingangs festgelegten Bezeichnungen hinaus fixieren wir für den gesamten zweiten Teil:

Es sei L eine quadratische Körpererweiterung von K mit dem Ring $\mathcal{O}$ der ganzen Elemente. Durch $x \longrightarrow \bar{x}$ $(x \in L)$ bezeichnen wir den nicht-trivialen K-Automorphismus ("Konjugation") von L. W sei ein endlichdimensionaler Vektoraum über L und $h: W \times W \longrightarrow L$ eine bezüglich der Konjugation hermitesche, nicht entartete Sesquilinearform (halblinear im ersten Argument) auf W. U_h, SU_h, PU_h seien die zu h gehörige unitäre bzw. spezielle und projektive unitäre Gruppe; diese sind affine algebraische K-Gruppen. U_1 sei die affine algebraische K-Gruppe eines eindimensionalen hermiteschen L-Raumes ($U_1(K)$ ist also gerade die Gruppe der Normeinselemente von $L|K$).

Für ein $\mathcal{O}$-Gitter M in W bezeichne $g_M \in C(U_h)$, $g_M^+ \in C(SU_h)$ die Fixgruppe von M in der Adelgruppe von U_h, SU_h (cf. §1).

Im Weiteren nehmen wir an, daß h totaldefinit ist; dies bedingt natürlich, daß K totalreell ist, und darüberhinaus muß $L|K$ imaginärquadratisch sein, da es über reellquadratischen Erweiterungen totalreeller Körper keine totaldefiniten hermiteschen Formen gibt.

Das Ziel dieses Paragraphen ist, für ganze $\mathcal{O}$-Gitter M das in der Maßformel (1.1) auftretende TAMAGAWAmaß $\Omega(g_M^+)$ mit den "lokalen Darstellungsdichten" von M (cf. (4.4)) in Verbindung zu bringen.

Dazu konstruieren wir zunächst auf SU_h eine K-definierte linksinvariante Eichform ω: Wir haben das folgende K-definierte kommutative Diagramm mit exakten Sequenzen:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & SU_h \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\alpha"'] & U_h \arrow[r, "\det"] \arrow[d, "\pi"] & U_1 \arrow[r] & 1 \\
& & PU_h \arrow[d] & & \\
& & 1 & &
\end{tikzcd}$$

(Hierin ist det der Determinantenmorphismus.)

Sind nun ω', ω_1 linksinvariante Eichformen auf PU_h und U_1, so ist $\omega := \alpha^*(\omega')$ linksinvariante Eichform auf SU_h und $\pi^*(\omega')$ linksinvariante Differentialform auf U_h mit $\omega = \iota^*(\pi^*(\omega'))$. Nach [17, p. 26] ist dann $\omega_o := \pi^*(\omega') \wedge \det^*(\omega_1)$ linksinvariante Eichform auf U_h, und die Eichformen ω, ω_o, ω_1 passen algebraisch zusammen. Nach [12, §1.1] kann man zur Definition von TAMAGAWAmaßen auf U_h und U_1 ein und dasselbe System konvergenzerzeugender Faktoren $\{\lambda_v \mid v \in V\}$ wählen, auf deren genaue Definition es uns hier nicht ankommt. Da $\{\mu_v = 1 \mid v \in V\}$ System konvergenzerzeugender Faktoren für SU_h ist, und da der Determinantenmorphismus einen K-rationalen Schnitt besitzt, passen nach [17, Th. 2.4.3] die mit den angegebenen Faktorensystemen und mit ω, ω_o, ω_1 gebildeten TAMAGAWAmaße Ω, Ω_o, Ω_1 auch topologisch zusammen, d.h. für jede auf $U_{h,A}$ integrierbare Funktion f gilt

$$\int_{U_{1,A}} \Omega_1(\det \gamma) \int_{SU_{h,A}} \Omega(t) f(\gamma\, \iota(t)) = \int_{U_{h,A}} \Omega_o(x) f(x).$$

(Die Integrationsvariable ist hier in Klammern hinter das Maßsymbol gestellt.) Wählen wir hierin für f die charakteristische Funktion von g_M, so ergibt sich daraus

$$(4.1) \qquad \Omega(g_M^+) = \Omega_1(\det\, g_M)^{-1} \Omega_o(g_M) = \prod_{v \in V} \frac{\omega_{o,v}(U_h(M_v))}{\omega_{1,v}(\det\, U_h(M_v))}$$

(die λ_v kürzen sich gerade heraus), wobei wir $M_v = W_v$ für $v \in \infty$ setzen. Die in diesen Formel rechts auftretenden Maße unitärer Gruppen sind in [1, § 8] unter Zugrundelegung der Normierung der lokalen Maße wie beim TAMAGAWAmaß (cf. [17, chap. II]) berechnet worden. Dort ist zwar nur der Fall K = $\mathbb{Q}$ behandelt worden, jedoch lassen sich die Rechnungen fast wörtlich auf den allgemeinen Fall übertragen. (Man hat nur zu beachten, daß L im allgemeinen keine Ganzheitsbasis über K besitzt. Stattdessen nehme man irgendeine Basis von L über K und transformiere in jeder endlichen Primstelle in eine Ganzheitsbasis. Dabei tritt an allen Primstellen der jeweilige Betrag der Diskriminante der globalen Basis in einer gewissen- für alle Stellen gleichen- Potenz auf. Man befreit sich von dieser Basis, indem man die Eichform mit der entsprechenden Diskriminantenpotenz multipliziert, was wegen der Produktformel für Bewertungen am Adelmaß nichts ändert.) Bei Durchsicht der Rechnungen findet man: ω_o läßt sich so normieren, daß

$$(4.2) \qquad \omega_{o,v}(U_h(M_v)) = |\vartheta(L_v|K_v)|_v^{(r/4)(r+1)}\,|\vartheta M_v|_v^r\, a_v(M) \quad (v \in P)$$

und

$$(4.3) \qquad \prod_{v\in\infty} \omega_{o,v}(U_h(M_v)) = \sqrt{d}^{\,-r^2}\Big(\prod_{j=1}^{r} \frac{(2\pi)^j}{(j-1)!}\Big)^n$$

ist; hierin ist $r = \dim_L W$, und für $v \in P$ ist $\vartheta(L_v|K_v)$ die Diskriminante von $L_v = L \otimes_K K_v$ über K_v, ϑM_v die Diskriminante von M_v und $a_v(M)$ die lokale Darstellungsdichte von M_v, d.h.

$$(4.4) \qquad a_v(M) = \lim_{\mu\to\infty} \pi_v^{-r^2} A_{\mathfrak{p}_v^\mu}(M_v, M_v),$$

wo für $\mu \in \mathbb{N}$ mit $A_{\mathfrak{p}_v^\mu}(M_v, M_v)$ die Anzahl aller modulo $\mathfrak{p}_v^\mu M_v$ verschiedener $\mathcal{O}_v$-linearer Abbildungen $\varphi\colon M_v \longrightarrow M_v$ mit $h(x,y) \equiv h(\varphi x, \varphi y) \bmod \mathfrak{p}_v^\mu$ für alle $x, y \in M_v$ bezeichnet wird ($\mathcal{O}_v = \mathcal{O} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_v$).

Wir normieren ω_1 so, daß die Formeln (4.2) und (4.3) entsprechend gelten mit $r = 1$, $h(x,y) = x\bar{y}$ für $x, y \in L$ und $M = \mathcal{O}$. Dann folgt aus (4.1) bis (4.3)

$$(4.5) \quad \Omega(g_M^+) = \sqrt{d}^{\,-(r^2-1)}\Big(\prod_{j=2}^{r} \frac{(2\pi)^j}{(j-1)!}\Big)^n \big(\pi\,\vartheta(L|K)\big)^{-\frac{r}{4}(r+1)+\frac{1}{2}} \big(\pi\,\vartheta M\big)^{-r} \prod_{v\in P}\,[U_{1,K_v} : \det U_h(M_v)]\,\frac{a_v(M)}{a_v(\mathcal{O})}$$

Da wir die Klassenzahlen $h(SU_h, g_M)$ nach unten (mittels (1.1)) abschätzen wollen, gehen wir nun daran, den in (4.5) auf der rechten Seite stehenden Ausdruck nach oben abzuschätzen. Wir werden dabei analog vorgehen wie PFEUFFER in [13] bei der entsprechenden Untersuchung für quadratische Formen.

§ 5. Hilfssätze zur Abschätzung der lokalen Maße

Für $v \in P$ ist die Lokalisierung $L_v = L \otimes_K K_v$ von L als K_v-Algebra isomorph zur direkten Summe zweier Exemplare von K_v oder einer quadratischen Körpererweiterung von K_v, je nach dem $\mathfrak{p}_v$ in L zerlegt ist oder nicht. Im ersten Fall erhält man die Isomorphie $L_v \xrightarrow{\sim} K_v \oplus K_v$ durch $x \otimes 1 \mapsto (x,\bar{x})$ $(x \in L)$, was offensichtlich auch eine Isomorphie der ganzen Strukturen $\mathcal{O}_v := \mathcal{O} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_v \xrightarrow{\sim} \mathfrak{o}_v \oplus \mathfrak{o}_v$ induziert. Wir setzen in diesem Fall zur Abkürzung: $e := (1,0)$, $\bar{e} := (0,1)$.

Jedes Element aus L_v bzw. aus $\mathcal{O}_v$ kann dann also geschrieben werden als $\xi e + \eta \bar{e}$ mit $\xi, \eta \in K_v$ bzw. $\in \mathfrak{o}_v$, und die K-Involution $x \mapsto \bar{x}$ von L liefert eine K_v-Involution von L_v mit $\overline{\xi e + \eta \bar{e}} = \eta e + \xi \bar{e}$.

Es sei nun M ein Gitter in dem nicht-entarteten hermiteschen Raum W der Dimension r über $L|K$ mit der Form h und $M_v = M \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_v$, $W_v = W \otimes_K K_v$. h definiert dann eine hermitesche Struktur auch auf M_v, W_v, und man hat im Fall $L_v \cong K_v \oplus K_v$ Zerlegungen $W_v = W_v e + W_v \bar{e}$, $L_v = L_v e + L_v \bar{e}$ von W_v, L_v in direkte Summen von K_v- bzw. $\mathfrak{o}_v$-Moduln. Offensichtlich ist $h(W_v e, W_v e) = h(W_v \bar{e}, W_v \bar{e}) = \{0\}$, und für M_v liefert eine einfache Anwendung des Elementarteilersatzes den folgenden Struktursatz [15, prop. 3.1]:

<u>Hilfsaatz 5.1:</u> Es gibt eine L_v-Basis $\{a_1, \dots, a_r\}$ von W_v und ganze Zahlen $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_r$ derart, daß $M_v = \sum_{i=1}^{r} (\mathfrak{o}_v e + \mathfrak{p}_v^{\sigma_i} \bar{e}) a_i$ und $h(a_i, a_j) = \delta_{i,j}$.

Ist N ein weiteres hermitesches Gitter über $L|K$, so entsprechen die $\mathcal{O}_v$-linearen Abbildungen φ: $N_v \longrightarrow M_v$ eineindeutig den Paaren (φ_1, φ_2) $\mathfrak{o}_v$-linearer Abbildungen $\varphi_1 : N_v e \longrightarrow M_v e$, $\varphi_2 : N_v \bar{e} \longrightarrow M_v \bar{e}$ (man kann $\varphi_1 = \varphi e$, $\varphi_2 = \varphi \bar{e}$ setzen). Bezeichnet man die Form auf N mit k, und sind M_v, N_v ganz, so ist φ Isometrie genau dann, wenn für alle $x \in N_v e$, $y \in N_v \bar{e}$ gilt: $k(x,y) = h(\varphi_1(x), \varphi_2(y))$. Im Fall M = N ist diese Bedingung unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß alle in Hilfssatz 5.1 auftretenden σ_i gleich Null sind, äquivalent damit, daß φ_1, φ_2 bezüglich der Basen

$\{a_i e\}_{i=1,\dots,r}$, $\{a_i \bar{e}\}_{i=1,\dots,r}$ durch Matrizen $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2 \in GL_r(\mathfrak{o}_v)$ mit $\tilde{\varphi}_1\tilde{\varphi}_2 = 1$ dargestellt werden. Die unitäre und die spezielle unitäre Gruppe von M_v sind in diesem Fall also isomorph zu $GL_r(\mathfrak{o}_v)$ und $SL_r(\mathfrak{o}_v)$.

Ist L_v Körpererweiterung von K_v, so müssen wir für die Beschreibung von $\mathcal{O}_v$ die verschiedenen Verzweigungssituationen von $\mathfrak{p}_v$ in L_v unterscheiden. Die folgende Zusammenstellung entnehmen wir [7,§5 u. §9]. Sei $\theta \in K_v^* - K_v^{*2}$ das Quadrat eines Elementes aus L_v, welches L_v über K_v erzeugt, so kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß θ Einheit oder Primelement ist. Im folgenden seien π, p Primelemente in K_v, L_v, und $\{1,\omega\}$ sei eine Ganzheitsbasis von L_v über K_v mit der Diskriminante Δ_v. Sei zunächst $\mathfrak{p}_v$ nicht Teiler von 2 ("Nicht-dyadischer Fall"), so ist $L_v|K_v$ genau dann unverzweigt, wenn $\mathrm{ord}_v\, \theta = 0$ ist. Im verzweigten Fall kann ohne Einschränkung $\theta = \pi$, $\sqrt{\theta} = p$ angenommen werden, und man sieht ohne weiteres, daß in beiden Fällen $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\theta}$ mit $\Delta_v = \theta$ gewählt werden kann.

Ist $\mathfrak{p}_v$ Teiler von 2 ("Dyadischer Fall"), so ist $L_v|K_v$ genau dann unverzweigt, wenn $\mathrm{ord}_v\, \theta = 0$ ist und gleichzeitig der quadratische Defekt $\delta_{K_v}(\theta)$ von θ gleich $4\mathfrak{o}_v$ ist (für die Definition des quadratischen Defektes cf. [7, §5] oder [11, chap. VI, §63A]). In diesem Fall kann ohne Einschränkung $\theta = 1 + 4\delta$ mit einer Einheit δ aus K_v angenommen werden, und daher erhält man mit $\omega := \frac{1+\sqrt{\theta}}{2}$ wegen $|\omega|_v = 1$ in $\{1,\omega\}$ eine Ganzheitsbasis mit der Diskriminante $\Delta_v = \theta$. Falls $\mathrm{ord}_v\, \theta > 0$ ist, liegt der sogenannte "primverzweigte Fall vor. Man kann dann $\theta = \pi$, $\sqrt{\theta} = p$ und $\omega = \sqrt{\theta}$ mit $\Delta_v = 4\theta$ annehmen. Ist dagegen $\mathrm{ord}_v\theta = 0$ und $\delta_{K_v}(\theta) = \pi^{2k+1}\mathfrak{o}_v$ mit $\mathrm{ord}_v 4 > 2k + 1 > 0$, so spricht man vom "einheitsverzweigten" Fall. Es kann $\theta = 1 + \pi^{2k+1}\delta$ mit einer Einheit δ aus K_v und $p = \omega = \pi^{-k}(1 + \sqrt{\theta})$ mit $\Delta_v = 4\pi^{-2k}\theta$ gesetzt werden. Für das Folgende wollen wir uns die exponentielle Bewertung ord_v von K_v auf L_v fortgesetzt denken in der Weise, daß im verzweigten Fall auch halbganze Werte auftreten können: $\mathrm{ord}_v\, p = \frac{1}{2}$; außerdem schreiben wir in diesem Fall $\mathfrak{p}_v^{1/2}\mathcal{O}_v$ für $p\mathcal{O}_v$.

Zunächst einige Bezeichnungen: Für ein hermitesches Gitter M_v über L_v mit der Form h heißt das - möglicherweise gebrochene - L_v-Ideal $sM_v :=$ $= \{ h(x,y) \mid x,y \in M_v \}$ der Teiler von M_v. Für eine halbganze Zahl σ heißt M_v σ-modular, wenn $h(x,M_v) = \mathfrak{P}_v^{\sigma} \mathcal{O}_v$ gilt für jedes $x \in M_v$ mit $x \notin pM_v$, falls $\mathfrak{P}_v$ verzweigt, $x \notin \mathfrak{P}_v M_v$ sonst. - Im unverzweigten Fall können offenbar nur ganze σ auftreten.

Das zu M_v duale Gitter ist $M_v^{\#} := \{ x \in L_v M_v \mid h(x,M_v) \subseteq \mathcal{O}_v \}$. Das Gitter in Hilfssatz 5.1 hat den Teiler $\mathfrak{P}_v^{\sigma_1} \mathcal{O}_v$; es ist genau dann σ-modular, wenn $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_r$ ist. Das duale Gitter ist gerade $\sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{P}_v^{-\sigma_i} e + \mathcal{O}_v \bar{e}) a_i$. Man sieht leicht (cf. [11, chap. VIII, 82:14a]):

<u>Hilfssatz 5.2:</u> Ist M_v σ-modular, so ist $M_v = \{ x \in L_v M_v \mid h(x,M_v) \subseteq \mathfrak{P}_v^{\sigma} \mathcal{O}_v \}$.

Für den Rest dieses Paragraphen seien M, N ganze hermitesche nicht entartete Gitter über $L_v | K_v$ mit $r = \operatorname{rg} M \geq s = \operatorname{rg} N$ und mit den Formen h, k.

Eine $\mathcal{O}_v$-lineare Abbildung $\varphi : N \longrightarrow M$ heißt Isometrie modulo $\mathfrak{p}_v^{\mu}$ (für $\mu \in \mathbb{N}$), falls gilt: $h(\varphi x, \varphi y) = k(x,y) \bmod \mathfrak{p}_v^{\mu}$ für alle $x, y \in N$.

Mit $A_{\mathfrak{p}_v^{\mu}}(M,N)$ bezeichnen wir die Anzahl der mod $\mathfrak{p}_v^{\mu} M$ verschiedenen Isometrien modulo $\mathfrak{p}_v^{\mu}$ von N nach M. Zur Abkürzung setzen wir im Folgenden $\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p}_v$ und beweisen

<u>Hilfssatz 5.3:</u> Es gilt $A_{\mathfrak{p}^{\mu}}(M,N) = \pi_v^{s(2r-s)} A_{\mathfrak{p}^{\mu+1}}(M,N)$, wenn $\mu, \alpha \in \mathbb{N}$, $\mu \geq 2\alpha + 1$ und $\alpha \geq -\operatorname{ord}_v(sN^{\#})$, falls $\mathfrak{p} \nmid 2$ oder $\mathfrak{p}$ zerlegt bzw. $\alpha \geq \operatorname{ord}_v(\sqrt{\Delta_v}(sN^{\#})^{-1})$, falls $\mathfrak{p} | 2$ und $\mathfrak{p}$ unzerlegt ist.

<u>Beweis:</u> Dieser Hilfssatz ist eine Verallgemeinerung und Verschärfung von Hilfssatz 11 in [3]. Wir werden den dort für $K = \mathbb{Q}$ geführten Beweis im wesentlichen übertragen und lediglich anstelle der dort benutzten Ganzheitsbasen unsere oben eingeführten verwenden.

Es sei also α wie in der Behauptung und $\mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geq 2\alpha + 1$. $\varphi : N \longrightarrow M$ sei eine Isometrie mod $\mathfrak{p}^{\mu}$. Dann setzen wir $A(\varphi)$ gleich der Anzahl der mod $\mathfrak{p}^{\mu} M$ verschiedenen Isometrien $\psi : N \longrightarrow M$ mod $\mathfrak{p}^{\mu}$ mit $\psi x \equiv \varphi x \bmod \mathfrak{p}^{\mu-\alpha} M$ für $x \in N$, und $B(\varphi)$ gleich der Anzahl der mod $\mathfrak{p}^{\mu+1} M$ verschiedenen Isometrien $\psi : N \longrightarrow M$ mod $\mathfrak{p}^{\mu+1}$ mit $\psi x \equiv \varphi x \bmod \mathfrak{p}^{\mu-\alpha} M$ für $x \in N$.

Indem man über alle mod $\mathfrak{p}^{\mu-\alpha}M$ verschiedenen φ summiert, erhält man $A_{\mathfrak{p}^{\mu}}(M,N) = \sum_{\varphi} A(\varphi)$, $A_{\mathfrak{p}^{\mu+1}}(M,N) = \sum_{\varphi} B(\varphi)$, so daß es genügt, die Gleichung $B(\varphi) = Nv^{s(2r-s)}A(\varphi)$ zu zeigen. Jede Isometrie $\psi : N \longrightarrow M$ mod $\mathfrak{p}^{\mu}$ mit $\psi x \equiv \varphi x$ mod $\mathfrak{p}^{\mu-\alpha}M$ läßt sich schreiben als $\psi = \varphi + \pi^{\mu-\alpha}\sigma$ mit einer $\mathcal{O}_v$-linearen Abbildung $\sigma : N \longrightarrow M$. Wegen $\mu \geq 2\alpha + 1$ ist $2(\mu - \alpha) \geq \mu + 1$, also ist für alle $x,y \in N$:

$$h(\psi x,\psi y) \equiv h(\varphi x,\varphi y) + \pi^{\mu-\alpha}(h(\varphi x,\sigma y) + h(\sigma x,\varphi y)) \bmod \mathfrak{p}^{\mu+1}.$$

Nach Voraussetzung ist $l(x,y) := \pi^{-\mu}(h(\varphi x,\varphi y) - k(x,y))$ für festes φ eine ganze hermitesche Form auf N, und es ist

$$h(\psi x,\psi y) \equiv k(x,y) + \pi^{\mu}l(x,y) + \pi^{\mu-\alpha}(h(\varphi x,\sigma y) + h(\sigma x,\varphi y)) \bmod \mathfrak{p}^{\mu+1}$$

für alle $x,y \in N$. Damit sind $A(\varphi)$, $B(\varphi)$ gerade die Anzahlen aller σ mod $\mathfrak{p}^{\alpha}M$, die die Kongruenz

(5.1) $\qquad -\pi^{\alpha}\, l(x,y) \equiv h(\varphi x,\sigma y) + h(\sigma x,\varphi y)$ für alle $x,y \in N$

mod $\mathfrak{p}^{\alpha}$ bzw. mod $\mathfrak{p}^{\alpha+1}$ erfüllen. Deren Verhältnis werden wir bestimmen.

Zunächst einmal ist φ injektiv: Ist $\{f_1,\ldots, f_s\}$ Basis von N, so erzeugt der Teiler der Matrix $(k(f_i,f_j))^{-1}$ gerade das Ideal $sN^{\#}$, wegen $\mu > \alpha \geq \mathrm{ord}_v(sN^{\#})^{-1}$ ist daher $\mu + \mathrm{ord}_v(sN^{\#}) > 0$, aus $h(\varphi f_i,\varphi f_j) \equiv k(f_i,f_j)$ mod $\mathfrak{p}^{\mu}$ folgt also

$$(h(\varphi f_i,\varphi f_j))(k(f_i,f_j))^{-1} \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^{\mu+\mathrm{ord}_v(sN^{\#})},$$

und also hat φ maximalen Rang.

Da weiter M ganz ist, ist $M \subseteq M^{\#}$, wir können also φ auch als Abbildung von N in $M^{\#}$ auffassen. Wegen der Injektivität von φ gibt es nach dem Elementarteilersatz Basen $\{f_1,\ldots, f_s\}$ von N und $\{e_1,\ldots, e_r\}$ von $M^{\#}$ sowie Zahlen $d_1,\ldots, d_s \in \mathcal{O}_v$, so daß $\varphi(f_i) = d_i e_i$ für $i=1,\ldots,s$ ist.

Wir überlegen uns als nächsten Schritt, daß die Torsion von $M^{\#}/\varphi N$ nicht zu groß ist, genauer, daß $\mathrm{ord}_v d_i \leq \mathrm{ord}_v(sN^{\#})^{-1}$ für $i=1,\ldots,s$ ist. Denn ist $\mu_i := \mathrm{ord}_v d_i$, so gilt wegen $k(f_j,f_i) \equiv d_i h(d_j e_j,e_i)$ mod $\mathfrak{p}^{\mu}$ und $h(d_j e_j,e_i) = h(\varphi f_j,e_i) \subseteq h(M,e_i) \subseteq \mathcal{O}_v$ die Kongruenz $k(f_j,f_i) \equiv 0$ mod $\mathfrak{p}^{\mu_i'}$ mit $\mu_i' = \min\{\mu,\mu_i\}$, also ist $k(f_j,\pi^{-\mu_i'}f_i) = \pi^{-\mu_i'}\, k(f_j,f_i) \in \mathcal{O}_v$, also $\pi^{-\mu_i'}f_i \in N^{\#}$.

Benutzt man die zu $\{f_i\}$ duale Basis von $N^{\#}$, so sieht man: $\pi^{-\mu_i'} \in sN^{\#}$, also ist $\mu_i' = \min\{\mu, \mu_i\} \leq \mathrm{ord}_v(sN^{\#})^{-1}$, und wegen $\mu > \mathrm{ord}_v(sN^{\#})^{-1}$ folgt $\mathrm{ord}_v d_i \leq \mathrm{ord}_v(sN^{\#})^{-1}$.

Mit dem bisher bewiesenen läßt sich nun die Behauptung des Hilfssatzes zeigen. Denn mit den eben benutzten Basen wird die Kongruenz (5.1) äquivalent zu dem System

$$-\pi^{\alpha} l(f_i, f_j) \equiv d_j h(\sigma f_i, e_j) + \bar{d}_i \overline{h(\sigma f_j, e_i)} \mod \begin{cases} \mathfrak{p}^{\alpha} \\ \mathfrak{p}^{\alpha+1} \end{cases} (i,j=1,\dots,s).$$

Da h nicht entartet ist, ist σ eindeutig durch die Matrix $\sigma_{ij} := h(\sigma f_i, e_j)$ definiert. Hierbei werden die σ_{ij} mit $i > s$ durch die obigen Kongruenzen nicht gebunden, es gibt also mod $\mathfrak{p}^{\alpha+1}$ gerade $\prod v^{2s(r-s)}$-mal so viele Möglichkeiten wie mod $\mathfrak{p}^{\alpha}$. Setzen wir $l_{ij} = l(f_i, f_j)$, so schreibt sich das obige System

$$d_j \sigma_{ij} + \bar{d}_i \overline{\sigma_{ji}} \equiv -\pi^{\alpha} l_{ij} \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq s$$
$$d_i \sigma_{ii} + \bar{d}_i \overline{\sigma_{ii}} = -\pi^{\alpha} l_{ii} \quad \text{für } i=1,\dots,s$$

mod $\mathfrak{p}^{\alpha}$ bzw. mod $\mathfrak{p}^{\alpha+1}$. Das System ($i<j$) läßt sich wegen $\mathrm{ord}_v d_i \leq \alpha$ stets lösen und hat mod $\mathfrak{p}^{\alpha+1}$ genau $\prod v^{s(s-1)}$-mal so viele Lösungen wie mod $\mathfrak{p}^{\alpha}$. Für die restlichen Gleichungen machen wir eine Fallunterscheidung. Sei $\mathfrak{p}$ zunächst in L zerlegt, so schreiben wir $d_i = d_{i1}e + d_{i2}\bar{e}$ und $\sigma_{ii} = \sigma_{i1}e + \sigma_{i2}\bar{e}$ mit $d_{ik}, \sigma_{ik} \in \mathfrak{o}_v$. Wir haben also das System

$$(d_{i1}\sigma_{i1} + d_{i2}\sigma_{i2})e = -\pi^{\alpha} l_{ii} e \qquad (i=1,\dots,s)$$

zu lösen und bekommen ähnlich wie eben wegen $\mathrm{ord}_v d_i \leq \alpha$ mod $\mathfrak{p}^{\alpha+1}$ genau $\prod v^{s}$-mal so viele Lösungen wie mod $\mathfrak{p}^{\alpha}$. Im unzerlegten Fall schreiben wir mit der zu Beginn dieses Paragraphen (p. 22) eingeführten Ganzheitsbasis $\{1, \omega\}$: $\sigma_{ii} = \xi_i + \omega\eta_i$ mit $\xi_i, \eta_i \in \mathfrak{o}_v$ $(i=1,\dots,s)$; unsere Kongruenzen lassen sich also umformen in

$$-\pi^{\alpha} l_{ii} \equiv d_i(\xi_i + \omega\eta_i) + \bar{d}_i(\xi_i + \bar{\omega}\eta_i) = (d_i + \bar{d}_i)\xi_i + (d_i\omega + \bar{d}_i\bar{\omega})\eta_i.$$

Dies System ist mod $\mathfrak{p}^{\alpha+1}$ lösbar und besitzt dann mod $\mathfrak{p}^{\alpha+1}$ genau $\prod v^{s}$-mal so viele Lösungen wie mod $\mathfrak{p}^{\alpha}$, wenn der größte gemeinsame Teiler von $d_i + \bar{d}_i$ und $d_i\omega + \bar{d}_i\bar{\omega}$ auch $\mathfrak{p}^{\alpha}$ teilt.- Nun ist aber

$(d_i\omega + \bar{d}_i\bar{\omega}) - \bar{\omega}(d_i + \bar{d}_i) = d_i(\omega - \bar{\omega}) = d_i\sqrt{\Delta_v}$, somit im unverzweigten und im Fall $\mathfrak{p}|2$: $\alpha \geq \mathrm{ord}_v(\sqrt{\Delta_v}d_i) \geq \min\{\mathrm{ord}_v(d_i\omega + \bar{d}_i\bar{\omega}), \mathrm{ord}_v(d_i + \bar{d}_i)\}$, so daß jetzt nur noch etwas für den Fall $\mathfrak{p}\nmid 2$, $\mathfrak{p}$ in L verzweigt, zu zeigen ist. In diesem Fall setzen wir $d_i = d_{i1} + \omega d_{i2}$, $d_{ik} \in \mathfrak{o}_v$. Dann ergibt sich: $d_i + \bar{d}_i = 2d_{i1}$, $d_i + \bar{d}_i\bar{\omega} = 2\omega^2 d_{i2}$. Ist nun $\mathrm{ord}_v d_{i1} \leq \alpha$, so ist nichts zu zeigen; ist dagegen $\mathrm{ord}_v d_{i1} > \alpha \geq -\mathrm{ord}_v(sN^{\#})$, so ist wegen $\mathrm{ord}_v d_i \leq -\mathrm{ord}_v(sN^{\#})$ notwendig $\mathrm{ord}_v(\omega d_{i2}) \leq -\mathrm{ord}_v(sN^{\#}) \leq \alpha$; da α ganz ist, folgt $\mathrm{ord}_v(\omega d_{i2}) < \alpha$, und somit also $\mathrm{ord}_v(\omega^2 d_{i2}) \leq \alpha$. Zusammenfassend ergibt sich also für das Verhältnis $B(\varphi)/A(\varphi)$ der Wert $\pi_v^{2s(r-s)}\pi_v^{s(s-1)}\pi_v^{s} = \pi_v^{s(2r-s)}$, was zu zeigen war.

Mit diesem Hilfssatz werden wir im nächsten Paragraphen die lokalen Maße modularer Gitter abschätzen. Die im folgenden bewiesenen Aussagen werden die Abschätzung der Maße beliebiger ganzer Gitter auf die 0- oder $\frac{1}{2}$-modularer Gitter zurückführen.

Dazu behalten wir weiterhin die oben fixierten Bezeichnungen bei und definieren darüber hinaus: Ist $P \subseteq M$ ein - möglicherweise entartetes - Untergitter von M und $\mu \in \mathbb{N}$, so sei $\tilde{A}_{\mathfrak{p}^\mu}(M,P)$ die Anzahl aller mod $\mathfrak{p}^\mu M$ verschiedenen Isometrien $\varphi : P \to M$ mod $\mathfrak{p}^\mu$, die mod $\mathfrak{p}^\mu$ eine Fortsetzung auf M besitzen, d.h. zu denen es eine Isometrie $\psi : M \to M$ mod $\mathfrak{p}^\mu$ gibt mit $\psi x \equiv \varphi x$ mod $\mathfrak{p}^\mu M$ für $x \in P$; im Fall $P \subseteq N \subseteq M$ sei $A_{\mathfrak{p}^\mu}(M,N/P)$ die Anzahl der mod $\mathfrak{p}^\mu M$ verschiedenen Isometrien $\varphi: N \to M$ mod $\mathfrak{p}^\mu$ mit $\varphi x \equiv x$ mod $\mathfrak{p}^\mu M$ für $x \in P$.

<u>Hilfssatz 5.4:</u> Ist $M = N \perp N^{\perp}$, $P \subseteq N$, so gilt

$$\tilde{A}_{\mathfrak{p}^\mu}(M,N) \leq \tilde{A}_{\mathfrak{p}^\mu}(M,P)\, A_{\mathfrak{p}^\mu}(M,N/P), \text{ falls } \mu > \mathrm{ord}_v(sM^{\#})^{-1} \text{ ist.}$$

<u>Beweis:</u> Zwei Isometrien $\varphi, \psi: N \to M$ mod $\mathfrak{p}^\mu$ liefern mod $\mathfrak{p}^\mu M$ genau dann die gleiche Einschränkung auf P, wenn $\varphi x \equiv \psi x$ mod $\mathfrak{p}^\mu M$ für $x \in P$ gilt. In diesem Fall setze man ψ fort zu einer Isometrie $\tilde{\psi}: M \to M$ mod $\mathfrak{p}^\mu$. Wie der folgende Hilfssatz zeigt, existiert $\tilde{\psi}^{-1}$, und man sieht leicht: $\tilde{\psi}^{-1} \cdot \varphi : N \to M$ ist Isometrie mod $\mathfrak{p}^\mu$ mit $\tilde{\psi}^{-1}\varphi x \equiv x$ mod $\mathfrak{p}^\mu M$ für $x \in P$. Daraus folgt die Behauptung.

<u>Hilfssatz 5.5:</u> Ist $\varphi : M \longrightarrow M$ Isometrie mod $p(sM^{\#})^{-1}$, so ist φ invertierbar.

<u>Beweis:</u> Bezüglich einer Basis von M werden h, φ durch gewisse Matrizen dargestellt, die wir hier mit den gleichen Symbolen bezeichnen wollen. h^{-1} ist dann die Formenwertmatrix der dualen Basis, der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten von h^{-1} ist also $sM^{\#}$. Die Isometrieeigenschaft von φ besagt gerade $\bar{\varphi}'h\varphi \equiv h \bmod p(sM^{\#})^{-1}$. Multiplikation mit h^{-1} liefert $\bar{\varphi}'h\varphi h^{-1} \equiv 1 \bmod p$, also ist $\det\varphi$ Einheit, und es folgt die Behauptung.

<u>Hilfssatz 5.6:</u> Ist $M = N \perp N^{\perp}$ und N modular mit $\operatorname{ord}_v(sN) < 1$, so gilt

$$A_{\mathfrak{p}^{\mu}}(M,M) \leq \tilde{A}_{\mathfrak{p}^{\mu}}(M,N)\ A_{\mathfrak{p}^{\mu}}(N^{\perp},N^{\perp})\,\pi_v^{2\operatorname{ord}_v(sN)s(r-s)},$$ falls

$\mu > \operatorname{ord}_v(sM^{\#})^{-1}$. (Hier ist wieder $r = \operatorname{rg} M$, $s = \operatorname{rg} N$.)

<u>Beweis:</u> Wir beachten zunächst, daß $\operatorname{ord}_v(sN)$ höchstens im verzweigten Fall von Null verschieden sein kann. Nach Hilfssatz 5.4 ist

$$A_{\mathfrak{p}^{\mu}}(M,M) \leq \tilde{A}_{\mathfrak{p}^{\mu}}(M,N)\ A_{\mathfrak{p}^{\mu}}(M,M/N),$$

es ist also noch

$$A_{\mathfrak{p}^{\mu}}(M,M/N) \leq A_{\mathfrak{p}^{\mu}}(N^{\perp},N^{\perp})\ \pi_v^{2\operatorname{ord}_v(sN)s(r-s)}$$

zu zeigen. Hierzu bezeichnen wir mit p_1, p_2 die Projektionen $M \longrightarrow N$, $M \longrightarrow N^{\perp}$. Ist $\varphi : M \longrightarrow M$ Isometrie mod $\mathfrak{p}^{\mu}$ mit $\varphi y \equiv y \bmod \mathfrak{p}^{\mu}M$ für alle $y \in N$, so bekommt man für alle $x \in M$, $y \in N$:

$$h(y,p_1x) = h(y,x) \equiv h(\varphi y,\varphi x) \equiv h(y,\varphi p_1x) + h(y,\varphi p_2x)$$
$$\equiv h(y,p_1x) + h(y,p_1\varphi p_2x) \bmod \mathfrak{p}^{\mu},$$

also $h(N,p_1\varphi p_2x) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^{\mu}$.

Da N modular ist, gilt nach Hilfssatz 5.2 $N = \{x \in L_vN \mid h(N,x) \subseteq sN\}$. Daher ist - mit $\varrho := 2\operatorname{ord}_v(sN)$ - also $\pi^{\mu}p^{\varrho}p_1\varphi p_2x \in N$, folglich

(*) $$p_1\varphi p_2x \in \pi^{\mu}p^{-\varrho}N \subseteq \pi^{\mu}p^{-\varrho}M.$$

Damit ist für $x,y \in N^{\perp}$ - wegen $\varrho \leq 1$, und weil M ganz ist -:

$h(p_1\varphi x,p_1\varphi y) \in \mathfrak{p}^{2\mu-\varrho} \subseteq \mathfrak{p}^{\mu}$, also

$$h(p_2\varphi x,p_2\varphi y) = h(\varphi x,\varphi y) - h(p_1\varphi x,p_1\varphi y) \equiv h(x,y) \bmod \mathfrak{p}^{\mu},$$

d.h. $p_2\varphi|_{N^{\perp}} : N^{\perp} \longrightarrow N^{\perp}$ ist Isometrie mod $\mathfrak{p}^{\mu}$. Zwei mod $\mathfrak{p}^{\mu}M$ verschiedene Isometrien $\varphi, \psi : M \longrightarrow M$ mod $\mathfrak{p}^{\mu}$ mit $\varphi x \equiv x \equiv \psi x \bmod \mathfrak{p}^{\mu}M$ für $x \in N$ müssen sich mod $\mathfrak{p}^{\mu}M$ bereits in ihrer Einschränkung auf $N^{\perp}$ unterscheiden; (*)

zeigt, daß höchstens $\mathcal{N}v^{\varsigma s(r-s)}$ mod $\mathfrak{p}^{\mu}M$ verschiedene φ das mod $\mathfrak{p}^{\mu}N^{\perp}$ gleiche $p_2\varphi|_{N^{\perp}}$ liefern können.

Hilfssatz 5.7: Ist $M = N \perp N^{\perp}$, N modular, $sN^{\perp} \subseteq psN$, so ist

$$A_{\mathfrak{p}^{\mu}}(M,N) \leq \mathcal{N}v^{2\mu s(r-s)} A_{\mathfrak{p}^{\mu}}(N,N).$$

Beweis: p_1, p_2 seien wie im letzten Beweis definiert.- Es gilt für eine Isometrie $\varphi : N \longrightarrow M$ mod $\mathfrak{p}^{\mu}$

$$h(x,y) \equiv h(\varphi x,\varphi y) = h(p_1\varphi x,p_1\varphi y) + h(p_2\varphi x,p_2\varphi y) \bmod \mathfrak{p}^{\mu},$$

also $h(x,y) = h(p_1\varphi x,p_1\varphi y)$ mod psN für alle $x,y \in N$ wegen $h(p_2\varphi x,p_2\varphi y) \in sN^{\perp} \subseteq psN$. Da N modular ist, ist $sN = (sN^{\#})^{-1}$, somit ist $p_1\varphi : N \longrightarrow N$ invertierbar (nach Hilfssatz 5.5).

Ist $\psi : N \longrightarrow M$ ebenfalls Isometrie mod $\mathfrak{p}^{\mu}$, und gilt $p_2\varphi x \equiv p_2\psi x$ mod $\mathfrak{p}^{\mu}M$ für alle $x \in N$, so ist $p_1\varphi(p_1\psi)^{-1}$ Isometrie mod $\mathfrak{p}^{\mu}$ von N in sich, denn für $x,y \in N$ ist

$$\begin{aligned}
&h(p_1\varphi(p_1\psi)^{-1}x,p_1\varphi(p_1\psi)^{-1}y) \equiv \\
&\qquad \equiv h((p_1\psi)^{-1}x,(p_1\psi)^{-1}y) - h(p_2\varphi(p_1\psi)^{-1}x,p_2\varphi(p_1\psi)^{-1}y) \\
&\qquad \equiv h((p_1\psi)^{-1}x,(p_1\psi)^{-1}y) - h(p_2\psi(p_1\psi)^{-1}x,p_2\psi(p_1\psi)^{-1}y) \\
&\qquad \equiv h(p_1\psi(p_1\psi)^{-1}x,p_1\psi(p_1\psi)^{-1}y) = h(x,y) \quad \bmod \mathfrak{p}^{\mu}.
\end{aligned}$$

Zwei mod $\mathfrak{p}^{\mu}M$ verschiedene φ liefern also entweder verschiedene $p_2\varphi : N \longrightarrow N^{\perp}$ - hierfür gibt es $\mathcal{N}v^{2\mu r(r-s)}$ Möglichkeiten, oder sie unterscheiden sich um eine Isometrie mod $\mathfrak{p}^{\mu}$ von N, wofür $A_{\mathfrak{p}^{\mu}}(N,N)$ Möglichkeiten in Frage kommen.

Hilfssatz 5.8: Sind für $\alpha \in K^{*}$ mit M, N auch $\alpha\circ M$, $\alpha\cdot N$ ganz, so gilt für

$$\mu > \operatorname{ord}_v\alpha : A_{\mathfrak{p}^{\mu}}(\alpha\circ M,\alpha\circ N) = \mathcal{N}v^{2\operatorname{ord}_v\alpha sr} A_{\mathfrak{p}^{\mu-\operatorname{ord}_v\alpha}}(M,N).$$

(Dabei wird unter $\alpha\circ M$ das Gitter M, versehen mit der hermiteschen Form αh, verstanden.)

Beweis: $A_{\mathfrak{p}^{\mu}}(\alpha\cdot M,\alpha\cdot N)$ ist die Anzahl aller mod $\mathfrak{p}^{\mu}M$ verschiedenen $\mathcal{O}_v$-linearen $\varphi : N \longrightarrow M$ mit $\alpha h(\varphi x,\varphi y) \equiv \alpha k(x,y)$ mod $\mathfrak{p}^{\mu}$ oder äquivalent $h(\varphi x,\varphi y) \equiv k(x,y)$ mod $\mathfrak{p}^{\mu-\operatorname{ord}_v\alpha}$ für alle $x,y \in N$. Ein $\varphi : N \longrightarrow M$ mod $\mathfrak{p}^{\mu-1}M$ zerfällt mod $\mathfrak{p}^{\mu}M$ in $\mathcal{N}v^{2rs}$ verschiedene Klassen, also folgt die Behauptung.

Der Hilfssatz 5.3 besagt, daß der Ausdruck $\mathcal{N}v^{-\mu r^2} A_{\mathfrak{p}^\mu}(M,M)$ für genügend großes μ von μ unabhängig, also gleich der lokalen Darstellungsdichte $a_v(M)$ wird.

Ist nun $M = N \perp N^\perp$, N modular mit $sN = p^\varrho \mathfrak{p}^\sigma \mathcal{O}_v$ (wo $\varrho = 0$ oder 1, $\varrho \neq 0$ höchstens dann, wenn $\mathfrak{p}$ in L verzweigt), so schätzt man für genügend großes μ unter der Voraussetzung $sN^\perp \subseteq psN$ ab:

$A_{\mathfrak{p}^{\mu+\sigma}}(M,M) = A_{\mathfrak{p}^\mu}(\pi^{-\sigma}\cdot M, \pi^{-\sigma}\cdot M)\, \mathcal{N}v^{2\sigma r^2}$ (Hilfssatz 5.8)

$\leq \tilde{A}_{\mathfrak{p}^\mu}(\pi^{-\sigma}\cdot M, \pi^{-\sigma}\cdot N)\, A_{\mathfrak{p}^\mu}(\pi^{-\sigma}\cdot N, \pi^{-\sigma}\cdot N)\, \mathcal{N}v^{2\sigma r^2 + \varrho s(r-s)}$ (Hilfssatz 5.6)

$\leq A_{\mathfrak{p}^\mu}(\pi^{-\sigma}\cdot N, \pi^{-\sigma}\cdot N) A_{\mathfrak{p}^\mu}(\pi^{-\sigma}\cdot N, \pi^{-\sigma}\cdot N)\, \mathcal{N}v^{2\sigma r + (\varrho + 2\mu) s(r-s)}$ (Hilfssatz 5.7),

folglich gilt $a_v(M) \leq \mathcal{N}v^{\varrho s(r-s) + \sigma r^2} a_v(\pi^{-\sigma}\cdot N) a_v(\pi^{-\sigma}\cdot N)$.

Ist $M = M_1 \perp \ldots \perp M_t$ eine Zerlegung von M in modulare Komponenten mit $sM_{i+1} \subseteq psM_i$ für $i=1, \ldots, t-1$ (eine solche Zerlegung existiert stets: Ist $\mathfrak{p}$ in L_v zerlegt, so wird sie gerade durch Hilfssatz 5.1 geliefert, ansonsten cf. [7,§4]), und setzt man $\sigma_0 = \bar{r}_{t+1} = 0$, $sM_i = p^{\varrho_i} \mathfrak{p}^{\sigma_i} \mathcal{O}_v$ $(0 \leq \varrho_i \leq 1)$, $r_i = \operatorname{rg} M_i$, $\bar{r}_i = \operatorname{rg}(M_i \perp \ldots \perp M_t)$ für $i=1, \ldots, t$, so erhält man durch Induktion

<u>Hilfssatz 5.9:</u> Mit den obigen Bezeichnungen ist

$$a_v(M) \leq \mathcal{N}v^{\sum_{i=1}^{t}(\varrho_i r_i \bar{r}_{i+1} + (\sigma_i - \sigma_{i-1})\bar{r}_i^{\,2})} \prod_{i=1}^{t} a_v(\pi^{-\sigma_i}\cdot M_i).$$

Mit diesem Hilfssatz lassen sich die lokalen Maße beliebiger ganzer Gitter abschätzen, wenn man die Maße 0- und $\frac{1}{2}$-modularer Gitter kennt. Diese sollen im nächsten Paragraphen abgeschätzt werden.

§ 6. Maße modularer Gitter

Wir behalten die bisher eingeführten Bezeichnungen weiter bei. Am einfachsten lassen sich die Maße unimodularer Gitter abschätzen. Denn für die Fälle, daß $\mathfrak{p}$ nicht Teiler von 2 oder aber in L zerlegt ist, sagt Hilfssatz 5.3, daß bereits $a_v(M) = \mathcal{N}v^{-r^2} A_{\mathfrak{p}}(M,M)$ für unimodulares M ist.
Nun ist aber $A_{\mathfrak{p}}(M,M)$ gerade die Anzahl der rationalen Punkte der modulo $\mathfrak{p}$ reduzierten unitären Gruppe über dem Restklassenkörper. (Für die Definition der Reduktion modulo $\mathfrak{p}$ cf. [17, chap. II].)
Ist $\mathfrak{p}$ in L zerlegt, so ist dies gerade die allgemeine lineare Gruppe, und man erhält $A_{\mathfrak{p}}(M,M) = \mathcal{N}v^{r^2} \prod_{i=1}^{r} (1 - \mathcal{N}v^{-i})$.
Ist $\mathfrak{p}$ träge in L, so ist die reduzierte Gruppe gerade die unitäre Gruppe über der quadratischen Erweiterung von $\mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}$. Wir entnehmen [5, p.49] die Anzahl der rationalen Punkte: $A_{\mathfrak{p}}(M,M) = \mathcal{N}v^{r^2} \prod_{i=1}^{r} (1 - (-\mathcal{N}v)^{-i})$. Mithin gilt:

<u>Hilfssatz 6.1:</u> Ist $\mathfrak{p}$ kein Teiler von 2 und unverzweigt, und ist M unimodular, so ist $a_v(M) = \prod_{i=1}^{r} (1 - ((\frac{\theta}{\mathfrak{p}})\mathcal{N}v)^{-i}) \leq 1 - (\frac{\theta}{\mathfrak{p}})\mathcal{N}v^{-1}$.

Wir nehmen nun an, daß $\mathfrak{p}$ kein Teiler von 2 ist, aber die Diskriminante von L|K teilt. Dann werden die unimodularen Gitter M gerade durch [7, prop. 8.1a)] beschrieben. Bezeichnet für $a \in K$ das Symbol $\langle a \rangle$ den Modul $\mathcal{O}_v$ mit der Form $(x,y) \longrightarrow \bar{x}ya$ (für $x,y \in \mathcal{O}_v$) und E_q die q-fache orthogonale Summe von $\langle 1 \rangle$, so ist $M = E_{r-1} \perp \langle \varepsilon \rangle$ mit $\varepsilon \in \mathfrak{o}_v^*$.
Nach Hilfssatz 5.6 bekommt man mittels Induktion

$$A_{\mathfrak{p}}(M,M) \leq A_{\mathfrak{p}}(M,\langle \varepsilon \rangle) \prod_{q=1}^{r-1} A_{\mathfrak{p}}(E_q,\langle 1 \rangle).$$

$A_{\mathfrak{p}}(M,\langle \varepsilon \rangle)$ ist die Anzahl aller mod $\mathfrak{p}$ verschiedenen $(x_1,\dots,x_r) \in \mathcal{O}_v^r$ mit $\sum_{i=1}^{r-1} \bar{x}_i x_i + \varepsilon \bar{x}_r x_r \equiv \varepsilon \bmod \mathfrak{p}$. Schreiben wir $x_i = \xi_i + \omega\eta_i$ mit der in Paragraph 5 eingeführten Ganzheitsbasis und mit $\xi_i, \eta_i \in \mathfrak{o}_v$, so ist die obige Kongruenz äquivalent zu

$$\sum_{i=1}^{r-1} \xi_i^2 + \varepsilon \xi_r^2 \equiv \varepsilon \bmod \mathfrak{p}, \tag{6.1}$$

da $\omega^2 \in \mathfrak{p}$ ist. Die η_i sind also frei wählbar, es ergeben sich $\mathcal{N}v^r$ Möglichkeiten. Die Lösungsanzahlen von (6.1) entnehmen wir Hilfssatz 56 in [16] und erhalten damit

$$A_{\mathfrak{p}}(M,\langle\varepsilon\rangle) = \begin{cases} \mathcal{N}v^{2r-1}\left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right)\left[\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)\mathcal{N}v^{-1}\right]^{\frac{r}{2}}\right) & \text{falls } r \text{ gerade,} \\ \mathcal{N}v^{2r-1}\left(1 + \left[\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)\mathcal{N}v^{-1}\right]^{\frac{r-1}{2}}\right) & \text{falls } r \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Man bekommt also

<u>Hilfssatz 6.2:</u> Ist $\mathfrak{p}$ kein Teiler von 2 und in L verzweigt, so gilt für

unimodulares $M = E_{r-1} \perp \langle\varepsilon\rangle$

$$a_v(M) \leq \begin{cases} 2\left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right)\left[\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)\mathcal{N}v^{-1}\right]^{\frac{r}{2}}\right)\prod\limits_{i=1}^{\frac{r}{2}-1}\left(1 - \mathcal{N}v^{-2i}\right) & \text{falls } r \text{ gerade,} \\ 2\prod\limits_{i=1}^{\frac{r-1}{2}}\left(1 - \mathcal{N}v^{-2i}\right) & \text{falls } r \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Insbesondere ist $a_v(\langle 1\rangle) = 2$.

Es ist nun der Fall zu betrachten, daß M $\frac{1}{2}$-modular ist. Weiterhin sei $\mathfrak{p}$ kein Teiler von 2. Nach [7, prop. 8.1 b)] ist M dann isomorph einer direkten Summe von hyperbolischen Ebenen H mit einer Formenwertmatrix $\begin{pmatrix} 0 & p \\ \bar{p} & 0 \end{pmatrix}$.

Die Hilfssätze 5.3, 5.6 liefern

$$a_v(M) = \mathcal{N}v^{-3r^2} A_{\mathfrak{p}^3}(M,M),$$

$$A_{\mathfrak{p}^3}(M,M) \leq \mathcal{N}v^{\frac{r^2}{2}-r} \prod_{\varrho=1}^{r/2} \tilde{A}_{\mathfrak{p}^3}(H^\varrho, H).$$

Hierbei ist H^ϱ die orthogonale Summe von ϱ Exemplaren von H.

Sei e,f eine Basis von H mit der Formenwertmatrix $\begin{pmatrix} 0 & p \\ \bar{p} & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist nach Hilfssatz 5.4

$$\tilde{A}_{\mathfrak{p}^3}(H^\varrho, H) \leq \tilde{A}_{\mathfrak{p}^3}(H^\varrho, \mathcal{O}_v e)\; A_{\mathfrak{p}^3}(H^\varrho, H/\mathcal{O}_v e).$$

Da $\mathfrak{p}$ kein Teiler von 2 ist, ist $\bar{p} = -p$, und daher ist $\tilde{A}_{\mathfrak{p}^3}(H^\varrho, \mathcal{O}_v e)$ gerade die Anzahl der mod $\mathfrak{p}^3$ verschiedenen Lösungen $x_i, y_i \in \mathcal{O}_v$ $(i=1,\dots,\varrho)$ mit $p \sum\limits_{i=1}^{\varrho} (\bar{x}_i y_i - x_i \bar{y}_i) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^3$, wobei nicht alle x_i, y_i gleichzeitig durch p teilbar sein dürfen, da, wie man leicht sieht, andernfalls die zugehörige Abbildung $\mathcal{O}_v e \longrightarrow H^\varrho$ keine Fortsetzung zu einer Isometrie mod $\mathfrak{p}^3$ besäße. Schreiben wir $x_i = x_{i1} + px_{i2}$, $y_i = y_{i1} + py_{i2}$ mit $x_{ik}, y_{ik} \in \mathfrak{o}_v$ (denn $\{1, p\}$ ist Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_v$ über $\mathfrak{o}_v$), so haben wir äquivalent dazu die Anzahl der mod $\mathfrak{p}^3$ verschiedenen Lösungen von

$$(6.2)\qquad \sum_{i=1}^{\varsigma} (x_{i1}y_{i2} - x_{i2}y_{i1}) \equiv 0$$

mod $\mathfrak{p}^2$ zu bestimmen, für die nicht alle x_{i1}, y_{i1} gleichzeitig in $\mathfrak{p}$ liegen dürfen. Diese Zahl ist offenbar gleich dem $\mathfrak{N}v^{4\varsigma}$-fachen der mod $\mathfrak{p}^2$ verschiedenen Lösungen von (6.2) mod $\mathfrak{p}^2$ mit der gleichen Bedingung an x_{i1}, y_{i1}. Unter Benutzung dieser Bedingung liefert ein Schluß vom Typ des HENSELschen Lemmas, daß die Zahl der mod $\mathfrak{p}^2$ verschiedenen Lösungen von (6.2) mod $\mathfrak{p}^2$ gleich dem $\mathfrak{N}v^{4\varsigma-1}$-fachen der Zahl der mod $\mathfrak{p}$ verschiedenen Lösungen von (6.2) mod $\mathfrak{p}$ ebenfalls unter der Teilbarkeitsbedingung an x_{i1}, y_{i1} ist.

Nennen wir für $a \in \mathfrak{o}_v$ die Anzahl der mod $\mathfrak{p}$ verschiedenen Lösungen der Kongruenz $\sum_{i=1}^{\varsigma} (x_{i1}y_{i2} - x_{i2}y_{i1}) \equiv a \mod \mathfrak{p}$ $B_\varsigma(a)$, so ist also $A_{\mathfrak{p}^3}(H^\varsigma, \mathcal{O}_v e) \leq \mathfrak{N}v^{8\varsigma-1}\,(B_\varsigma(0) - \mathfrak{N}v^{2\varsigma})$.

Für $B_\varsigma(a)$ bestätigt man leicht die Formeln

$$B_\varsigma(a) = \begin{cases} (\mathfrak{N}v^{2\varsigma} - 1)\mathfrak{N}v^{2\varsigma-1} & \text{falls } a \not\equiv 0 \mod \mathfrak{p}\,, \\ B_\varsigma(1) + \mathfrak{N}v^{2\varsigma} & \text{falls } a \equiv 0 \mod \mathfrak{p} \end{cases}$$

für $\varsigma = 1$ direkt und für $\varsigma > 1$ durch Induktion mit der offensichtlichen Beziehung $B_\varsigma(a) = \sum_{b \bmod \mathfrak{p}} B_{\varsigma-1}(a-b)\,B_1(b)$.

Also ist

$$\widetilde{A}_{\mathfrak{p}^3}(H^\varsigma, \mathcal{O}_v e) = \mathfrak{N}v^{12\varsigma-2}\,(1 - \mathfrak{N}v^{-2\varsigma}).$$

$A_{\mathfrak{p}^3}(H^\varsigma, H/\mathcal{O}_v e)$ ist die Anzahl der φf mod $\mathfrak{p}^3 H^\varsigma$ mit $h(\varphi f, e) \equiv h(f,e) \mod \mathfrak{p}^3$ und $(\varphi f, \varphi f) \equiv 0 \mod \mathfrak{p}^3$.

Die erste Kongruenz ist äquivalent mit

$$\varphi f - f \in (\mathcal{O}_v e)^{\perp} + \mathfrak{p}^3 H^\varsigma = \mathcal{O}_v e \perp H^{\perp} + \mathfrak{p}^3 H \quad,$$

was bedeutet, daß $\varphi f \equiv f + ae + z \mod \mathfrak{p}^3 H^\varsigma$ mit $a \in \mathcal{O}_v$, $z \in H^{\perp} \cong H^{\varsigma-1}$ ist.

φf erfüllt die zweite Kongruenz offenbar genau dann, wenn (mit $a = a_1 + pa_2$, $a_i \in \mathfrak{o}_v$) gilt:

$$0 \equiv p(a - \bar{a}) + h(z,z) \equiv 2\pi a_2 + h(z,z) \mod \mathfrak{p}^3.$$

Nun ist $h(z,z) \in \mathfrak{p}$, somit ist $z \in H^{\varsigma-1}$ frei wählbar und a_2 mit z eindeutig fixiert. a_1 ist ebenfalls frei wählbar, was insgesamt zu

$\pi_v^3 \, \pi_v^{12(\varrho-1)} = \pi_v^{12\varrho-9}$ Möglichkeiten der Wahl von φf mod $\mathfrak{p}^3 H^\varrho$ führt.

Insgesamt ist

$$A_{\mathfrak{p}^3}(M,M) \leq \pi_v^{\frac{r^2}{2}-r} \prod_{\varrho=1}^{\frac{r}{2}} \pi_v^{24\varrho-11}(1 - \pi_v^{-2\varrho}) \leq \pi_v^{\frac{1}{2}(7r^2-r)} \prod_{\varrho=1}^{\frac{r}{2}} (1 - \pi_v^{-2\varrho}).$$

Daher ist bewiesen

Hilfssatz 6.3: Ist $\mathfrak{p}$ kein Teiler von 2 und in L verzweigt, so gilt für

$\frac{1}{2}$-modulare Gitter $a_v(M) \leq \pi_v^{\frac{r}{2}(r-1)}$.

Es sei nun $\mathfrak{p}$ Teiler von 2 und $e_v := \mathrm{ord}_v 2$. Für ein 0- oder $\frac{1}{2}$-modulares Gitter M ist dann, wie die Zusammenstellung zu Beginn von § 5 zeigt, $\mathrm{ord}_v(\sqrt{\Delta_v}(sM^\#)^{-1}) \leq e_v + 1$, und daher ist nach Hilfssatz 5.3

$$a_v(M) = \pi_v^{-(2e_v+3)r^2} A_{\mathfrak{p}^{2e_v+3}}(M,M).$$

Mit der trivialen Abschätzung $A_{\mathfrak{p}^\mu}(M,M) \leq \pi_v^{2\mu r^2}$ ergibt sich

$$a_v(M) \leq \pi_v^{(2e_v+3)r^2}.$$

§ 7. Die Abschätzung der Klassenzahlen

Wir setzen mit den in den beiden letzten Paragraphen bewiesenen Hilfssätzen die Überlegungen von § 4 fort und schätzen das Maß $\Omega(g_M^+)$ in (4.5) nach oben ab, um untere Schranken für die Klassenzahl von M zu finden.

Zunächst betrachten wir das Produkt $\prod_{v\in P}[U_{1,K_v}:\det U_h(M_v)]\frac{a_v(M)}{a_v(\langle 1\rangle)}$.

Der Gruppenindex $[U_{1,K_v}:\det U_h(M_v)]$ ist jedenfalls dann gleich 1, wenn es eine Zerlegung $M_v = \langle a\rangle \perp N$ mit $a\in\omega_v$ gibt. Nach [7, prop. 4.4] und nach Hilfssatz 5.1 ist das stets möglich, falls $\mathfrak{p}_v$ in L unverzweigt oder zerlegt ist, und im verzweigten Fall zumindest dann, wenn $\mathfrak{p}_v$ nicht 2 teilt und in der modularen Zerlegung von M_v ein σ-modulares Gitter mit ganzzahligem σ auftritt (d.h. wenn eines der in Hilfssatz 5.9 auftretenden ς_i gleich Null ist).

In den anderen Fällen läßt sich M_v stets orthogonal zerlegen in ein zweidimensionales Gitter und einen Rest [7, prop. 4.3], so daß gilt:

$$[U_{1,K_v}:\det U_h(M_v)] \leq [U_{1,K_v}:U_{1,K_v}{}^2].$$

Im Fall $\mathfrak{p}_v\nmid 2$, $\mathfrak{p}_v$ verzweigt in L läßt sich der zweite Index leicht bestimmen: Ist $x\in U_{1,K_v}$, so ist $x\equiv\pm 1 \bmod p\mathcal{O}_v$. Gibt es ein $y\in\mathcal{O}_v^*$ mit $y^2=x$, so ist offenbar $y\bar{y}=\pm 1$, und da, wie man leicht verifiziert, $y^2\equiv y\bar{y}$ mod $p\mathcal{O}_v$ ist, hat man $x\equiv y\bar{y} \bmod p\mathcal{O}_v$. Ist nun $x\equiv +1 \bmod p\mathcal{O}_v$, so ist x Quadrat in $\mathcal{O}_v^*$, also sogar in U_{1,K_v}. Im Fall $x\equiv -1 \bmod p\mathcal{O}_v$ hat jedes y mit $y^2=x$ die Norm -1. Also ist $[U_{1,K_v}:U_{1,K_v}{}^2]=2$.

Im Fall $\mathfrak{p}_v|2$, $\mathfrak{p}_v$ verzweigt in L ergibt sich mit der Abkürzung $U_1 = U_{1,K_v}$:

$$[U_1:U_1{}^2] = [U_1\cap\mathcal{O}_v^{*2}:U_1{}^2][U_1:U_1\cap\mathcal{O}_v^{*2}] \leq 2[U_1:U_1\cap\mathcal{O}_v^{*2}]$$
$$= 2[U_1\mathcal{O}_v^{*2}:\mathcal{O}_v^{*2}] \leq 2[\mathcal{O}_v^*:\mathcal{O}_v^{*2}] = 4\pi_v^{2\operatorname{ord}_v 2}$$

(die letzte Gleichung folgt beispielsweise aus [11, 63:9]).- Man hat also für in L verzweigtes $\mathfrak{p}_v$

$$(7.1)\qquad [U_{1,K_v}:U_{1,K_v}{}^2]\begin{cases} = 2 & \text{falls } \mathfrak{p}_v\nmid 2,\\ \leq 4\pi_v^{2\operatorname{ord}_v 2} & \text{falls } \mathfrak{p}_v|2.\end{cases}$$

$a_v(M)/a_v(\langle 1\rangle)$ schätzen wir unter Zuhilfenahme der Aussagen des letzten Paragraphen ab mit Hilfssatz 5.9 und den dort eingeführten Bezeichnungen. Es ist (für ganze Gitter M mit rg M > 1):

$$(7.2)\qquad \frac{a\ (M)}{a_v(\langle 1\rangle)} \leq \begin{cases} (1+\pi_v^{-1})^{t-1}\,\pi_v^{\sum_{i=1}^{t}(\sigma_i-\sigma_{i-1})\overline{r}_i^{\,2}} \\ 2^{t'-1}(1+\pi_v^{-1})^{t''}\,\pi_v^{\sum_{i=1}^{t}(\varrho_i[r_i\overline{r}_{i+1}+(r_i/2)(r_i-1)]+(\sigma_i-\sigma_{i-1})\overline{r}_i^{\,2})} \\ \pi_v^{\sum_{i=1}^{t}\varrho_i(r_i\overline{r}_{i+1})+(\sigma_i-\sigma_{i-1})\overline{r}_i^{\,2}+(2e_v+3)(r_i^2+1)} \end{cases}.$$

(Die erste Zeile gilt im Fall $\mathfrak{p}_v \nmid 2$, unverzweigt, die zweite im Fall $\mathfrak{p}_v \nmid 2$, verzweigt, die dritte, falls $\mathfrak{p}_v | 2$.)

Hierin ergibt sich der erste Fall unmittelbar aus Hilfssatz 6.1, im zweiten Fall muß man die Hilfssätze 6.2, 6.3 anwenden, und es bedeuten t' die Anzahl der ganzzahlig-modularen Komponenten von M (d.h. der Komponenten M_i mit $\varrho_i = 0$) und t" die Anzahl derjenigen unter diesen Komponenten, die geraden Rang haben.

Eine einfache Induktion zeigt; $\sum_{i=1}^{t} r_i\overline{r}_{i+1} \leq \frac{r}{2}(r-1)$, also ist

$$\sum_{i=1}^{t}\varrho_i r_i\overline{r}_{i+1} \leq \frac{r}{2}(r-1) - 2(t''-1).$$

Für die π_v-Exponenten von (7.2) bekommt man daher die Abschätzung

$$(7.3)\qquad \sum_{i=1}^{t}\varrho_i\left(r_i\overline{r}_{i+1}+\frac{r_i}{2}(r_i-1)\right)+(\sigma_i-\sigma_{i-1})\overline{r}_i^{\,2} \leq$$
$$\leq \frac{r}{4}(r-1)-(t''-1)+\sum_{i=1}^{t}\left(\frac{\varrho_i r_i}{2}+(\sigma_i-\sigma_{i-1})\overline{r}_i\right)\overline{r}_i.$$

Hierbei wurde $\overline{r}_i = r_i + \overline{r}_{i+1}$ benutzt.

Den zweiten Summanden schätzen wir noch weiter ab: Für eine beliebige reelle Zahl x mit $0 < x < 1$ ist

$$(7.4)\qquad \sum_{i=1}^{t}\left(\frac{\varrho_i r_i}{2}+(\sigma_i-\sigma_{i-1})\overline{r}_i\right)\overline{r}_i =$$
$$= \left(\frac{\varrho_1 r_1}{2}+\sigma_1 r\right)x + \sum_{i=1}^{t}\left(\frac{\varrho_i r_i}{2}+(\sigma_i-\sigma_{i-1})\overline{r}_i\right)(r-x)$$
$$- \sum_{i=2}^{t}\left(\frac{\varrho_i r_i}{2}+(\sigma_i-\sigma_{i-1})\overline{r}_i\right)(r-\overline{r}_i-x)$$
$$= \left(\frac{\varrho_1}{2}+\sigma_1\right)rx + (r-x)\sum_{i=1}^{t}\left(\frac{\varrho_i r_i}{2}+(\sigma_i-\sigma_{i-1})\overline{r}_i\right) - (t-1)(1-x)$$

(wegen $\frac{\varrho_i r_i}{2} + (\sigma_i - \sigma_{i-1})\overline{r}_i \geq 1$ für i=1, ..., t und $r - \overline{r}_i - x \geq 1 - x$ für

$i \geq 2$). - Wählt man hierin x so, daß $3^{1-x} \geq 2$, so ist für alle $\mathfrak{p}_v \nmid 2$ auch $\pi_v^{1-x} \geq 2$.

Durch Zusammenfassen der Abschätzungen (7.3), (7.4) erhält man also unter Berücksichtigung von

$$\sum_{i=1}^{t}\left(\frac{\varrho_i r_i}{2}+(\sigma_i - \sigma_{i-1})\bar{r}_i\right) = \sum_{i=1}^{t}\left(\frac{\varrho_i}{2} + \sigma_i\right) r_i = \mathrm{ord}_v(\vartheta M_v) \text{ und } \frac{\varrho_1}{2} + \sigma_1 = \mathrm{ord}_v(sM_v)$$

aus (7.2) die Abschätzung

$$(7.5) \qquad \frac{a_v(M)}{a_v(\langle 1\rangle)} \leq c_v |\Delta_v|_v^{-(r/4)(r-1)-\frac{1}{3}}\, |sM_v|_v^{-r}\, |\vartheta M_v|_v^{-(r-x)}$$

mit $c_v = \pi_v^{(2e_v+3)(r+1)}$, falls $\mathfrak{p}_v | 2$, $c_v = 1$ sonst.

Der Index $[U_{1,K_v} : \det U_h(M_v)]$ ist für ungerades $\mathfrak{p}_v$ nicht größer als 2 und ungleich 1 höchstens dann, wenn $\mathfrak{p}_v$ in L verzweigt und $\varrho_i = 1$, $2 | r_i$ für alle $i=1,\dots,t$ gilt. In diesem Fall ist in (7.2) $t'' = t' = 0$, und die obige Abschätzung (siehe (7.4)) zeigt, daß die rechte Seite von (7.5) sogar noch eine obere Schranke für $[U_{1,K_v} : \det U_h(M_v)]\,(a_v(M)/a_v(\langle 1\rangle))$ ist. Für $\mathfrak{p}_v | 2$ zeigte (7.1), daß $[U_{1,K_v} : \det U_h(M_v)] \leq 4\pi_v^{2e_v}$ ist, und daher ist

$$\prod_{v\in P}[U_{1,K_v} : \det U_h(M_v)]\,\frac{a_v(M)}{a_v(\langle 1\rangle)} \leq \pi\vartheta(L|K)^{\frac{r}{4}(r-1)+\frac{1}{3}}\,(\pi sM)^{rx}(\pi\vartheta M)^{r-x}(2^{n(5r^2+9)}).$$

Setzt man dies in (4.5) ein, so erhält man

$$\Omega(g_M^+) \leq d^{-\frac{r^2-1}{2}}\left(2^{5r^2+9}\prod_{j=2}^{r}\frac{(2\pi)^j}{(j-1)!}\right)^n (\pi\vartheta(L|K))^{-\frac{r}{2}+\frac{5}{6}}(\pi sM)^{rx}(\pi\vartheta M)^{-x}.$$

Zusammen mit der Maßformel (1.1) und mit $\tau(SU_h) = 1$ (cf. [17]) ergibt sich hieraus eine untere Schranke für die Klassenzahl $h(SU_h, g_M^+)$ von M:

$$(7.6) \qquad h(SU_h, g_M^+) = \sqrt{d}^{\,r^2-1}\left(2^{5r^2+9}\prod_{j=2}^{r}\frac{(2\pi)}{(j-1)!}\right)^{-n}(\pi\vartheta(L|K))^{\frac{r}{2}-\frac{5}{6}}(\pi sM^{-r}\pi\vartheta M)^{x}.$$

Für die Abschätzung des zweiten Faktors der rechten Seite in (7.6) kann man die STIRLINGsche Formel verwenden. Hiernach ist

$$\log k! \geq (k + \tfrac{1}{2})\log k - k + \tfrac{1}{2}\log 2,$$

und eine Rechnung ähnlich der in [13, § 4.2] ergibt

$$(7.7) \qquad \log\left(2^{-(5r^2+9)}\prod_{j=2}^{r}(j-1)!\,(2\pi)^{-j}\right) \geq \frac{r^2}{2}\log r + O(r^2).$$

Nach einer Diskriminantenabschätzung von ROGERS ist mit der Körperdiskriminante d auch der Grad n beschränkt (cf. [13, § 4.2]); es ist

(7.8) $\log\sqrt{d} = \frac{3}{2}n + O(\log n)$.

Da in (7.6) die beiden letzten Faktoren nach unten durch 1 beschränkt sind, haben wir also das folgende Ergebnis: Nach (7.7) gibt es ein r_0, so daß für alle $r \geq r_0$ der zweite Faktor der Schranke in (7.6) größer als 1 ist (für alle n), und (7.6) zusammen mit (7.8) zeigt, daß $h(SU_h, g_M^+)$ für beliebiges h und ganzes M nur für eine endliche Menge von Zahlen n, d, also nur für endlich viele Zahlkörper K unter einer vorgegebenen Schranke bleiben. Ist $r < r_0$, so sieht man an (7.6), daß jedenfalls für festes n nur endlich viele Körper K existieren, so daß $h(SU_h, g_M^+)$ beschränkt bleibt.- Betrachtet man (7.6) für festes K, so sieht man wieder mit (7.7), daß die untere Schranke für die Klassenzahlen nur für beschränktes r beschränkt bleiben kann. Ebenso kommen nur endlich viele Körpererweiterungen L infrage. Der letzte Faktor der Schranke ist wie die Klassenzahl eine Invariante der Ähnlichkeitsklasse des Gitters M, und wegen $\varkappa > 0$ sind auch hierfür nur endlich viele Werte möglich. Beschränkt man insbesondere den Teiler von M, so ist bei festem r die Diskriminantennorm beschränkt. Insgesamt ist also bewiesen:

Satz 3: a) Es gibt eine natürliche Zahl r_0 mit folgender Eigenschaft: Totaldefinite, ganze, nicht entartete, hermitesche Gitter M beschränkter Klassenzahl (in bezug auf die spezielle unitäre Gruppe) sind für rg $M \geq r_0$ höchstens über endlich vielen totalreellen Zahlkörpern K, für rg $M < r_0$ höchstens über endlich vielen solchen K vorgegebenen Grades n möglich.

b) Ist K ein fester solcher Körper, so gibt es hierüber nur endlich viele quadratische Erweiterungen L, über denen totaldefinite, ganze, nicht entartete, hermitesche Gitter M beschränkter Klassenzahl möglich sind; und für festes L kann dabei die Diskriminante von M höchstens einer endlichen Menge von Idealen entstammen, wenn man den Teiler von M beschränkt.

Literatur

[1] S. BÖGE: Schiefhermitesche Formen über Zahlkörpern und Quaternionen-schiefkörpern; Crelle 221 (1966) pp. 85-112

[2] A. BOREL: Some Finiteness Properties of Adele Groups over Number Fields; I.H.E.S., Publ. Math. 16 (1963) pp. 5-30

[3] H. BRAUN: Zur Theorie der hermiteschen Formen; Abh. Math. Sem. Hamburg 14 (1941) pp. 61-150

[4] F. BRUHAT: $\mathfrak{p}$-adic Groups; Proc. of Symp. in Pure Math. Vol. IX (Boulder), Providence, R. I. (1966)

[5] J. DIEUDONNÉ: La géométrie des groupes classiques; Erg. d. Math., Berlin-Göttingen-Heidelberg (1955)

[6] M. EICHLER: Quadratische Formen und orthogonale Gruppen; Grundl. d. math. Wiss. 58, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1952)

[7] R. JACOBOWITZ: Hermitian Forms over Local Fields; Am. J. Math. 84 (1962) pp. 441-465

[8] M. KNESER: Klassenzahlen indefiniter quadratischer Formen in drei oder mehr Veränderlichen; Arch. Math. 7 (1956) pp. 323-332

[9] E. LANDAU: Abschätzungen von Charaktersummen, Einheiten und Klassen-zahlen; Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. Göttingen (1918)

[10] S. LANG: Algebraic Groups over Finite Fields; Am. J. Math. 78 (1956) pp. 555-563

[11] O.T. O'MEARA: Introduction to Quadratic Forms; Grundl. d. math. Wiss. 117, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1965)

[12] T. ONO: Onthe Relative Theory of Tamagawa Numbers; Ann. Math. 82 (1965) pp. 88-111

[13] H. PFEUFFER: Einklassige Geschlechter totalpositiver quadratischer Formen in totalrellen algebraischen Zahlkörpern (Diss.) Göttingen (1969)

[14] J.P. SERRE: Lie Algebras and Lie Groups; Harvard Lecture Notes, New York-Amsterdam (1965)

[15] G. SHIMURA: Arithmetic of Unitary Groups; J. Math. Soc. Japan 15 (1963) pp. 33-65

[16] C.L. SIEGEL: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen III; Ann.Math. 38 (1937) pp. 212-291

[17] A. WEIL: Adeles and Algebraic Groups; Lecture Notes, Princeton (1961)

Lebenslauf

Ich wurde am 9. Mai 1943 in Berlin als Sohn des Amtmannes Heinrich Rehmann und seiner Ehefrau Käthe, geb. Spanger, beboren. Von 1949 bis 1953 besuchte ich die Grundschule in Bockenem am Harz, danach verschiedene Gymnasien zunächst in Hildesheim, dann in Dortmund, wo ich im Frühjahr 1963 die Reifeprüfung ablegte. Anschließend absolvierte ich einen zweijährigen Wehrdienst bei der Bundeswehr.

Im Sommersemester 1965 begann ich in Göttingen das Studium der Mathematik. Nach der Vordiplomprüfung im Mai 1967 beschäftigte ich mich unter Anleitung von Herrn Professor Kneser mit Fragen der Arithmetik algebraischer Gruppen. Im Mai 1969 legte ich die Diplomprüfung ab und arbeitete seitdem an meiner Dissertation, seit Juli 1970 als Assistent an der Fakultät für Mathematik an der Universität Bielefeld.

Meine akademischen Lehrer waren hauptsächlich die Herren Professoren Behr, Deuring, Grauert, Grunwald, Kneser, Maak, Remmert, Pfister, Zassenhaus.