6 Kettenbedingungen

Bisher haben wir völlig beliebige kommutative Ringe (mit Einselement) betrachtet. Um dagegen tiefergehende Sätze zu erhalten, müssen wir einige Endlichkeitsbedingungen einführen. Kettenbedingungen sind dabei der geeigneteste Weg. Diese betreffen sowohl Ringe als auch Moduln und in diesem Kapitel behandeln wir den Fall der Moduln. Die meisten Argumente sind eher formaler Natur und deswegen besteht eine Symmetrie zwischen aufsteigenden und absteigenden Ketten. In den nachfolgenden Kapiteln sehen wir jedoch, dass diese Symmetrie bei Ringen nicht mehr besteht.

Sei in diesem Kapitel jeder Ring ein kommutativer Ring mit 1.

Sei Σ eine Menge, die durch eine Halbordnung $\leq$ partiell geordnet ist (d.h. $\leq$ ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch, also aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$; z.B. $\subseteq$ ist eine solche Relation).

Satz 6.1. *Folgende Aussagen für Σ sind äquivalent:*

(i) Jede aufsteigende Folge $(x_n)_n$ ist stationär (d.h. es gibt ein n mit $x_n = x_{n+1} = \ldots$).

(ii) Jede nicht-leere Teilmenge von Σ hat ein maximales Element.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Angenommen (ii) ist falsch, dann existiert eine nicht-leere Teilmenge $T \subseteq \Sigma$ mit keinem größten Element. Induktiv können wir also eine nicht-abbrechende, streng aufsteigende Folge in T konstruieren.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Die Menge $\{x_m \mid m \geq 1\}$ hat ein maximales Element x_n.

□

Definition 6.2. Falls Σ die Menge der Untermoduln eines Modules M mit der Halbordnung $\subseteq$ ist, so nennen wir (i) die *aufsteigende Kettenbedingung* (abgekürzt mit auf. Kb.) und (ii) die *Maximalbedingung*. Ein Modul, welcher eine der beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt, heißt *noethersch* (nach Emmy Noether).

Analog dazu heißt (i) im Falle der Halbordnung $\supseteq$ *absteigende Kettenbedingung* (Abk. ab. Kb.) und (ii) *Minimalbedingung*. Ein Modul M mit diesen Eigenschaften heißt *artinsch* (nach Emil Artin).

Beispiel 6.3. (1) Eine endliche abelsche Gruppe (als $\mathbb{Z}$-Modul) erfüllt sowohl die auf. Kb., als auch die ab. Kb.

(2) Der Ring $\mathbb{Z}$ (als $\mathbb{Z}$-Modul) erfüllt die auf. Kb., jedoch nicht die ab. Kb., denn: Ist $a \in \mathbb{Z} \backslash \{0, \pm 1\}$, so gilt $(a) \supsetneq (a^2) \supsetneq \cdots \supsetneq (a^n) \supsetneq \cdots$.

(3) Sei G die Untergruppe von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ bestehend aus allen Elementen, deren Grad eine Potenz von p ist, wobei p eine feste Primzahl ist. Dann hat G genau eine Untergruppe G_n der Ordnung p^n für jedes $n \geq 0$ und $G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \cdots \subsetneq G_n \subsetneq \cdots$, sodass G nicht die auf. Kb. erfüllt. Andererseits sind die einzig echten Untergruppen von G gerade die G_n, sodass G die ab. Kb. erfüllt.

(4) Die Gruppe H aller rationalen Zahlen der Form $\frac{m}{p^n}$ $(m, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0)$ erfüllt keine der beiden Kettenbedingungen. Wir haben eine exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \to H \to G \to 0$, sodass H nicht die ab. Kb. erfüllt wegen $\mathbb{Z}$ (vgl. 2) und H auch nicht die auf. Kb. erfüllt wegen G (vgl. 3).

(5) Der Polynomring $k[T]$ über einem Körper k genügt der auf. Kb., jedoch nicht der ab. Kb. auf Idealen, denn die Folge $(T) \supsetneq (T^2) \supsetneq (T^3) \supsetneq \cdots$ ist strikt absteigend.

(6) Der Polynomring $k[T_1, T_2, \dots]$ über unendlich vielen Unbekannten T_n erfüllt keine der beiden Kettenbedingungen auf Idealen, weil die Folge $(T_1) \subsetneq (T_1, T_2) \subsetneq \cdots$ strikt aufsteigend und die Folge $(T_1) \supsetneq (T_1^2) \supsetneq (T_1^3) \supsetneq \cdots$ strikt absteigend ist.

(7) Wir werden später sehen, dass ein Ring, welcher auf Idealen die ab. Kb. erfüllt, auch die auf. Kb. auf Idealen erfüllt. (Beachte: I. A. ist dies falsch für Moduln, vgl. dazu Beispiel 2 oder 3)

Satz 6.4. *M ist ein noetherscher A-Modul $\Leftrightarrow$ Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei N ein Untermodul von M und sei Σ die Menge aller endlich erzeugten Untermoduln von N. Weil $0 \in \Sigma$ ist Σ nicht leer und hat damit ein maximales Element N_0. Falls $N_0 \neq N$, betrachte den Untermodul $N_0 + Ax$ mit $x \in N, x \notin N_0$. Dieser ist endlich erzeugt und enthält (strikt) N_0, also haben wir einen Widerspruch. Damit ist $N = N_0$ und damit ist N endlich erzeugt.

„$\Leftarrow$“: Sei $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M. Dann ist $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ ein Untermodul von M, damit also endlich erzeugt von gewissen $x_1, \dots, x_r$. Sei $x_i \in M_{n_i}$ und sei ferner $n = \max_{i=1}^{r} n_i$, dann ist jedes $x_i \in M_n$, damit also $M_n = M$ und damit ist die Kette stationär.

□

Bemerkung 6.5. *Wegen des letzten Satzes sind noethersche Moduln wichtiger als artinsche, denn die noethersche Bedingung ist gerade die richtige Endlichkeitsbedingung um eine Menge von Sätzen zu ermöglichen. Hingegen sind viele der elementaren formalen Eigenschaften auf noethersche und artinsche Moduln anwendbar.*

Satz 6.6. *Sei $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln. Dann:*

(i) M ist noethersch $\Leftrightarrow$ M' und M'' sind noethersch.

(ii) M ist artinsch $\Leftrightarrow$ M' und M'' sind artinsch.

Beweis. Wir beweisen (i), (ii) folgt analog.

„$\Rightarrow$“: Eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M' (oder M'') ergibt einen Aufstieg zu einer Kette in M, ist damit also stationär.

„$\Leftarrow$“: Sei $(L_n)_{n\geq 1}$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M, dann ist $(\alpha^{-1}(L_n))$ eine Kette in M' und $(\beta(L_n))$ eine Kette in M''. Für hinreichend größe n sind diese beiden Ketten stationär und es folgt, dass die Kette L_n stationär ist.

□

Folgerung 6.7. *Ist M_i ($1 \leq i \leq n$) ein noetherscher (bzw. artinscher) A-Modul, so auch $\bigoplus_{i=1}^n M_i$.*

Beweis. Die Aussage folgt aus dem vorigen Satz unter Zuhilfenahme von Induktion auf die exakte Sequenz

$$0 \to M_n \to \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \to 0$$

□

Definition 6.8. Ein Ring A wird *noethersch* (bzw. *artinsch*) genannt, falls A als Modul über sich selbst noethersch (artinsch) ist.

Bemerkung 6.9. *Ein Ring A ist also genau dann noethersch (artinsch), wenn jede Kette aufsteigender (absteigender) Ideale in A stationär ist. Mit 6.4 ist dies äquivalent dazu, dass jedes Ideal endlich erzeugt ist.*

Beispiel 6.10. (1) Jeder Körper und der Ring $\mathbb{Z}/(n)$ ($n \neq 0$) ist artinsch und noethersch. Der Ring $\mathbb{Z}$ ist noethersch, aber nicht artinsch (vgl. 2 im vorigen Beispiel).

(2) Jeder Hauptidealbereich ist noethersch (denn jedes Ideal ist endlich erzeugt, vgl. 6.4).

(3) Der Ring $A = k[T_1, T_2, \dots]$ ist nicht noethersch, aber er ist ein Integritätsbereich und besitzt somit einen Quotientenkörper. Da A als Unterring von $Quot(A)$ aufgefasst werden kann, ist also ein Unterring eines noetherschen Ringes i. A. nicht noethersch.

(4) Sei X ein kompakter, unendlicher Hausdorff-Raum, $C(X)$ der Ring der reellwertigen, stetigen Funktionen auf X. Wähle eine strikt fallende Folge $F_1 \supsetneq F_2 \supsetneq \cdots$ von abgeschlossenen Mengen in X und setze $\mathfrak{a}_n = \{f \in C(X) \mid f(F_n) = 0\}$. Dann bilden die $\mathfrak{a}_n$ eine strikt aufsteigende Folge von Idealen in $C(X)$, damit ist $C(X)$ also kein noetherscher Ring.

(5) Mit dem Hilbertschen Basissatz folgt, dass für einen noetherschen Ring R auch $R[X]$ noethersch ist. Mit Induktion können wir also sagen, dass $K[X, Y]$ noethersch ist. Aber $K[X, Y]$ ist kein Hauptidealring, sodass mehr noethersche Ringe als Hauptidealringe existieren.

Satz 6.11. *Sei A ein noetherscher (artinscher) Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann ist M noethersch (artinsch).*

Beweis. M ist ein Quotient des A-Moduls A^n für ein n. Mit 6.7 und 6.6 folgt, dass Quotienten und Summen noetherscher Moduln wieder noethersch sind. □

Satz 6.12. *Sei A noethersch (artinsch) und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A. Dann ist $A/\mathfrak{a}$ ein noetherscher (artinscher) Ring.*

Beweis. Nach 6.6 ist $A/\mathfrak{a}$ als A-Modul noethersch (artinsch), damit also auch noethersch (artinsch) als $A/\mathfrak{a}$-Modul über sich selbst. □

Definition 6.13. Als *Kette* von Untermoduln eines Moduls M bezeichnen wir eine Folge (M_i) $(0 \leq i \leq n)$ von Untermoduln von M, sodass gilt:

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0$$

Die *Länge* einer solchen Kette ist n. Eine *Kompositionsreihe* von M ist eine maximale Kette, d.h. eine Kette, in welche keine zusätzlichen Untermoduln eingefügt werden kann. Dies ist äquivalent dazu, dass der Quotient M_{i-1}/M_i $(1 \leq i \leq n)$ *einfach* ist (keine Untermoduln außer 0 und sich selbst besitzt).

Satz 6.14. *Sei M ein Modul mit einer Kompositionsreihe der Länge n. Dann hat jede Kompositionsreihe von M die Länge n und jede Kette in M kann zu einer Kompositionsreihe erweitert werden.*

Beweis. Es wird mit $l(M)$ die geringste Länge einer Kompositionsreihe eines Moduls bezeichnet. Definitionsgemäß ist $l(M) = \infty$, falls M keine Kompositionsreihe besitzt.

(i) $N \subseteq M \overset{!}{\Rightarrow} l(N) \leq l(M)$. Sei (M_i) eine Kompositionsreihe von M minimaler Länge und betrachte die Untermoduln $N_i = N \cap M_i$ von N. Es gilt $N_{i-1}/N_i \subseteq M_{i-1}/M_i$ und letzteres ist ein einfacher Modul. Damit gilt also entweder $N_{i-1}/N_i = M_{i-1}/M_i$ oder $N_{i-1} = N_i$. Wir erhalten also eine Kompositionsreihe mit $l(N) \leq l(M)$, wenn wir sich wiederholende Terme streichen. Falls sogar $l(N) = l(M)$ gilt, so ist $N_{i-1}/N_i = M_{i-1}/M_i$ für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$, also $M_{n-1} = N_{n-1}$, $M_{n-2} = N_{n-2}, \ldots$, und schließlich $M = N$.

(ii) *Jede Kette in M hat eine Länge* $\leq l(M)$. Sei also $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots$ eine Kette der Länge k. Nach (i) gilt $l(M) > l(M_1) > \cdots > l(M_k) = 0$ und damit $l(M) \geq k$.

(iii) Betrachte den Fall einer beliebigen Kompositionsreihe: Falls sie von der Länge k ist, so ist $k \leq l(M)$, also $k = l(M)$ nach der Definition von $l(M)$. Damit haben also alle Kompositionsreihen die gleiche Länge. Für den Fall einer beliebigen Kette gilt: Wenn sie von der Länge $l(M)$ ist, muss sie eine Kompositionsreihe sein nach (ii). Falls ihre Länge $< l(M)$ ist, kann sie keine Kompositionsreihe und damit auch nicht maximal sein. Also können neue Terme eingeschoben werden, bis die Länge $l(M)$ erreicht ist.

□

Satz 6.15. *Sei M ein Modul. M besitzt eine Kompositionsreihe ⇔ M erfüllt beide Kettenbedingungen.*

Beweis. „⇒“ : Alle Ketten in M sind von beschränkter Länge, damit gilt sowohl die auf. Kb. als auch die ab. Kb.

„⇐“ : Wir konstruieren uns eine geeignete Kompositionsreihe. Für M_0 wähle den Modul M, welcher die Maximalbedingung in 6.1 erfüllt. Dieser hat einen maximalen Untermodul. Definiere also M_{i+1} durch den maximalen Untermodul von M_i. Diese strikt absteigende Kette $M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots$ muss endlich sein wegen der ab. Kb. und ist damit eine Kompositionsreihe von M.

□

Definition 6.16. Sei M ein Modul. Erfüllt M beide Kettenbedingungen, wird er *Modul endlicher Länge* genannt. $l(M)$ wird *Länge von M* genannt (vgl. Beweis von 6.14; alle Kompositionsreihen haben dieselbe Länge, also ist diese Definition unproblematisch).

Satz 6.17. *Die Länge $l(M)$ ist eine additive Funktion auf der Klasse aller A-Moduln endlicher Länge.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für eine exakte Sequenz $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ $l(M) = l(M') + l(M'')$ folgt. Nehme das Bild unter α von irgendeiner Kompositionsreihe von M' und das Urbild unter β von irgendeiner Kompositionsreihe von M''. Aneinandergefügt ergeben diese eine Kompositionsreihe von M, daraus folgt die Behauptung. □

Wir betrachten nun den Spezialfall von Moduln über einem Körper k, also k-Vektorräume.

Satz 6.18. *Für einen k-Vektorraum V sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) V hat eine endliche Dimension

(ii) V ist von endliche Länge

(iii) V erfüllt die auf. Kb.

(iv) V erfüllt die ab. Kb.

Wenn diese Bedingungen zutreffen gilt sogar Länge = Dimension.

Beweis. (i) ⇒ (ii): Trivial. (ii) ⇒ (iii) und (ii) ⇒ (iv) folgen aus 6.15. Es bleibt z.z.: (iii) ⇒ (i) und (iv) ⇒ (i). Angenommen V hat keine endliche Dimension, dann existiert eine unendliche Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ von linear unabhängingen Elementen in V. Sei U_n (bzw. V_n) der von den Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ (bzw. $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$) aufgespannte Untervektorraum. Dann ist die Kette $(U_n)_{n\geq 1}$ $((V_n)_{n\geq 1})$ unendlich und strikt aufsteigend (strikt absteigend).

□

Folgerung 6.19. *Sei A ein Ring, sodass sein Nullideal ein Produkt $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$ von (nicht notwendigerweise verschiedenen) maximalen Idealen ist. Genau dann ist A noethersch, wenn A artinsch ist.*

Beweis. Betrachte die Kette von Idealen $A \supset \mathfrak{m}_1 \supseteq \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = 0$. Jeder Faktor $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i$ ist ein Vektorraum über dem Körper $A/\mathfrak{m}_i$. Also auf. Kb. $\Leftrightarrow$ ab. Kb. für jeden Faktor. Aber auf. Kb. (ab. Kb.) für jeden Faktor $\Leftrightarrow$ auf. Kb. (ab. Kb.) für A durch wiederholte Anwendung von 6.6. Also gilt auf. Kb. $\Leftrightarrow$ ab. Kb. für A. $\square$