Quadrate

Denkspiele aus aller Welt (5)

(Zusammenfassung)

Claus Michael Ringel

Es gibt eine Vielzahl von Denkspielen, von Gedulds- und Geschicklichkeitsspielen, die einen mathematischen Hintergrund besitzen. Das Verständnis der jeweiligen mathematischen Grundprinzipien gibt dem Mathematiklehrer die Möglichkeit, derartige Materialen gezielt im Unterricht einzusetzen, andererseits können auf diese Weise Grundbegriffe der Mathematik anschaulich erläutert werden. Beim Arbeiten mit Denkspielen lernt man sehr viel über die Entwicklung von Lösungsstrategien, auch erhält man auf man auf diese Weise interessante Problemstellungen, deren Komplexität abgeschätzt und ziemlich beliebig variiert werden kann.

In diesem fünften Teil haben wir uns Denkspielen und Puzzles zugewandt, bei denen Quadrate eine grundlegende Rolle spielen. Viele Legespiele, wie das klassische Tangram, sind quadratisch — aber es ist nicht nur die äußere Form, an die hier zu denken ist, die Zerlegung selbst betont wichtige Eigenschaften eines Quadrats, etwa dass sich die Diagonalen rechtwinklig schneiden, und die auftretenden Schwierigkeiten bei den üblichen Legeaufgaben kommen von der Inkommensurabilität von Kantenlängen her, also dem Auftreten der Quadratwurzel $\sqrt{2}$. In der Mathematik, in Algebra und Zahlentheorie, in Geometrie und Kombinatorik spielen Quadrate eine wichtige Rolle: thematisiert wurde hier also auch das Zusammenspiel von Algebra und Geometrie.

Im folgenden notieren wir stichwortartig die im Vortrag behandelten Themenstellungen, jeweils gefolgt von einer kleinen Literaturliste. Die vorgestellten Materialien sind alle im Internet unter

$\boxed{\text{http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/}\sim\text{ringel/puzzle/puzzle02/index.htm}}$

zugänglich.

Abgrenzung

Vieles muss ausgespart bleiben. Nicht behandelt werden Quadrate, die dekoriert sind: etwa durch Farben oder Zahlen, also magische Quadrate, Buchstabenquadrate, orthogonale lateinische Quadrate, 3x3-Puzzle ("Heads and Tails"), entsprechend auch alle anderen Sorten von Puzzles, die Quadrate mit Kantenmarkierungen verwenden. Auch weitere Abgrenzungen sind notwendig.

SEDIMA-Vortrag, Bielefeld, Dezember 2002.

1. Der Satz von Pythagoras

Das Logo des ICM 2002 in Beijing. Die Vorlage aus dem Zhou bi (Mathematischer Kanon des Zhou Gnomon, ein Buch zur Astronomie und zur Mathematik). Der (geometrische) Satz von Pythagoras als direkte Folgerung der (rein algebraischen) binomischen Formel (und diese wiederum kann geometrisch interpretiert werden): ALGEBRA ist GEOMETRIE ist ALGEBRA. Der neolithische Ursprung und die Beweise in Sanskrit, in China und in Griechenland.

Ist der Satz von Pythagoras ein Satz über Quadrate? Nicht nur! Analoge Sätze: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Halbkreise (Sechsecke, Kringel, ...) über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Halbkreises (Sechsecke, Kringel, ...) über der Hypotenuse. Naber's Beweis. Holz-Puzzles: Fünf Quadrate, Griechisches Kreuz, Plus, usw.

Literatur:

- Christopher Cullen: Learning from Liu Hui? A different way to do mathematics. Notices A.M.S. August 2002, p.783-790. With an appendix about the cover by Bill Casselmann.
- B.L. van der Waerden: Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. Springer-Verlag. Berlin 1983.
- Christian Nöth: Beweistechniken an der Satzgruppe des Pythagoras: http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼vollrath/Didaktik/pythagoras/

2. Tangram

Zur Geschichte: Ch'i Ch'ae pan (oder Siebenschlau). Namensgebung. Großproduktion durch die Anker-Werke. Tangram im Schul-Unterricht, die Studie *Principles and Standards for School Mathematics* von NCTM, Empfehlungen aus den Jahren 1861 und 1864.

Mathematische Aufgabenstellungen: die Einzelflächen, konvexe Tangrams, Zwillings-Tangrams, unmögliche Figuren, Eindeutigkeitsbeweise, Tangram-Paradoxe, Normierungen, Konvexitätsdefekt. Analoge Puzzles: Shape-by-shape, Sei Shonagan Chie-No-Ita und viele andere. Loculus von Archimedes. Grand Tans: Lässt sich aus diesen Steinen ein Quadrat legen? Umformulierung: Ist $\sqrt{1+\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$? Wurzeln und Körpererweiterungen. Quadratische Körpertürme. Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ (ohne Verwendung von Primfaktorzerlegungen).

Literatur:

- Joost Elffers: Tangram. Das alte chinesische Formenspiel. Dumont 1976, und 1996.
- Ronald C. Read: Tangrams. 330 Puzzles. Cover Publications. New York (1965).
- Daniel Picon: Tangram. 7 pieces plus de 1000 figures. Fontaine.Mango. Paris 1997.
- Dominic Olivastro: Das chinesische Dreieck. Die kniffligsten mathematischen Rätsel aus 10 000 Jahren. Droemer Knaur (1995)
- http://tangrams.ca/tanhist.htm (by Randy Crawford)
- Aufgaben eines Mathematik-Kurses http://mathforum.org/trscavo/tangrams/area.html
- Hoffmann' Puzzles: Old and New. London 1893. (Nachdruck, ed. by L.E.Hordern, 1993.)
- J.Botermans, J. Slocum: Geduldspiele der Welt. Hugendubel 1987.
- Shigeo Takagi: Japanese Tangrams: The Sei Shonagon Pieces. In: E. Berlekamp and T. Rodgers (ed.): The Mathemagician and Pied Puzzler. A collection in tribute to Martin Gardner. A.K.Peters. Natick 1999. p.97-98

Einschub: Differenzen von Quadratzahlen

Das Gnomon als Differenz zweier Quadrate. Wie konstruiert man das arithmetische Mittel zweier positiver Zahlen? Die Pell'sche Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$ (Pell, Euler, Lagrange). Diophant und Brahmagupta. Das Rinder-Problem des Archimedes (die Pell'sche Gleichung mit d = 410 286 423 278 424). Große Zahlen, Lenstra's Formel.

Literatur:

- Lenstra: Solving the Pell Equation. Notices of the A.M.S. 49 (2002), 182-192.
- Lenstra: MSRI Vortrag
  http://www.msri.org/publications/ln/msri/2000/introant/lenstra/1/

3. Summen von Quadraten

Die Summe der ersten N Quadratzahlen: $\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N-1)}{6}$. Brahmagupta (598-670). Algebraischer Beweis. Geometrischer Beweis von Giorgio Goldoni. Würfel-Drittelung durch kongruente Pyramiden: Yong-ma.

Literatur:

- Giogio Goldoni: A visual proof for the sum of the first n squares and for the sum of the first n factorials of order two. In Math. Intelligencer 24 (2002), 67-69.
- Polya: Mathematical Discovery, vol 1. chap.3

4. Gleichgroße Quadrate

Gegeben seien N qleichgroße Quadrate, sie sollen ohne Überlappungen in ein Quadrat mit kleinstmöglicher Kantenlänge $b = b(N)$ eingepasst werden. Aufgabe: Man bestimme $b(N)$. Der Fall $N = 10$, wieder spielt $\sqrt{2}$ eine Rolle. Der Fall $N = 11$.

Literatur:

- I. Moscovich: Geometrie als Spiel oder der Satz von Pythagoras. Otto Maier Verlag. Ravensburg 1984.

5. Streichholz-Puzzles

Eine typische Aufgabenstellung: Entfernen von Streichhölzern aus einem Quadratraster, um einige (oder alle) Quadrate zu zerstören.

Literatur:

- MoGu: http://home.t-online.de/home/320045474463-0001/
- Knobel-Ecke: http://www.knobelecke.de/knobelecke/index.htm
- Sam Loyd: Sam Loyd and His Puzzles. New York 1928, p.49
- Hemme: Das Problem des Zwölf-Elfs. Göttingen 1998, Nr.89

6. Quadrat-Zerlegungen von Rechtecken

Die Formel $\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N-1)}{6}$ liefert für $N = 24$ die Quadratzahl 70^2. Ist es möglich, die Quadrate mit Seitenlängen $1, 2, \ldots, 24$ ohne Überlappungen in ein Quadrat mit Seitenlänge 70 zu legen? Man kann 23 dieser Quadrate einpassen, zum Beispiel alle bis auf das Quadrat mit Kantenlänge 7. Allgemeinere Frage: Gegeben seien m paarweise verschiedene Quadrate. Wann lassen sie sich zu einem Quadrat (oder zumindest einem Rechteck) zusammenfügen? Antwort: Um ein Rechteck zu erhalten, muss $m = 9$ gelten, um ein Quadrat zu erhalten sogar $m = 21$. Zwei Lösungen für $m = 9$. Wie kann man aus den entsprechenden Zeichnungen die Quadratlängen bestimmen? Zum Beispiel als Lösung eines homogenen Gleichungssystems! Induktiver Lösungsansatz. Die Briefmarke zum ICM 1998 in Berlin.

Literatur:

- F.L.Bauer: Mathematisches Kabinett. Deutsches Museum. München 1999.
- H.-W. Henn: Realitätsbezug im Mathematikunterricht. In: Mathematik. Lehren und Lernen nach TIMSS (ed. Flade, Herget). Volk und Wissen 13-24.
- I. Moscovich: Geometrie als Spiel oder der Satz von Pythagoras. Otto Maier Verlag. Ravensburg 1984.

Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld,

POBox 100 131,

D-33 501 Bielefeld

Germany

E-mail address: ringel@mathematik.uni-bielefeld.de