Seminar

Harmonische Analysis

Vortrag von

Reidar Janssen

20. & 27. Oktober 2011

Diese Übersetzung des ersten Kapitels von Anton Deitmars „A First Course in Harmonical Analysis" [0] dient als Grundlage für meinen Seminarvortrag über Fourrierreihen im Seminar über harmonische Analysis im Wintersemester 2011 / 2012.

Inhaltsverzeichnis

Teil I.
Fourierreihen

Die Theorie der Fourierreihen ist von der Fragestellung getrieben, ob eine periodische Funktion (ein Radio-Signal oder ähnliches) als Summe von *einfachen Schwingungen* geschrieben werden kann. Eine *einfache Schwingung* ist hierbei im mathematischen Sinne ein Term von Funktionen des Typs $c\sin(2\pi kx)$ oder $c\cos(2\pi kx)$ für eine ganze Zahl k und eine komplexe Zahl c.

Die Eulersche Formel

$$e^{2\pi ix} = \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x)$$

zeigt, dass jede Funktion f, welche in der Form

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi ikx}$$

dargestellt werden kann, als Summe von einfachen Schwingungen geschrieben werden kann. Diese Betrachtungsweise hat den Vorteil, dass sie simplere Formeln generiert und besser für die Generalisierung von Aussagen geeignet ist. Wir werden im Folgenden wegen obiger Darstellung nur komplex-wertige periodische Funktionen betrachten.

1. Periodische Funktionen

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *periodisch mit Periode* $L > 0$, falls für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f(x + L) = f(x)$$

gilt. Falls f periodisch ist mit Periode $L > 0$, so ist auch die Funktion

$$F(x) = f(Lx)$$

periodisch mit Periode 1. Da weiterhin $f(x) = F(\frac{x}{L})$ gilt, genügt es, Funktionen mit Periode 1 zu betrachten. Ist keine Periode L gegeben, so hat f die Periode 1.

Beispiel. $f_0(x) = \sin(2\pi x)$, $f_1(x) = \cos(2\pi x)$, $f_2(x) = e^{2\pi ix}$ sind periodisch. Jede Funktion auf dem halboffenen Intervall $[0, 1)$ kann auf eindeutige Weise zu einer periodischen Funktion erweitert werden.

Definition (Inneres Produkt)**.** Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt *inneres Produkt* auf einem komplexen Vektorraum V, falls

(i) $v \mapsto \langle v, w \rangle$ ist $\mathbb{C}$-linear für jedes $w \in V$,

(ii) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ für alle $v, w \in V$,

(iii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist positiv definitiv, d.h. für alle $v \in V$ gilt $\langle v, v, \rangle \geq 0$ und $\langle v, v \rangle = 0$ impliziert $v = 0$.

Falls f und g periodische Funktionen sind, so ist eine beliebige Linearkombination $\alpha f + \beta g$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ebenfalls periodisch. D.h. die Menge der periodischen Funktionen ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Mit $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ sei der lineare Unterraum aller stetigen periodischen Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bezeichnet. Später benötigen wir $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, den Unterraum aller unendlich oft differenzierbaren periodischen Funktionen. Für $f, g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ sei

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}x,$$

wobei das Integral einer komplexwertigen Funktion $h(x) = u(x) + iv(x)$ mit $u, v \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert ist durch

$$\int_0^1 h(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 u(x) \, \mathrm{d}x + i \int_0^1 v(x) \, \mathrm{d}x.$$

Es gelten weiterhin alle bekannten Rechenregeln.

1.1 Lemma. *$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein inneres Produkt auf $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.*

Beweis. Die $\mathbb{C}$-Linearität ist klar und es ist $\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{g(x)\overline{f(x)}} \, \mathrm{d}x = \overline{\int_0^1 g(x)\overline{f(x)} \, \mathrm{d}x} = \overline{\langle g, f \rangle}$. Nun zur positiven Definitheit:

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

ist reell-wertig und nicht-negativ für alle f, somit ist zunächst $\langle \cdot, \cdot \rangle \geq 0$. Sei nun $f \neq 0$ und sei $g(x) = |f(x)|^2$. Dann ist g stetig und es existiert ein $y \in [0, 1]$ mit $g(y) = \alpha > 0$.

Weil g stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $g(x) > \frac{\alpha}{2}$ für alle $x \in B(\varepsilon, y)$. Somit erhalten wir

$$\langle f, f\rangle = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{|x-y|<\varepsilon} \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{d}x \geq \varepsilon\alpha > 0.$$

□

2. Exponentialfunktion

Wir wollen nun die periodische Exponentialfunktion etwas genauer betrachten. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$e_k(x) = e^{2\pi i k x},$$

dann gilt $e_k \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Zum inneren Produkt verschiedener e_k's betrachten wir das folgende

2.1 Lemma. *Seien $k, l \in \mathbb{Z}$, dann ist*

$$\langle e_k, e_l\rangle = \delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & , \textit{falls } k = l, \\ 0 & , \textit{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere erhalten wir für variierende $k \in \mathbb{Z}$ linear unabhängige Vektoren in $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Gilt

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k(x)$$

für gewisse Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$, so folgt

$$c_k = \langle f, e_k\rangle \qquad \textit{für jedes } k.$$

Beweis. Es gilt

$$\langle e_k, e_k\rangle = \int_0^1 e^{2\pi i k x} e^{-2\pi i k x}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Sei also $k \neq l$ und sei $m = k - l$, dann ist

$$\begin{aligned} \langle e_k, e_l\rangle &= \int_0^1 e^{2\pi i m x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2\pi i m} e^{2\pi i m x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2\pi i m}(1-1) = 0. \end{aligned}$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und Koeffizienten $\lambda_k \in \mathbb{C}$ gegeben mit

$$\lambda_{-n} e_{-n} + \cdots + \lambda_n e_n = 0.$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, e_k \rangle \\ &= \lambda_{-n} \langle e_{-n}, e_k \rangle + \cdots + \lambda_n \langle e_n, e_k \rangle \\ &= \lambda_k. \end{aligned}$$

Somit sind $e_{-n}, \ldots, e_n$ linear unabhängig. Sei abschließend $f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k(x)$, so folgt analog

$$\langle f, e_k \rangle = \left\langle \sum_{l=-n}^{n} c_l e_l, e_k \right\rangle = c_k.$$

$\square$

Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodisch und Riemann-integrierbar auf $[0, 1]$. Wir nennen

$$c_k(f) = \langle f, e_k \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} \, \mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Fourier-Koeffizienten von f. Die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e_k(x)$$

heißt *Fourier-Reihe* von f. Diese muss nicht konvergieren, nicht einmal punktweise. Wir werden jedoch zeigen, dass die Fourier-Reihe in L^2 konvergiert. Dies wollen wir im Folgenden zunächst genauer erläutern.

Sei $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller periodischen Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, welche Riemann-integrierbar auf $[0, 1]$ sind. Es gilt $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Das zuvor definierte innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ kann auf $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ erweitert werden, ist dann aber nicht mehr positiv definit.

Für $f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ sei die *Norm*

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

gegeben, d.h. für alle $f, g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ gilt

1. $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2 \ \forall \ \lambda \in \mathbb{C}$,

2. $\|f\|_2 \geq 0$ und $\|f\|_2 = 0$ impliziert $f = 0$,

3. $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$.

In Kapitel 2 wird dies zudem auch noch bewiesen.

3. Besselsche Ungleichung

Die Besselsche Ungleichung gibt eine Abschätzung für die Summe der quadrierten Fourier-Koeffizienten und benötigt folgendes

3.1 Lemma. *Sei $f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\mathbb{C})$ und für $k \in \mathbb{Z}$ sei $c_k = \langle f, e_k \rangle$ der k-te Fourier-Koeffizient. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

Beweis. Setzte $g = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$, so ist

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} \langle f, e_k \rangle = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} c_k = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} \langle g, e_k \rangle = \langle g, g \rangle . \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \|f - g\|_2^2 &= \langle f - g, f - g \rangle = \langle f, f \rangle - \langle f, g \rangle - \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2. \end{aligned}$$

□

3.2 Satz (Besselsche Ungleichung)**.** *Für $f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ mit Fourier-Koeffizienten (c_k) gilt*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \int_0^1 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Beweis. Mit obigem Lemma erhalten wir $\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$. Mit $n \to \infty$ folgt die Behauptung.

$\square$

4. Konvergenz in L^2-Norm

Sei $f, f_n \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $n \in \mathbb{N}$, so *konvergiert f_n gegen f in L^2-Norm*, falls

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0.$$

Weder impliziert die punktweise Konvergenz die L^2-Konvergenz noch andersherum. Jedoch impliziert die gleichmäßige Konvergenz die L^2-Konvergenz. Weiterhin gilt, dass f selbst stetig ist, falls alle f_n stetig sind und gleichmäßig gegen f konvergieren.

Beispiel. $f_n(x) = x^n$ konvergiert auf dem Interval $[0, 1]$ punktweise, jedoch nicht gleichmäßig, gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ 1 & , x = 1. \end{cases}$$

Auf dem Intervall $[0, \alpha]$, $\alpha < 1$, konvergiert sie gleichmäßig gegen 0.

Beispiel. Sei $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ mit einer Folge von Funktionen $(a_n)_n$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Falls es $c_n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|a_k(x)| \leq c_k$ für alle k und alle $x \in [0, 1]$ und falls $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n < \infty$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \qquad \text{gleichmäßig.}$$

4.1 Satz. *Falls eine Folge f_n gleichmäßig gegen f konvergiert auf $[0, 1]$, so auch in L^2-Norm.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in [0, 1]\ \forall\, n \geq n_0.$$

Somit gilt für alle $n \geq n_0$

$$\|f - f_n\|_2^2 = \int_0^1 |f(x) - f_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \varepsilon^2,$$

also $\|f - f_n\|_2 < \varepsilon$.

$\square$

Das wichtigste Ergebnis dieses Kapitels soll sein, dass die Fourierreihe eines beliebigen $f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ gegen f in der L^2-Norm konvergiert. Hierzu werden wir dieses Ergebnis zunächst für eine einfachere Klasse von Funktionen durch konkretes Ausrechnen der Fourier-Koeffizienten zeigen. Dazu benötigen wir folgendes

4.2 Lemma. *Für $0 \leq x \leq 1$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{k^2} = \pi^2 \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right).$$

Insbesondere gilt im Fall $x = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Beweis. Siehe [0].

$\square$

Damit wollen wir nun die Konvergenz der Fourier-Reihe für Riemannsche Treppenfunktionen beweisen.

Seien $I_1, \ldots, I_m \subset [0,1]$ beliebig. Eine Riemannsche Treppenfunktion ist von der Form

$$s(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbf{1}_{I_k}(x)$$

mit Koeffizienten $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Das Riemann-Integral ist für eine Funktion $s(x)$ definiert durch

$$\int_0^1 s(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \lambda \restriction_{[0,1]} (I_k).$$

Eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, falls für jedes $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen φ, ψ auf $[0,1]$ exisitieren, sodass $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\int_0^1 \left(\psi(x) - \varphi(x)\right) \,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

gilt. Für $\varepsilon \to 0$ definieren wir das Riemann-Integral von f als den Limes der zugehörigen Treppenfunktionen.

Jede Riemann-integrierbare Funktion auf $[0,1]$ ist beschränkt. Eine komplexwertige Funktion heißt Riemann-integrierbar, falls Real- und Imaginärteil Riemann-integrierbar sind.

4.3 Lemma. *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodisch und sei $f\restriction_{[0,1]}$ eine Riemannsche Treppenfunktion. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f in L^2 gegen f, d.h.*

$$\sum_{k=-n} e_k \underbrace{c_k}_{=\int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}\,\mathrm{d}x} = f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{in } L^2} f.$$

Beweis. Nach 3.1 reicht es zu zeigen, dass $\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ gilt. Wir betrachten zunächst den Spezialfall $f\restriction_{[0,1]} = \mathbf{1}_{[0,\alpha]}$ für ein $\alpha \in [0,1]$. Die Koeffizienten sind also $c_0 = \alpha$ und für $k \neq 0$

$$c_k = \int_0^\alpha e^{-2\pi ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{i}{2\pi k}\left(e^{-2\pi ik\alpha} - 1\right).$$

Wir erhalten

$$|c_k|^2 = \frac{1}{4\pi^2k^2}\left(e^{2\pi ik\alpha} - 1\right)\left(e^{-2\pi ik\alpha} - 1\right) = \frac{1-\cos(2\pi k\alpha)}{2\pi^2k^2}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= \alpha^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(2\pi k\alpha)}{\pi^2k^2} \\
&= \alpha^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2k^2} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi k\alpha)}{k^2} \\
&= \alpha^2 + \frac{1}{6} - \left(\frac{(1-2\alpha)^2}{4} - \frac{1}{12}\right) \\
&= \alpha \\
&= \int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Sei nun $I \subset [0,1]$ beliebig und $f = \mathbf{1}_I$. Die Fourier-Koeffizienten und die Norm von f ändern sich nicht, wenn man I offen, abgeschlossen oder halb-offen wählt. Wir wollen nun das Verhalten der Fourier-Koeffizienten unter Verschiebungen betrachten. Sei dazu $c_k(f)$ wie gehabt der k-te Fourier-Koeffizient von f und sei f^y der Shift um y, d.h. $f^y(x) = f(x+y)$. f^yist weiterhin periodisch und Riemann-integrierbar. Für den k-ten

Fourier-Koeffizienten von f^y gilt nun

$$\begin{aligned}
c_k(f^y) &= \int_0^1 f(x+y)e^{-2\pi ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_y^{1+y} f(x)e^{2\pi ik(y-x)}\,\mathrm{d}x \\
&= e^{2\pi iky}\int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= e^{2\pi iky}c_k(f).
\end{aligned}$$

Da es keine Rolle spielt, ob man eine periodische Funktion über $[0,1]$ oder $[y,1+y]$ integriert, ergibt sich weiter $|c_k(f^y)|^2 = |c_k(f)|^2$ und $\|f^y\|_2 = \|f\|_2$. Die Behauptung folgt nun also auch für $f\restriction_I$, wobei $I \subset [0,1]$ beliebig ist. Als Linearkombination solcher Funktionen erhalten wir die Aussage auch für beliebige Treppenfunktionen (Linearität).

$\square$

4.4 Satz. *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodisch und Riemann-integrierbar auf $[0,1]$. Dann kovergiert die Fourierreihe von f gegen f in L^2-Norm. Sind die Fourier-Koeffizienten von f durch c_k gegeben, so gilt*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Die Aussage dieses Satzes impliziert also, dass die Folge c_k gegen 0 geht für $|k| \to \infty$. Dies ist auch als das *Riemann-Lebesgue-Lemma* bekannt.

Beweis. Wir schreiben $f = u + iv$. Die Partialsumme der Fourier-Reihe von f genügt der Gleichung $\underbrace{S_n(f)}_{=\sum_{k=-n}^{n} c_k e_k} = S_n(u) + iS_n(v)$. Falls also die Fourier-Reihen von u und v in L^2-Norm gegen u bzw. v konvergieren, haben wir Aussage gezeigt. Also genügt es dieses Theorem für reell-wertige Funktionen f zu zeigen. Da (Riemann-) integrierbare Funktionen beschränkt sind, können wir durch Skalarmultiplikation erreichen, dass $|f(x)| \leq 1$ gilt.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da f Riemann-integrierbar ist, existieren Treppenfunktionen φ, ψ auf $[0,1]$, sodass

$$-1 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1$$

und

$$\int_0^1 (\psi(x) - \varphi(x))\,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon^2}{8}$$

gilt. Wir setzen $g = f - \varphi$. Es folgt also $\varphi \geq 0$ und

$$|g|^2 \leq |\psi - \varphi|^2 \leq 2(\psi - \varphi).$$

Mit den letzten beiden Gleichungen erhalten wir

$$\int_0^1 |g(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq 2 \int_0^1 (\psi(x) - \varphi(x)) \, \mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Für die Partialsummen S_n gilt

$$S_n(f) = S_n(\varphi) - S_n(g)$$

und mit Lemma 4.3 existiert ein $n_0 \geq 0$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\|\varphi - S_n(\varphi)\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit Lemma 3.1 gilt nun die Abschätzung

$$\|g - S_n(g)\|_2^2 \leq \|g\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

und wir erhalten für alle $n \geq n_0$

$$\|f - S_n(f)\|_2 \leq \|\varphi - S_n(\varphi)\|_2 + \|g - S_n(g)\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

5. Gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe

Der letzte Satz gibt uns zwar eine Auskunft über die L^2-Konvergenz der Fourier-Reihe, jedoch keinerlei Informationen über eine mögliche punktweise Konvergenz. In der Tat muss eine Fourier-Reihe nicht notwendigerweise punktweise gegen f konvergieren. Falls jedoch die Funktion f zudem stetig differenzierbar ist, konvergiert die Fourier-Reihe sogar gleichmäßig. Dieses Ergebnis wird uns der nächste Satz liefern und es ist die zweite wichtige Erkenntnis in diesem Kapitel.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und periodisch. Wir nennen f *stückweise stetig differenzierbar*, falls es eine eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1$ gibt, sodass für jedes $j \in \{1, \ldots, r\}$ die Funktion $f\restriction_{[t_{j-1}, t_j]}$ stetig differenzierbar ist.

5.1 Satz. *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, periodisch und stückweise stetig differenzierbar. Dann* *konvergiert die Fourier-Reihe von f gleichmäßig gegen f.*

Beweis. Sei die stückweise Unterteilung $0 = t_0 < \cdots < t_r = 1$ für f gegeben und seien wie gewohnt c_k die Fourier-Koeffizienten von f. Sei $\varphi_j\colon [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{C}$ die stetige Ableitung von f für $1 \leq j \leq r$ und sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ diejenige periodische Funktion, sodass φ sich mit jedem φ_j auf dem halboffenen Intervall $[t_j, t_{j-1})$ überdeckt. Seien γ_k die Fourier-Koeffizienten von φ. Dann gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 \leq \|\varphi\|_2^2 < \infty.$$

Durch partielle Integration berechnen wir

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x)e^{-2\pi ikx}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{-2\pi ik} f(x)e^{-2\pi ikx}\right]_{t_{j-1}}^{t_j} - \frac{1}{-2\pi ik}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi(x)e^{-2\pi ikx}\,\mathrm{d}x.$$

Wir stellen für $k \neq 0$ folgendes fest:

$$c_k = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi ik}\int_0^1 \varphi(x)e^{-2\pi ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi ik}\gamma_k.$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt immer die binomische Gleichung $0 \leq (|\alpha| - |\beta|)^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha\beta|$, also auch $|\alpha\beta| \leq \frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)$. Somit gilt:

$$|c_k| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi^2 k^2} + |\gamma_k|^2\right).$$

Also erhalten wir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

Den letzten nötigen Schritt erhalten wir nun aus dem folgendem wichtigem Lemma.

□

5.2 Lemma. *Sei f stetig und periodisch und angenommen, die Fourier-Koeffizienten von f erfüllen*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

Dann konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig gegen f. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k(x).$$

Beweis. Die gegebenen Bedingungen implizieren, dass die Fourier-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x}$ gleichmäßig gegen eine Funktion g konvergiert. Als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist g selbst stetig. Da die Fourier-Reihe auch in L^2-Norm konvergiert, muss also

$$\|f - g\|_2 = 0$$

gelten. Da f und g beide stetig sind, folgt mit der positiven Definitheit der Norm $f = g$. $\square$

6. Periodische Funktionen - Algebraisch

Wir haben den Raum $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ als den Raum der stetigen, periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ definiert. Man kann diesen aber auch anders - in einem algebraischen Sinne - interpretieren. Wir definieren auf $\mathbb{R}$ die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Z}.$$

Die Äquivalenzklasse für $x \in \mathbb{R}$ lautet $[x] = x + \mathbb{Z} = \{x + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Sei $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ die Menge aller Äquivalenzklassen. Man kann diese Menge mit dem halboffenem Interval $[0, 1)$ identifizieren. Auch kann man sie mit dem Torus

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

identifizieren, da die Abbildung $e\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\mathbb{T}$ liefert.

Wir nennen eine Folge von Äquivalenzklassen $[x_n]$ *konvergent gegen* $[x] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, falls es Vertreter $x'_n, x \in \mathbb{R}$ für die zugehörigen Äquivalenzklassen gibt, sodass $\lim_{n\to\infty} x'_n = x$ in $\mathbb{R}$ gilt. Im Intervall $[0, 1)$ bedeutet dies, dass x_n entweder gegen x im Intervall $[0, 1)$ konvergiert, oder dass $[x] = 0$ gilt und die Folge der x_n aus zwei konvergenten Teilfolgen besteht, wobei eine gegen 1 und die andere gegen 0 konvergiert.

Die beste Vorstellung für $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist die reelle Achse „aufgerollt" (z.B. durch die Funktion $e^{2\pi i x}$) oder durch „verbinden" der beiden Enden des Intervalls $[0, 1]$.

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ heißt *konvergent*, falls für jede konvergente Folge $[x_n]$ in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ die komplexe Folge $f([x_n])$ in $\mathbb{C}$ konvergiert.

Jede stetige Funktion auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ kann durch die natürliche Projektion $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ zu einer stetigen, periodischen Funktion auf $\mathbb{R}$ transferiert werden. Auf diese Art und Weise können $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ als Raum aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ auffassen.

Literatur

[0] A First Course in Harmonic Analysis, Anton Deitmar, Second Edition, Springer, 2005