# 8 Artinsche Ringe

Erinnerung: Ein Ring heißt *artinsch*, wenn er als Modul über sich selbst artinsch ist. Dies ist äquivalent dazu, dass jede Kette absteigender Ideale im Ring stationär ist.

Die scheinbare Symmetrie mit noetherschen Ringen besteht jedoch nicht: Wir werden zeigen, dass artinsche Ringe notwendigerweise ein Spezialfall noetherscher Ringe sind. In gewisser Hinsicht sind artinsche Ringe die simpelste Form von Ringen neben den Körpern und wir werden diese wegen ihrer Einfachheit studieren.

**Satz 8.1.** *Jedes Primideal eines artinschen Ringes ist maximal.*

*Beweis.* Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal des Ringes $A$. Dann ist $B = A/\mathfrak{p}$ ein artinscher Integritätsring. Sei $x \in B, x \neq 0$. Wegen der absteigenden Kettenbedingung gilt $(x^n) = (x^{n+1})$ für ein $n$, damit also $x^n = x^{n+1}y$ für ein $y \in B$. Weil jedoch $B$ ein Integritätsring und $x \neq 0$ ist, können wir $x^n$ kürzen: $xy = 1$. Damit ist $x$ eine Einheit (besitzt ein Inverses) in $B$. Also ist $B$ ein Körper und $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal. □

**Folgerung 8.2.** *In artinschen Ringen ist das Nilradikal gleich dem Jacobson-Radikal.*

**Satz 8.3.** *Ein artinscher Ring hat endlich viele maximale Ideale.*

*Beweis.* Betrachte die Menge aller endlichen Schnitte $\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r$, mit $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ maximalen Idealen. Diese Menge hat ein kleinstes Element, welches mit $\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$ bezeichnet sei. Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ gilt also $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$, und damit $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$. Also ist nach einem früheren Satz (1.11) $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}_i$ für ein $i$ und damit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i$, denn $\mathfrak{m}_i$ ist ein maximales Ideal. □

**Satz 8.4.** *Das Nilradikal $\mathfrak{N}$ eines artinschen Rings ist nilpotent.*

*Beweis.* Wegen der absteigenden Kettenbedingung gilt $\mathfrak{N}^k = \mathfrak{N}^{k+1} = \cdots = \mathfrak{a}$ für ein $k > 0$. Angenommen $\mathfrak{a} \neq 0$, so sei $\Sigma$ die Menge aller Ideale $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \neq 0$. Wegen $\mathfrak{a} \in \Sigma$ ist $\Sigma$ nicht leer. Sei $\mathfrak{c}$ das kleinste Element von $\Sigma$, dann gibt es $x \in \mathfrak{c}$, sodass $x\mathfrak{a} \neq 0$ und es gilt $(x) \subseteq \mathfrak{c}$ und sogar $(x) = \mathfrak{c}$ wegen der Minimalität von $\mathfrak{c}$. Mit dem selben Argument gilt auch $x\mathfrak{a} = (x)$, denn $(x\mathfrak{a})\mathfrak{a} = x\mathfrak{a}^2 = x\mathfrak{a} \neq 0$ und somit $x\mathfrak{a} \subseteq (x)$. Also ist $x = xy$ für ein $y \in \mathfrak{a}$ und somit gilt $x = xy = xy^2 = \cdots = xy^n = \cdots$. $y$ ist nilpotent, denn $y \in \mathfrak{a} = \mathfrak{N}^k \supseteq \mathfrak{N}$, und somit ist $x = xy^n = 0$. Dies widerspricht der Wahl von x und damit ist $\mathfrak{a} = 0$. □

**Definition 8.5.** Eine *Kette von Primidealen* eines Rings $A$ ist eine endliche, strikt aufsteigende Folge $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$. Die *Länge* dieser Kette ist $n$. Die *Dimension* von $A$ $\dim A$ sei definiert als das Supremum der Längen aller Ketten von Primidealen in $A$.

**Beispiel 8.6.** Ein Körper hat die Dimension 0. Der Ring $\mathbb{Z}$ hat die Dimension 1.

**Theorem 8.7.** *Sei $A$ ein Ring. $A$ ist artinsch $\Leftrightarrow$ $A$ ist noethersch und* $\dim A = 0$.

*Beweis.* „$\Rightarrow$“ Nach gilt $\dim A = 0$. Seien $\mathfrak{m}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ die eindeutigen maximalen Ideale wie in . Dann ist $\prod_{i=1}^n \mathfrak{m}_i^k \subseteq (\bigcap_{i-1}^n \mathfrak{m}_i) = \mathfrak{N}^k = 0$. Damit ist $A$ noethersch (vgl. 6.19 bzw. 6.11 im Original).

„$\Leftarrow$" Weil das Nullideal eine Primärzerlegung besitzt (vgl. 7.13 im Original), hat $A$ eine endliche Anzahl von minimalen Primidealen und diese sind alle maximal wegen $\dim A = 0$. Für $\mathfrak{N} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i$ gilt dann nach 7.15 $\mathfrak{N}^k = 0$ und somit ist $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i^k = 0$ wie im obigen Teil. Damit ist $A$ artinsch (vgl. 6.19 bzw. 6.11 im Original).

□

**Bemerkung 8.8.** *Wenn $A$ ein artinscher lokaler Ring mit dem maximalen Idealn $\mathfrak{m}$ ist, dann ist $\mathfrak{m}$ das einzige Primideal von $A$ und damit ist $\mathfrak{m}$ das Nilradikal von $A$. Also ist jedes Element von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}$ selbst nilpotent. Jedes Element aus $A$ ist entweder eine Einheit oder nilpotent. Ein Beispiel hierfür ist der Ring $\mathbb{Z}/(p^n)$ mit einer Primzahl $p$ und $n \geq 1$.*

**Satz 8.9.** *Sei $A$ ein noetherscher lokaler Ring und $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal. Dann gilt genau eine der beiden Aussagen:*

*(i)* $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$ *für alle $n$.*

*(ii)* $\mathfrak{m}^n = 0$ *für einige $n$, wobei $A$ ein artinscher lokaler Ring ist.*

*Beweis.* Angenommen $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ für einige n. Mit dem Lemma von Nakayama folgt $\mathfrak{m}^n = 0$. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $A$, dann ist $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{p}$ und damit $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$. Also ist $\mathfrak{m}$ das einzige Primideal von $A$ und $A$ somit artinsch. □

**Theorem 8.10 (Strukturtheorem für artinsche Ringe).** *Ein artinscher Ring $A$ ist ein eindeutig (bzgl. eines Isomorphismus) bestimmtes, endliches, direktes Produkt von artinschen lokalen Ringen.*

*Beweis.* Seien $\mathfrak{m}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ die eindeutig bestimmten maximalen Ideale von $A$. Wie im Beweis von 8.7 ist für ein $k > 0$ $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i^k = 0$. Nach 1.16 sind die Ideale $\mathfrak{m}_i^k$ paarweise teilerfremd, also gilt $\bigcap \mathfrak{m}_i^k = \prod \mathfrak{m}_i^k$ mit Satz 1.10. Ebenfalls mit diesem Satz wissen wir, dass die Abbildung $A \to \prod_{i=1}^{n}(A/\mathfrak{m}_i^k)$ ein Isomorphismus ist. Nun ist aber jedes $A/\mathfrak{m}_i^k$ ein artinscher lokaler Ring, also ist $A$ das direkte Produkt von artinschen lokalen Ringen.

Sei umgekehrt angenommen, dass $A \cong \prod_{i=1}^{m} A_i$ mit artinschen lokalen Ringen $A_i$. Sei für jedes i $\Phi_i : A \to A_i$ der natürliche Epimorphismus (die Projektion auf die $i$-te Komponente) und sei $\mathfrak{a}_i = \ker \Phi_i$, welche nach 1.10 paarweise teilerfremd sind. Ferner gilt $\bigcap \mathfrak{a}_i = 0$. Sei für jedes $i$ $\mathfrak{q}_i$ das Primideal von $A_i$ und sei $\mathfrak{p}_i$ sein Gegenstück $\Phi_i^{-1}(\mathfrak{a}_i)$. Das Ideal $\mathfrak{p}_i$ ist prim und damit maximal nach 8. Weil $\mathfrak{q}_i$ nilpotent ist, ist $\mathfrak{a}_i$ $\mathfrak{p}_i$-primär und somit ist $\bigcap \mathfrak{a}_i = (0)$ eine Primärzerlegung des Nullideals in $A$. Alle $\mathfrak{p}_i$ sind paarweise teilerfremd (weil es alle $\mathfrak{a}_i$ sind) und isolierte Primideale von $(0)$. Also sind alle primären Komponenten $\mathfrak{a}_i$ isoliert und somit eindeutig bestimmt durch $A$ durch das zweite Eindeutigkeitstheorem 4.11. Schlußendlich sind die Ringe $A \cong A/\mathfrak{a}_i$ eindeutig bestimmt durch $A$. □

**Beispiel 8.11.** Ein Ring mit nur einem einzigen Primideal muss nicht noethersch und somit auch nicht artinsch sein. Sei $A = k[x_1, x_2, \ldots]$ der Polynomring in abzählbar unendlich vielen Unbestimmten $x_n$ über einem Körper $k$ und sei $\mathfrak{a}$ das Ideal $(x_1, x_2^2, \ldots, x_n^n, \ldots)$. Der Ring $B = A/\mathfrak{a}$ hat nur ein Primideal (nämlich das Bild von $(x_1, x_2, \ldots)$), also ist B ein lokaler Ring der Dimension 0. Dennoch ist B nicht noethersch, denn offensichtlich ist sein Primideal nicht endlich erzeugt.

**Bemerkung 8.12.** *Ist $A$ ein lokaler Ring, $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal, $k = A/\mathfrak{m}$ sein Restklassenkörper, dann ist der $A$-Modul $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ annuliert durch $\mathfrak{m}$ und hat damit die Struktur eines $k$-Vektorraums. Falls $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt ist (z.B. falls $A$ noethersch ist), so spannen die Bilder in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ von $\mathfrak{m}$-erzeugenden Mengen den Vektorraum $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ auf und somit ist $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ endlich.*

**Satz 8.13.** *Sei $A$ ein lokaler, artinscher Ring. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

*(i)* *Jedes Ideal in $A$ ist ein Hauptideal*

*(ii)* *Das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal*

*(iii)* $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq 1$

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii): Klar.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Falls $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 0$, so ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$, damit also $\mathfrak{m} = 0$ nach Nakayamas Lemma. Somit ist $A$ ein Körper und es ist nichts weiter zu zeigen.

Falls $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$, so ist $\mathfrak{m}$ ein Hauptideal nach Satz 2.8 (wähle dort $M = \mathfrak{m}$), also von der Form $\mathfrak{m} = (x)$. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $A$ verschieden von $(0)$ und $(1)$. Es ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{N}$, nach 8.4 ist $\mathfrak{m}$ nilpotent. Es existiert also ein $r$ mit $a \subseteq \mathfrak{m}^r, a \not\subseteq \mathfrak{m}^{r+1}$ und somit gibt es ein $y \in \mathfrak{a}$ mit $y = ax^r$ und $y \notin (x^{r+1})$. Daraus folgt $a \notin (x)$ und somit ist $a$ eine Einheit in $A$. Also ist $x^r \in \mathfrak{a}$ und hieraus folgt $\mathfrak{m}^r = (x^r) \subseteq \mathfrak{a}$ und hieraus nunwieder $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^r = (x^r)$. Somit sehen wir, dass $a$ von nur einem Element erzeugt wird, also ein Hauptideal ist. $\square$

**Beispiel 8.14.** Die Ringe $\mathbb{Z}/(p^n)$ ($p$ Primzahl), $k[x]/(f^n)$ ($f$ irreduzibles Polynom) erfüllen die Bedingungen von 8.10. Andererseits erfüllt der artinsche, lokale Ring $k[x^2, x^3]/(x^4)$ diese Bedingung nicht: $\mathfrak{m}$ ist endlich erzeugt durch $x^2$ und $x^3 \mod x^4$, sodass $\mathfrak{m}^2 = 0$ und $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 2$.