

# Verschlungenes.

## Denkspiele aus aller Welt (6)

(Zusammenfassung)

CLAUS MICHAEL RINGEL

**Man sieht nur, was man weiß:** Viele mathematische Forschungs-Institute in der ganzen Welt zeigen Kunstwerke oder beeindruckende mathematische Modelle, die symbolhaft grundlegende mathematische Ideen vermitteln sollen und häufig handelt es sich dabei um topologische Sachverhalte. Und es gibt Gedulds- und Geschicklichkeitsspiele, die einen entsprechenden mathematischen Hintergrund besitzen. Der Vortrag möchte einige Grundvorstellungen der Topologie erläutern, die geometrische und kombinatorische Sachverhalte klären.

Im folgenden notieren wir die angesprochenen Fragestellungen und geben (zum Teil allerdings nur stichwortartig) die behandelten Antworten wieder. Die im Vortrag vorgestellten Materialien, insbesondere eine Fülle von Illustrationen, findet man im Internet unter der Adresse

<http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~ringel/puzzle/puzzle03/Welcome.htm>

Als erstes also ein Hinweis auf Kunstwerke und mathematische Modelle, mit denen sich einige mathematische Forschungs-Institute schmücken:

- Vor dem Fields-Institut in Toronto steht eine Metall-Skulptur von John Robinson: drei Dreiecke sind unauflösbar verwoben, obwohl sie sich paarweise nicht durchdringen. Könnte man eines dieser Dreiecke entfernen, so werden die beiden übrigen sich voneinander lösen, so aber sind sie untrennbar. Entsprechende Skulpturen findet man im Newton Institute in Cambridge und im Aspen Institute in Colorado.
- Im CRM Barcelona, wie auch in Bangor (Wales) gibt es entsprechende ineinandergeschachtelte Vierecke. Bei diesen Dreiecken und Vierecken handelt es sich um Abwandlungen der klassischen Borromäischen Ringe.
- Nahe des Eingangs zum Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach im Schwarzwald steht das Modell einer Boy'schen Fläche. Sie wurde von Boy, einem Schüler Hilberts beschrieben und ist eine Realisierung einer reellen projektiven Ebene im dreidimensionalen Raum (natürlich mit Selbstdurchdringungen).

Eines der Ziele dieses Vortrages soll sein, den mathematischen Kontext solcher Werke zu erläutern. Und entsprechend sollen Puzzles mit topologischem Hintergrund, wie Schnur-Puzzles und Flexagone analysiert werden. Eines der Leitthemen

---

SEDIMA-Vortrag, Bielefeld, Dezember 2003.

wird dabei das Auftreten von Möbius-Bändern sein. Insgesamt wird sich zeigen: **Man sieht nur, was man weiß.** Und andererseits: **Was man sehen kann, versteht man besser.**

**1. Das Möbius-Band.** Benannt nach August Ferdinand Möbius (1790 - 1868). Es entsteht bekanntlich aus einem rechteckigen Papierstreifen durch Verkleben des linken Endes mit dem rechten Endes, dabei wird aber vorher eines der beiden Enden einmal verdreht.

- Wohlbekannte Fragen: Was passiert, wenn man das Möbiusband entlang der Mittellinie zerschneidet?
- Und was passiert, wenn man versucht es zu dritteln?
- Eine etwas subtilere Frage: Der Rand eines Möbius-Bands ist topologisch gesehen ein Kreis. Frage: Kann man im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  ein Möbius-Band (ohne Selbstdurchdringungen) konstruieren, dessen Rand ein echter Kreis, zum Beispiel der Einheitskreis, ist? (oder ein Dreieck oder Viereck...)
- Und auch: Gibt es eine geschlossene Fläche, die man so zerschneiden kann, dass man zwei Möbius-Bänder erhält?

Um das Möbius-Band aus einem Streifen mit den Ecken links  $a$  und  $b$ , rechts  $a'$  und  $b'$  (dabei seien  $a, a'$  die oberen Ecken,  $b$  und  $b'$  die unteren Ecken) zu erhalten, werden die beiden vertikalen Kanten verklebt und zwar wird  $a$  mit  $b'$  und  $b$  mit  $a'$  identifiziert. Dies kann man aber auf mehrere ganz verschiedene Weisen machen — je nach der Anzahl der Verdrehungen (und der Drehrichtung), die man vornimmt! Mit  $B_0$  bezeichnen wir das geschlossene Band, das aus unserem Papierstreifen entsteht, wenn man keinerlei Verdrehungen vornimmt (und also  $a$  mit  $a'$  und  $b$  mit  $b'$  indentifiziert: dies ist also einfach ein Zylinder. Entsprechend entstehe  $B_n$  aus dem Papierstreifen, indem man vor dem Zusammenkleben die rechte Seite  $n$  mal verdreht (dabei ist  $n$  eine ganze Zahl; für positives  $n$  drehe man entgegen dem Uhrzeigersinn, für negatives  $n$  drehe man  $|n|$ -mal im Uhrzeigersinn). Als topologische Räume sind diejenigen Bänder  $B_n$ , für die  $n$  eine gerade Zahl ist, alle topologisch äquivalent, ebenso sind die Bänder  $B_n$  mit  $n$  ungerade alle topologisch äquivalent (dabei heißen zwei topologische Räume  $X, Y$  *topologisch äquivalent*, wenn es eine bijektive Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  gibt, die stetig ist und deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist; eine solche Abbildung nennt man auch einen Homöomorphismus). Dagegen sind die Bänder  $B_0$  und  $B_1$  nicht topologisch äquivalent! (Ganz außer Acht lassen wir hier, dass ein solches verdrehtes Band zusätzlich auch noch verknotet sein kann.)

**Exkurs über Knoten.** Was ist ein Knoten? Eine Einbettung der Kreislinie in den dreidimensionalen reellen Raum  $\mathbb{R}^3$  (man nennt dies auch eine Schlinge oder Schlaufe). Zwei Knoten  $K, K'$  heißen *äquivalent*, wenn es einen Homöomorphismus  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gibt, der  $K$  auf  $K'$  abbildet. Und  $K$  heißt *unverknotet*, wenn  $K$  zum Einheitskreis in der x-y-Ebene äquivalent ist. Unter <http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/scharein/knot-theory/knot-theory.html> gibt es eine Animation, die zeigt, dass ein recht kompliziert aussehender Knoten unverknotet

sein kann — man kann dies aber auch zum Beispiel mit Hilfe von dynamischer Geometrie-Software verifizieren.)

Und betrachten wir mehrere Knoten gleichzeitig, so kann man entsprechend nach der *Verschlingungszahl* fragen.

**2. Schnur-Puzzles.** Schnurpuzzles waren schon im 18. Jahrhundert beliebt, im Buch *Teufelsspiele* von Thiele-Haase ist ein entsprechender Holzschnitt abgedruckt. Und Schnurpuzzles findet man in den verschiedensten Kulturen, insbesondere sind afrikanische Schnurpuzzles berühmt (siehe Botermans-Slocum: *Geduldspiele der Welt* und van Delft-Botermans: *Denkspiele der Welt*).

Es gibt ein Buch, das der Verwendung von Schnurpuzzles im Mathematik-Unterricht gewidmet ist: *Exploring Math Through Puzzles* von Wei Zhang.

Die Komplexität von Schnurpuzzles: man kann recht einfach Komplexitätsstufen definieren. Analoge Puzzles aus Draht. Von S. Coffin stammen zwei "Achter-Puzzles": auf den ersten Blick erscheinen sie fast identisch, eines besitzt eine Lösung, das andere nicht!

Conway's Trickfilm-Methode (nach Berlekamp-Conway-Guy): man stelle sich vor, man arbeite mit einem Zauberspiegel, der den starren Draht ein wenig verbiegt, um die Lösung zu erleichtern! (mit einem Spiegel wie auf dem Jahrmarkt, der den Raum auf merkwürdige Weise deformiert). Statt die Schlinge zu manipulieren, verbiegen wir die Drähte geeignet ("wenn der Berg nicht zu Mohammed kommt, geht eben Mohammed zum Berg"). Die Trickfilm-Methode besteht darin, das Verbiegen der Drähte und das Rückverbiegen schrittweise als Film aufzuzeichnen und dabei zu verfolgen, was mit der Schlinge passiert.

**Zurück zum Möbius-Band.** Wir hatten gefragt, ob es möglich ist, im  $\mathbb{R}^3$  ein Möbius-Band (ohne Selbstdurchdringungen) zu konstruieren, dessen Rand ein echter Kreis, zum Beispiel der Einheitskreis, ist? Verwende wir den Conway'schen Inversionstrick! Es ist einfach zu sehen (und zu beweisen), dass die Randkurve des Möbiusbands unverknotet ist (dass es also eine topologische Äquivalenz des  $\mathbb{R}^3$  auf sich gibt, die die Randkurve in den Einheitskreis überführt). Also folgt, dass das in der Aufgabe geforderte Möbiusband wirklich existiert. (Es explizit anzugeben, ist natürlich eine andere Sache...)

Sucht man nach Hinweisen auf das Möbius-Band, so landet man oft bei esoterischen Texten - und bei viel Unsinn! Hier ein Ausschnitt aus einem Text der "Wissenschaftlichen Buchgesellschaft" (aus einem Katalog mit dem Titel *Kunst und Kultur*, Bremen 2004): *Das "Möbiusband", dem Symbol für die Unendlichkeit, hat eine erstaunliche Eigenschaft: fährt man nämlich mit dem Finger am Band entlang, gelangt man ohne den Rand zu überschreiten immer wieder zum Ausgangspunkt. Unsere Vorstellungen von rechts und links bzw. von Ober- und Unterseits werden auf den Kopf gestellt.* Da staunt man natürlich: Ist ein Möbiusband ein "Symbol der Unendlichkeit", so ist das auch jeder Ring, jeder Zylinder, . . . . Und was sollte daran erstaunlich sein, dass man *ohne den Rand zu überschreiten immer wieder zum Ausgangspunkt* gelangt? Die gleiche Eigenschaft hat jedes geschlossene Band! (Relevant dagegen ist der Satzsatz.)

Es gibt eine Fülle von Kunstwerken, die Möbiusbänder darstellen, so etwa der “Koloss von Frankfurt” (etwa 5 Meter hoch) von Max Bill (1908-1994), er wurde 1986 aufgestellt und erweist sich als vielfach gewundenes Möbius-Band. Wie auch andere Werke von Max Bill. Und natürlich von Escher...

Die Auflösung der Fragen. Schneidet man das Möbiusband  $B_1$  entlang der Mittellinie, so erhält man das doppelt-verdrehte Band  $B_2$ . (Allerdings ist das Band  $B_2$ , das man aus  $B_1$  durch den Halbierungsversuch erhält, doppelt so lang und halb so breit wie  $B_1$ ). Beim Versuch, das Möbiusband  $B_1$  zu dritteln, erhält man zwei Komponenten: das innere Drittel liefert wieder ein Möbiusband  $B_1$  der gleichen Länge (aber geringerer Breite); die beiden äußeren “Drittel” bilden zusammen ein einziges Band, das offensichtlich ein doppelt-verdrehtes Band  $B_2$  ist. Zusätzlich gilt: die beiden Komponenten hängen ineinander und lassen sich nicht voneinander trennen.

Möbius-Bänder mit dem Einheitskreis als Rand: Dafür gibt es zwei verschiedene Bastelbögen. Beim ersten ist der Rand ein Quadrat (und man sieht dem Bastelbogen sehr einfach an, dass es sich um ein Möbiusband handelt), beim zweiten Bogen ist der Rand ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck.

**3. Flexagone.** Flexagone sind Papierstreifen, die zusammengeklebt wurden und nun durch geschicktes Falten ganz verschiedene Ansichten produzieren. Zum Beispiel beginnt man mit einem farbigen Sechseck, das durch Falten zu einer Raute wird, die man wieder zu einem Sechseck enthaften kann. Durch derartiges Zusammenfalten und Neu-Entfalten erhält man immer neue Farben: Insgesamt gibt es (nach dem Zusammenkleben) 9 Dreiecke mit Vorder- und Rückseite, also 18 färbare Dreiecke, etwa 6 rote, 6 blaue und 6 gelbe Dreiecke — durch das Falten und Entfalten sieht man nacheinander alle diese Dreiecke, sowohl diejenigen, die zur Vorder- wie die, die zur Rückseite des Papierstreifens gehörten.

Die Klappsequenz, die bei der Konstruktion des Flexagons verwandt wird, kann dabei gerade der Bildung eines Möbiusbands entsprechen, und zwar dem Band  $B_3$ , das durch dreifaches Verdrehen entsteht. Falten und Entfalten bedeuten dabei, dass man im Möbiusband gerade eine Stelle nach rechts wandert!

Zur Geschichte: Es wird berichtet, dass die ersten Flexagone von Arthur Stone 1939 entwickelt wurden: Er war damals Graduate Student in Princeton.

Aber es gibt auch andere Flexagone, zum Beispiel ein recht einfaches Flexagon, das zwei Papierstreifen mit jeweils 5 Quadraten verwendet, wobei es sich aber um das Band  $B_2$  handelt, also um kein Möbiusband!

**4. Borromäische Ringe.** Drei Ringe, die paarweise unverknotet sind — sich aber dennoch nicht voneinander trennen lassen. Der Name verweist auf das italienische Adelsgeschlecht der Borromäer, die diese Ringe als Familienwappen verwendeten. Es gibt schöne Beispiele in Cremona wie auch in Mailand. Aber auch die Wikinger verwendeten derartige Symbole. Auf die vielfältigen Skulpturen von John Robinson wurde einleitend hingewiesen. Und man kann derartige Konfigurationen verwenden, um interessante Aufgaben zur Linearen Algebra zu kreieren.

**Einschub: Kompakte, randlose, triangulierbare Flächen.** Klassifikation: Jede solche Fläche entsteht aus der 2-Sphäre durch Anheftung von “Henkeln” und von Möbius-Bändern (man spricht meist von “Kreuzhauben”) und das Anheften einer Kreuzhaube und eines Henkels liefert das Gleiche wie das Anheften dreier Kreuzhauben. Es gibt also folgende Liste:

- $F_t$  (mit  $t \geq 0$ ) entsteht aus der 2-Sphäre durch Anheftung von  $t$  Henkeln.
- $N_t$  (mit  $t \geq 1$ ) entsteht aus der 2-Sphäre durch Anheftung von  $t$  Kreuzhauben.

Betrachtet man eine derartige Fläche  $F$  mit  $e$  Ecken,  $k$  Kanten und  $f$  Flächen, so ist die “Euler-Charakteristik”  $\chi(F) = e - k + f$  eine wichtige Invariante. Es ist

$$\chi(F_t) = 2 - 2t \quad \text{und} \quad \chi(N_t) = 2 - t.$$

Kennt man die Euler-Charakteristik  $\chi(F)$ , so gilt:

- Ist  $\chi(F)$  ungerade, so ist  $F$  eindeutig bestimmt:  $F = N_{2-\chi(F)}$ .
- Ist  $\chi(F)$  gerade, etwa  $\chi(F) = 2n$ , so gilt  $F = F_{1-n}$  oder  $F = N_{2-2n}$ . Wie unterscheidet man diese beiden Fälle? Man prüft: ist in  $F$  ein Möbiusband einbettbar, so ist  $F = N_{2-2n}$ , ist in  $F$  kein Möbiusband einbettbar, so ist  $F = F_{1-n}$ .

**Die 2-Sphäre  $F_0$ .** Es ist  $\chi(F_0) = 2$ , man nennt dies die Euler’schen Polyederformel. So erhält man etwa für die platonischen Körper:

	$e$	$k$	$f$	$\chi(F)$
Tetraeder	4	6	4	2
Würfel	8	12	6	2
Oktaeder	6	12	8	2
Dodekaeder	20	30	12	2
Isokaeder	12	30	20	2

Entsprechend kann man die archimedischen Körper (oder auch die dazu dualen Körper) analysieren. Und es gibt eine Fülle derartiger Holzpuzzles (zum Beispiel hergestellt von Arjeu).

**Torus  $F_1$  und Kleinsche Flasche  $N_2$ .** Wir erhalten diese beiden Flächen aus einem Rechteck, wenn wir Kanten identifizieren - wie bei den Bändern  $B_n$ , nur eben nicht nur ein Paar gegenüberliegender Kanten, sondern beide Paare.

**Die reelle projektive Ebene  $N_1$ .** Es gibt mehrere Realisierungen im dreidimensionalen Raum, allerdings immer mit Selbstdurchdringungen!

Zum Beispiel das **Heptaeder** (hepta = 7, ein Heptaeder ist also ein Siebenflächner): Wir beginnen mit einem Oktaeder mit den Ecken 0,1,2,3,4,5 und den Dreiecken 012, 023, 034, 041, 125, 235, 345, 045. Wähle 4 paarweise nicht benachbarte Dreiecke; zum Beispiel 012, 034, 235, 145. Nun fügen wir vier Quadratflächen hinzu:

- das erste habe die Kanten 10,03,35,51;
- das zweite habe die Kanten 20,04,45,52;

- das dritte die Kanten 12,23,34,45.

Bei der üblichen Realisierung des Oktaeders im  $\mathbb{R}^3$  (mit Ecken auf den Koordinatenachsen) sind die Durchdringungen der Quadratflächen (entlang der Koordinatenachsen) wegzudenken. Das Heptaeder hat, wie das Oktaeder, 12 Kanten und 6 Ecken.

Oder: Die **Steiner'sche Römerfläche**. Eine Animation der Steiner'schen Römer-Fläche von M. R. Sudduth, University of Texas at Arlington findet man unter [http://www.uta.edu/optics/sudduth/4d/nonorientable/steiners\\_roman\\_surface/steiners\\_roman\\_surface.htm](http://www.uta.edu/optics/sudduth/4d/nonorientable/steiners_roman_surface/steiners_roman_surface.htm).

Und endlich: Die **Boy'sche Fläche**. Hilbert hatte vermutet, dass es keine Immersion der Fläche  $N_1$  in den 3-dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  geben könne. Sein Schüler Werner Boy sollte dies in seiner Dissertaion zeigen - das Ergebnis war ein anderes: Boy konstruierte eine Immersion, die sogenannte Boy'sche Fläche. Ein Modell davon steht auf dem Rasen zwischen den Gebäuden in Oberwolfach.

Und man sollte daran denken, dass die reelle projektive Ebene auch im Schulunterricht eine Rolle spielt (wenn auch nur verdeckt): in der Geometrie bei den Kegelschnitten, in der Analysis bei den gebrochen rationalen Funktionen!

**Noch einmal: Das Möbius-Band.** Was passiert, wenn wir die Klein'sche Flasche halbieren, und zwar durch einen Schnitt, um zwei spiegelbildliche Hälften zu erhalten? Jede dieser Hälften ist ein Möbiusband! Die Kleinsche Flasche ist die Verheftung zweier Möbius-Bänder entlang deren Ränder.

**5. Uniforme Polyeder.** Ein Fußbodenmosaik aus dem Eingangsbereich von San Marco in Venedig nach einem Entwurf von Paolo Uccello (um 1445) ist die erste bekannte Darstellung des kleinen Sterndodekaeders.

Uniforme Polyeder sind durch polygonale (insbesondere also ebene) Flächenstücke gegeben, die an den Kanten zusammenstoßen, sodass gilt:

- Die Flächenstücke sind regulär (müssen aber nicht konvex sein — erlaubt ist also zum Beispiel ein Pentagramm (es besteht aus 5 Ecken und 5 Kanten; die inneren Kantenschnitte gelten als Selbstdurchdringungen des Polygons und zählen als Doppelpunkte, nicht aber als Ecken!).
- Jede Kante gehört zu genau zwei Flächenstücken.
- Alle Ecken sind kongruent.

So wie sich die Kanten (bei nicht-konvexen Polygonen) durchdringen dürfen, dürfen sich auch verschiedene Polygone durchdringen, wie etwa beim großen Dodekaeder.

Klassifikation: *Neben den Prismen und Antiprismen zu den  $n$ -Ecken mit  $n \geq 5$  gibt es genau 75 verschiedene zusammenhängende uniforme Polyeder.*

Von besonderem Interesse sind die regulären Polyeder: sie sind gegeben durch polygonale (insbesondere also ebene) Flächenstücke, die an den Kanten zusammenstoßen, mit:

- Die Flächenstücke sind regulär und kongruent.
- Jede Kante gehört zu genau zwei Flächenstücken.
- Alle Ecken sind kongruent.

Klassifikation: *Neben den 5 platonischen Körpern gibt es nur 4 weitere reguläre Polyeder, die Kepler-Poinsot-Körper (Cauchy 1810):*

	$e$	$k$	$f$	$\chi(F)$	
großes Dodekaeder	12	30	12	-6	Jamnitzer (1568), Poinsot (1806)
großes Ikosaeder	20	30	12	2	Poinsot (1806)
großes Stern-Dodekaeder	12	30	20	2	Kepler (1619)
kleines Stern-Dodekaeder	12	30	12	-6	Uccello (15.Jh.), Kepler (1619)

Das große Ikosaeder und das große Stern-Dodekaeder sind also beide nichts anderes als 2-Sphären (“durcheinandergewurschtelt”); beim großen Dodekaeder und beim kleinen Stern-Dodekaeder dagegen handelt es sich um die Fläche  $F_4$  (ebenfalls “durcheinandergewurschtelt”):

Eine Voraussetzung wurde nicht erwähnt: man setzt immer (und meist heimlich!) voraus, dass es sich um eine zusammenhängende Fläche handelt - sonst spricht man von einem Polyeder-Verbund. (Und es gibt interessante Holzpuzzles, etwa von Arjeu, die zum Beispiel einen Verbund von 5 Tetraedern zeigen).

**Kuboktaeder.** Das Kuboktaeder entsteht aus einem Würfel durch Abschneiden der Ecken, seine Flächen sind regelmäßige Dreiecke und Vierecke. Ganz wichtig ist: Jede Kante des Kuboktaeders gehört zu einem regelmäßigen Sechseck!

Das Kuboktaeder ist für Chemiker wichtig, denn es handelt sich hier um das Koordinationspolyeder der kubisch dichtesten Kugelpackung! Jede Kugel (Atom) ist von 12 gleichartigen Kugeln umgeben, welche alle die zentrale Kugel berühren. (Zum Beispiel kristallisiert Fluorit (= Flussspat,  $\text{CaF}_2$ ) als Würfel oder Kuboktaeder.)

Wir zählen die Kanten, Ecken und Polygone:

12 Ecken (gerade die Kantenmittelpunkte eines Würfels)

24 Kanten (pro Würfelfläche ein Quadrat, als  $6 \times 4 = 24$ ).

8 Dreiecke (pro Würfelcke ein Dreieck)

6 Quadrate (pro Würfelfläche ein Quadrat)

Insgesamt gibt es also 14 Polygone, und die Euler’sche Polyederformel gilt:  $e - k + f = 12 - 24 + 14 = 2$  (es handelt sich um ein konvexes Polyeder, also eine 2-Sphäre. Aber es gibt zu unseren Ecken und Kanten auch

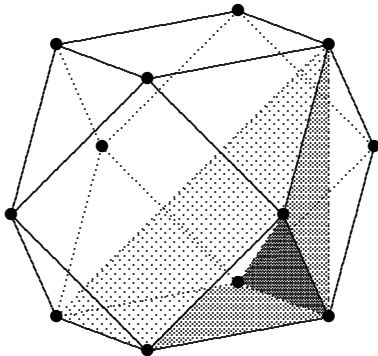
4 regelmäßige Sechsecke (pro Würfeldiagonale ein Sechseck)

Wir erhalten zwei weitere uniforme Polyeder, wenn wir betrachten:

- die Dreiecke und die Sechsecke  
— das Oktahemioktaeder, mit Euler-Charakteristik  $12 - 24 + (8 + 4) = 0$  (ein Torus  $F_1$ ) oder aber
- die Quadrate und die Sechsecke  
— das Kubohemioktaeder, mit Euler-Charakteristik  $12 - 24 + (6 + 4) = -2$  (und zwar ist dies die Fläche  $N_4$ )

Fragen: Wie sieht man, dass ein Oktahemioktaeder ein Torus ist? Wie entscheidet man, ob ein Kubohemioktaeder die Fläche  $F_2$  oder  $N_4$  ist?

Beginnen wir mit der zweiten Frage: Hier handelt es sich darum, im Kubohemioktaeder mindestens ein Möbiusband zu finden, eine reizvolle Aufgabe!



**Anleitung:**

Ein halbes Sechseck (leicht punktiert),  
 ein halbes Quadrat (etwas stärker punktiert),  
 eine Ecke eines Sechsecks (stark punktiert),  
 und schließlich ein ganzes Quadrat: die Grundfläche.

Es gibt 48 derartige Möbiusbänder.

Um zu sehen, dass ein Oktahemioktaeder ein Torus ist, kann man die Dreiecke und Sechsecke zu einem Netz so zusammenfügen, dass man ein Parallelogramm erhält, dessen Seiten zu identifizieren sind: also ein typisches Torus-Netz. Man kann aber auch mit dynamischer Geometrie-Software wie DynaGeo arbeiten!

**DynaGeo für Topologen.** Dynamische Geometrie-Software wie etwa DynaGeo (früher nannte es sich “Euklid”) kann man sehr gut verwenden, um topologische Fragestellungen anzugehen.

- Zum Beispiel kann man mühelos zeigen: *Der Rand eines Möbius-Bands ist unverknotet.* Man beginnt mit einem Kantenzug, der offensichtlich als Rand eines typischen Möbius-Bands interpretiert werden kann, sodass man nur zwei Ecken verschieben muss, um einen Kreis zu erhalten. Beide Abänderungen lassen sich offensichtlich durch topologische Äquivalenzen des  $\mathbb{R}^3$  realisieren! Und das Ergebnis ist unverknotet!
- Auch andere Entknotungen lassen sich so bewerkstelligen.
- Vergleich verschiedener Netze von Körpern, zum Beispiel die eines Würfels. Das Verschieben von Ecken mit Hilfe von DynaGeo kann man sehr gut verwenden, um Netze von Körpern miteinander zu vergleichen. Beginnt man mit der typischen Ansicht eines Würfels in Parallel-Projektion, so sieht man zwei Überkreuzungen. Durch das Bewegen dreier Ecken beseitigt man diese Überkreuzungen und erhält ein Bild, wie es üblicherweise durch Zentralprojektion entsteht.
- Um das Oktahemioktaeder als Torus zu sehen, muss man ebenfalls geeignete Ecken bewegen!

**Was ist Topologie?** Topologen betrachten Invarianten topologischer Räume unter stetigen Deformationen. Es gibt ganz wilde Konstruktionen topologischer Räume - aber die sind gar so sehr von Interesse: vor allem interessiert man sich für Polyeder, also für Räume, die eine simpliziale Struktur haben: sie sind aus



ganz einfachen Teilstücken wie Kanten, Dreiecken, Tetraedern usw zusammengesetzt. Überraschenderweise gilt: Polyeder bis auf topologische Äquivalenz zu klassifizieren, ist ein völlig unlösbares Problem! Andererseits kann man zeigen, dass es genügt, Deformationen zu betrachten, die lokal durch affine Transformationen beschrieben werden, also PL-Topologie zu betreiben (PL steht für *piecewise linear*, also für “stückweise linear”) — das sind aber Operationen, die man (in niedrig-dimensionalen Beispielen) durch dynamische Geometrie-Software sehr gut veranschaulichen kann!

**Werbung für 3-dimensionale Geometrie:** Die hier vorgestellte Themensammlung sollte auch als Werbung verstanden werden. Aus den älteren Lehrplänen wurde ja vieles gestrichen, wie etwa die sphärische Trigonometrie, die Kegelschnitte, die darstellende Geometrie. Das ist ganz bedauerlich, da der Raumvorstellung ein ganz wichtiger Stellenwert zukommt!

Und eigentlich sollte man nicht bei der Dimension 3 stehenbleiben. Denn betrachtet man den allgemeinen Rahmen geometrischer Phänomene, so stellt man fest: Zum wirklichen Verständnis schon von 1-dimensionalen Phänomen (wie zum Beispiel von Knoten) braucht man den 3-dimensionalen Raum! Zum wirklichen Verständnis 2-dimensionaler Phänome (also von Flächen) müsste man in den 4-dimensionalen Raum gehen!

**Nachsatz zum Möbius-Band.** Die Aufzeichnungen von Möbius zeigen, dass er über das Möbius-Band im September 1858 nachdachte, er publizierte dies 1865. Aber gleichzeitig hat auch Johann Benedict Listing (1808–1882) über das Möbius-Band gearbeitet, und seine Untersuchung wurde schon 1861 veröffentlicht. Das Möbiusband könnte eigentlich also auch *Listing-Band* heißen.

### Quellen:

- Hilbert, Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie.
- Wei Zhang: Exploring Math through Puzzles. Key curriculum Press. Berkeley. 1996.
- Strolling Down Möbius Lane Ivars Peterson’s MathTrek. MAA Online.
- Josef Wittmann: Mathematische Tricks und Basteleien. Aulis-Verlag 2001.
- Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy: Gewinnen. Strategien für mathematische Spiele. Band 4. Solitärspiele. Vieweg 1985.
- Stewart Coffin: The Odyssey of the Figure Eight Puzzle. In: The Mathemagician and Pied Puzzler. A collection in Tribute to Martin Gardner. Ed E. Berlekamp and T. Rogers. A. K. Peters, Natick 1999.
- Kathrin Hauschke: Analyse einiger Schnur-Puzzles unter Verwendung knotentheoretischer Begriffsbildungen. (Englisch). Examensarbeit. Bielefeld 2001.
- Martin Gardner: Hexaflexagons and other Mathematical Diversions. University of Chicago Press 1959. Insbesondere: Chapter 7. Curious Topological Models.
- Martin Gardner: Knotted Doughnuts and other Mathematical Entertainments. New York 1986. Insbesondere Chapter 5. Doughnuts: Linked and Knotted.
- Magnus J. Wenninger: Polyhedron Models for the Classroom. National Council of Teachers of Mathematics. 1966.