Betrachte die Kurve $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$v(t) = (r + R\cos t, \sqrt{R^2 - r^2}\sin t, r\sin t).$$

Sei $v(t) = (x, y, z)$, also

$$x = r + R\cos t, \qquad y = \sqrt{R^2 - r^2}\sin t, \qquad z = r\sin t.$$

Wir zeigen:

(1) Alle Punkte $v(t)$ liegen in der Ebene $E(R, r)$.

Beweis:

$$z = r\sin t = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\sqrt{R^2 - r^2}\sin t = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}y.$$

(2) $||v(t) - (r, 0, 0)|| = R$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} ||v(t) - (r, 0, 0)||^2 &= (x - r)^2 + y^2 + z^2 \\ &= R^2\cos^2 t + (R^2 - r^2)\sin^2 t + r^2\sin^2 t \\ &= R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2. \end{aligned}$$

(3) Alle Punkte $v(t)$ liegen auf dem Torus $T(R, r)$.

Beweis. Zu zeigen ist:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

Die linke Seite ist das Quadrat von

$$\begin{aligned} x^2 + {}&y^2 + z^2 + R^2 - r^2 \\ &= r^2 + 2rR\cos t + R^2\cos^2 t + (R^2 - r^2)\sin^2 t + r^2\sin^2 t + R^2 - r^2 \\ &= 2rR\cos t + R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + R^2 \\ &= 2rR\cos t + 2R^2 \\ &= 2R(r\cos t + R). \end{aligned}$$

Rechts ist folgender Term zu berechnen:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 + 2rR\cos t + R^2\cos^2 t + (R^2 - r^2)\sin^2 t \\ &= r^2 + 2rR\cos t + R^2 - r^2\sin^2 t \\ &= 2rR\cos t + R^2 + r^2\cos^2 t \\ &= (r\cos t + R)^2. \end{aligned}$$