Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik

Skriptum zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Prof. Dr. Moritz Kaßmann

Wintersemester 2011 / 2012

Mitschrift von Reidar Janssen
Stand vom 3. Februar 2012

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

Eine *partielle Differentialgleichung* (= partial differential equation = PDE) ist eine Gleichung, in welcher die partiellen Ableitungen einer gesuchten Funktion, z.B. $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, vorkommen.

Beispiel. $\partial_1\partial_1 u(x_1, x_2) + \partial_2\partial_2 u(x_1, x_2) = 0$ für $x \in B_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$.

Viele Vorgänge in der Natur (Physik, Biologie, ...) bzw. des menschenliches Handels (Ökonomie) lassen sich mit partiellen Differentialgleichungen beschreiben.

Beispiel (1)**.** $\Delta u(x) = 0$ für $x \in \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $\Delta u(x) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x)$. Die Funktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2) = \ln(|x^2|)$, ist eine Lösung (Potentialtopf), denn es ist $\partial_i u(x) = \frac{1}{x_1^2+x_2^2} 2x_i$, $\partial_i\partial_1 u(x) = (-\frac{2}{(x_1^2+x_2^2)} x_i) 2x_i + \frac{2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{-4x_i^2}{|x|^4} + \frac{2}{|x|^2}$ und somit $\Delta \ln(|x|^2) = \frac{-4x_1^2}{|x|^4} + \frac{2}{|x|^2} - \frac{4x_2^2}{|x|^4} + \frac{2}{|x|^2} = \frac{-4(x_1^2+x_2^2)}{|x|^4} + \frac{4}{|x|^2} = 0$.

0.0 Definition. Eine Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ heißt *harmonisch*, falls $\Delta u(x) = 0$ für jedes $x \in \Omega$ gilt. Der Ausdruck $\Delta u(x)$ ist erklärt, falls $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in C^2(\Omega)$.

Beispiel (2)**.** $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0$ für $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ und $u(0,x) = u_0(x)$ für $x \in \mathbb{R}$, wobei $u_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene, stetige, beschränkte Funktion ist. Die Funktion

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u_0(y)}_{\text{stetig,beschränkt}} \underbrace{e^{\frac{-(x-y)^2}{2t}}}_{\text{glatt}} \mathrm{d}y \tag{0.1}$$

für $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ löst Gleichung 2 und hat die Eigenschaft, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = u_0(x)$ (siehe beispielsweise Übung XI, Analysis 2). Gleichung (0.1) heißt *Wärmeleitungsgleichung*, da $u(t,x)$ die Wärme eines idealisierten, unendlichen langen Stabs im Punkt $x \in \mathbb{R}$ (hierbei entspricht $\mathbb{R}$ dem Stab) zum Zeitpunkt $t > 0$ beschreibt, falls zum Zeitpunkt $t = 0$ die Anfangswärme durch $u_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschrieben wird.

Wir werden (hoffentlich) sehen, dass diese Lösung eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Temperatur besitzt.

Beispiel (3, Black-Scholes-Gleichung)**.** Seien $T > 0$, $\overline{x} > 0$, $r > 0$, $\sigma > 0$. Wir betrachten

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) + rx\frac{\partial v}{\partial x}(t,x) = rv(t,x), \quad t > 0, x > 0$$

mit

$$\begin{aligned} v(T,x) = & \quad \max(x-\overline{x},0), && x > 0, \\ v(t,0) = & \quad 0, && t > 0, \\ \lim_{x\to\infty} v(t,x) = & \quad x - \overline{x} && t > 0. \end{aligned}$$

Hierbei beschreibt $v(t,x)$ den Wert einer sogenannten Europäischen Callaktionenoption mit Laufzeit $T > 0$, Ausübungspreis $\overline{x} > 0$ bei vorliegendem Zinssatz $\sigma > 0$ für sichere Anlagen, wobei die Aktie einer Brownschen Bewegung mit Volatilität σ^2 folgt.

Beispiel (4, Minimalflächengleichung)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt und einfach zusammenhängend. Sei $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Gesucht ist diejenige Funktion $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Fläche ihres Graphen minimal ist unter alldenjenigen Funktionen mit Randwerten g. Für alle Funktionen $\varphi\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \restriction_{\partial\Omega} = 0$ muss dann $A(u) \leq A(u+\varphi)$ gelten. Die Funktion $[-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $s \mapsto A(u+s\varphi)$ hat für jedes solches φ ihr Minimum in $s = 0$. Damit gilt

$$\begin{aligned} 0 = & \quad \left[\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} A(u+s\varphi)\right]_{s=0} = \left[\int_\Omega \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sqrt{1+|\nabla(u+s\varphi)(x)|^2}\,\mathrm{d}x\right]_{s=0} \\ = & \left[\int_\Omega \tfrac{1}{2\sqrt{1+|\nabla(u+s\varphi)(x)|^2}} 2|\nabla(u+s\varphi)(x)| \tfrac{\nabla(u+s\varphi)(x)}{|\nabla(u+s\varphi)(x)|} \nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right]_{s=0} \\ = & \quad \int_\Omega \tfrac{\nabla u(x)\nabla\varphi(x)}{\sqrt{1+|\nabla u(x)|^2}}\,\mathrm{d}x = \int -\operatorname{div}\left(\tfrac{1}{\sqrt{(1+|\nabla u(x)|^2}}\nabla u(x)\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle } \varphi. \end{aligned}$$

Da $\left(0 = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\right)$ impliziert, dass $f = 0$ fast überall gilt, folgt

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u(x)|^2}}\nabla u(x)\right) = 0 \qquad \text{für } x \in \Omega.$$

Bemerkung. *Es gilt* $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$.

Beispiel (5, Wellengleichung)**.**

$$\partial_t\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 \qquad \text{für } (t,x) \in (0,\infty)\times\Omega, \tag{0.2}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Delta u(t,x) = \sum_{k=1}^d \partial_{x_k}\partial_{x_k} u(t,x)$ (hierbei wird nicht in t differenziert).

Gleichung (0.2) heißt *Wellengleichung*, weil $u(t, x)$ die Ausdehnung eines vibrierenden bzw. schwingenden Körpers ($d = 1$ entspricht einer Saite, $d = 2$ einem Membran) im Punkt $x \in \Omega$ zum Zeitpunkt $t > 0$ beschreibt.

Alle Differentialgleichungen in den Beispielen (1) bis (5) sind PDE's zweiter Ordnung, da Ableitungen der gesuchten Funktion nur bis zur Ordnung 2 auftreten. Bis auf das Beispiel (4) sind diese auch linear, da mit u und v auch $u + v$ bzw. λu Lösungen sind (denn Δ ist ein linearer Operator), eventuell aber mit anderen Randwerten.

Eine PDE k-ter Ordnung heißt *voll nichtlinear*, falls sie nichtlinear bezüglich der k-ten Ableitungen ist. Hierzu ein

Beispiel. Die Gleichung $\det\left(\nabla^2 u\right) = 0$ ist voll nichtlinear. $\Delta u = u^3$ ist nichtlinear, aber nicht voll nichtlinear.

Folgende Fragen werden beim Studium der partiellen Differentialgleichungen unter anderem von Bedeutung seien:

- Gegeben sei ein Funktionenraum, in welchem nach Lösungen gesucht wird. Existieren Lösungen? Sind Lösungen eindeutig, d.h. existieren mehrere Lösungen? Welche weiteren Eigenschaften (z.B. Langzeitverhalten oder Regularität) besitzen Lösungen?

- Inwieweit kann durch Wahl eines anderen Funktionenraums die Existenz bzw. Eindeutigkeit von Lösungen sichergestellt werden?

- Muss eventuell der Begriff „Lösung", d.h. die Art, wie eine Funktion eine gegebene Gleichung löst, neu überdacht bzw. neu formuliert werden?

0.1 Einige technische Grundlagen (Hilfsmittel)

(1) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Wir schreiben $\partial\Omega \in C^k$, $k \in \mathbb{N}$, falls $\partial\Omega$ lokal als Graph einer C^k-Funktion dargestellt werden kann, d.h. für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ existieren ein Radius $r > 0$ und (nach Drehen und Verschieben) eine Funktion $\gamma \in C^k(\mathbb{R}^{d-1})$ mit $\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) \mid x_d > \gamma(x_1, \ldots, x_{d-1})\}$.

Falls $\partial\Omega \in C^1$, so existiert entlang von $\partial\Omega$ eine äußere Normale $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d)$. Für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $\partial\Omega \in C^1$ bezeichnet man mit $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \nabla u, \nu \rangle$ die (äußere) Normalenableitung von u.

(2)

Satz (Gauß-Green). *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$.*

(a) Für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und $i \in \{1, \dots, d\}$ gilt: $\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(x)\nu_i(x)\ \mathrm{d}\mathcal{O}(x)$.

(b) Für $v, w \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt $\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)w(x)\ \mathrm{d}x = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v(x)w(x)\nu_i(x)\ \mathrm{d}\mathcal{O}(x)$ und $i \in \{1, \dots, d\}$.

Beweis. (b) folgt aus (a) mittels $u = vw$.

□

Als unmittelbare Konsequenz ergibt sich:

Satz (Greensche Formel). *Seien $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Dann gilt:*

(i) $\int_\Omega \Delta u(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\ \mathrm{d}\mathcal{O}(x)$.

(ii) $\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\ \mathrm{d}x = -\int_\Omega u(x)\Delta v(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x)\ \mathrm{d}\mathcal{O}(x)$.

(iii) $\int_\Omega (u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x))\ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) - v(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\right)\ \mathrm{d}\mathcal{O}(x)$

Beweis. (i): Wähle im vorherigen Satz, Teil (a) $u(x) \leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$: $\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)\ \mathrm{d}(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\nu_i(x)\ \mathrm{d}\mathcal{O}(x)$. Jetzt Summation über $i \in \{1, \dots, d\}$: $\int_\Omega \Delta u(x) = \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nu(x)\rangle\ \mathrm{d}\mathcal{O}(x)$. (ii) und (iii) folgen unmittelbar.

□

(3)

Satz. *Sei $f \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^d$*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(x_0,r)} f(x)\ \mathrm{d}\mathcal{O}(x)\right)\ \mathrm{d}x.$$

Ebenso gilt für jedes $r > 0$ und jeds $x_0 \in \mathbb{R}^d$ die Gleichung $\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_{B(x_0,s)} f(x)\ \mathrm{d}x\right]_{s=r} = \int_{\partial B(x_0,r)} f(x)\ \mathrm{d}\mathcal{O}(x)$.

(4) (Glättungskerne s. Kapitel 2.4 im Funktionalanalysis-Skript)

Satz. *Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^d), g \in L^p(\mathbb{R}^d), 1 \leq p \leq \infty$. Dann ist $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, wobei $(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\ \mathrm{d}y$. Es gilt $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$.*

Satz (Young). *Seien* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. *Dann gilt für* $f \in L^p(\mathbb{R}^d), g \in L^q(\mathbb{R}^d)$

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \qquad (p = 2, q = 2 \Rightarrow r = \infty,\ f \star g \in C(\mathbb{R}^d)).$$

Definition. Eine Folge (ϱ_n) von Funktionen $\varrho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ heißt *Dirac-Folge* oder *Folge von Glättungskernen*, falls $\operatorname{supp} \varrho_n \in \overline{B_{\frac{1}{n}}(0)}$, $\int_{\mathbb{R}^d} \varrho_n \, \mathrm{d}x = 1$, $\varrho_n \geq 0$.

Bemerkung. *Übliche Konstruktion: Wähle* $\varrho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ *mit* $\operatorname{supp} \subset \overline{B_1(0)}, \varrho \geq 0$, *z.B.*

$$\varrho = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-|x|^2}} & \textit{für } |x| < 1, \\ 0 & \textit{für } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Setze dann $\varrho_n(x) = \frac{n^d}{\int_{\mathbb{R}^d} \varrho \, \mathrm{d}x} \cdot \varrho(nx)$.

Lemma. *Seien* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *mit* $1 \leq p < \infty$ *und* (ϱ_n) *Dirac-Folge. Dann gilt* $\|\varrho_n \star f - f\|_p \to 0$.

Bemerkung. *Beachte, dass* $\varrho_n \star f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, *denn im Allgemeinen gilt* $\partial^\alpha (f \star g) = \partial^\alpha f \star g$ *für* $|\alpha| \leq k$, $f \in C^k$.

Satz. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen. Dann ist* $C_c^\infty(\Omega)$ *dicht in* $L^p(\Omega)$ *für* $1 \leq p < \infty$, *d.h. zu* $f \in L^p(\Omega)$ *und* $\varepsilon > 0$ *existiert* $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ *mit* $\|f - f_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon$.

1 Harmonische Funktionen

1.1 Lokale Eigenschaften

In diesem Kapitel ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ immer eine offene, zusammenhängende Menge.

1.1 Definition. (a) Eine Funktion $u \in C(\Omega)$ erfüllt die *Sphären-Mittelwerteigenschaft* (Abk.: Sphären-MWE), falls für jede Kugel $B(x,r) \subset \Omega$ gilt

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}\mathcal{O}(y) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}\mathcal{O}(y).$$

(b) Eine Funktion $u \in C(\Omega)$ erfüllt die *Kugel-Mittelwerteigenschaft* (Abk.: Kugel-MWE) in Ω, falls für jede Kugel $B(x,r) \subset \Omega$ gilt

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Bemerkung. *(1) Es gilt*

$$|\partial B(x,r)| = |\partial B(0,r)| = r^{d-1}\omega_d,$$

wobei $\omega_d = |\partial B(0,1)|$. *Weiter gilt*

$$|B(x,r)| = |B(0,r)| = \frac{r^d}{d}\omega_d.$$

(2) Die Sphären-MWE ist äquivalent zu: $\forall\ B(x,r) \subset \Omega$ *gilt*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_d} \int_{|\omega|=1} u(x+r\omega)\,\mathrm{d}\mathcal{O}(\omega) \qquad (y = x + r\omega).$$

Die Kugel-MWE ist äquivalent zu: $\forall\ B(x,r) \subset \Omega$ *gilt*

$$u(x) = \frac{\mathrm{d}}{\omega_d} \int_{|z|\le 1} u(x+rz)\,\mathrm{d}z \qquad (y = x + rz).$$

(3) *Diese beiden Eigenschaften sind für stetige Funktionen äquivalent und wir werden in diesem Fall nur noch von der* Mittelwerteigenschaft *(Abk. MWE) sprechen. Dies werden wir im Folgenden beweisen.*

1.2 Lemma. *Sei $u \in C(\Omega)$. Dann sind die beiden MWE'en äquivalent.*

Beweis. Es gelte die Sph.-MWE. Sei $B(x,r) \subset \Omega$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,s)} u(y)\,\mathrm{d}\mathcal{O}(y) \right) \mathrm{d}s \\ &= \int_0^r u(x) s^{d-1} \omega_d \,\mathrm{d}s = u(x)\,\omega_d\,\frac{r^d}{d}. \end{aligned}$$

Nun gelte die Kugel-MWE. Sei $B(x,r) \subset \Omega$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}\mathcal{O}(y) &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(\int_{B(x,s)} u(y)\,\mathrm{d}y \right) \right]_{s=r} \\ &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(u(x) \frac{s^d \omega_d}{d} \right) \right]_{s=r} = u(x)\,\omega_d\,r^{d-1}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung. *Fortan sprechen wir von* der *MWE und verwenden jeweils diejenige Version, welche uns hilft.*

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, zusammenhängend und beschränkt.

1.3 Proposition. *Die Funktion $u \in C(\overline{\Omega})$ erfülle die MWE in Ω und sei nicht konstant. Dann nimmt u Maximum und Minimum nur auf dem Rand $\partial\Omega$ an, d.h. nicht in Ω.*

Beweis. (Beweis nur für das Maximum.) Sei $M = \max_{x \in \Omega} u(x)$ (dieses existiert, da Ω beschränkt ist). Definiere

$$A = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}\,.$$

Wir zeigen, dass A in Ω sowohl abgeschlossen (klar) als auch offen ist.
Seien $x_0 \in A$ und $B(x_0,r) \subset \Omega$ mit $\overline{B(x_0,r)} \subset \Omega$. Dann gilt

$$\begin{aligned} M &= u(x_0) \overset{\text{MWE}}{=} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} u(y)\,\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{M}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} 1\,\mathrm{d}y = M. \end{aligned}$$

Hieraus folgt also

$$\int_{B(x_0,r)} u(y)\,\mathrm{d}y = M\,|B(x_0,r)|$$

und somit

$$u = M \quad \text{in } B(x_0,r).$$

Also ist $B(x_0,r) \subset A$ und somit A offen in Ω. Es gilt $A \in \{\emptyset, \Omega\}$, wobei $A \neq \Omega$ gelten muss, da u nicht konstant ist. Wir erhalten $A = \emptyset$.

$\square$

1.4 Definition. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt *harmonisch in* Ω, falls

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

1.5 Satz. *(a) Sei $u \in C^2(\Omega)$ und harmonisch in Ω. Dann erfüllt u die MWE in Ω.*

(b) Sei $u \in C(\Omega)$ und u erfülle die MWE in Ω. Dann gilt

$$u \in C^\infty(\Omega)$$

und u ist harmonisch in Ω.

Bemerkung. *Funktionen, die harmonisch sind in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sind, sind also glatt und nehmen in Ω weder Maximum noch Minimum an.*

Beweis. (a) Sei $B(x_0,r) \subset \Omega$. Dann gilt für $0 < s < r$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{B(x_0,s)} \Delta u(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\partial B(x_0,s)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,\mathrm{d}\mathcal{O}(y) \\
&= \int_{\partial B(x_0,s)} \langle \nabla u(y), \nu(y)\rangle\ \mathrm{d}\mathcal{O}(y) \qquad [y = x_0 + s\omega] \\
&= \int_{\partial B(0,1)} \langle \nabla u(x_0+s\omega), \nu(x_0+s\omega)\rangle\ \mathrm{d}\mathcal{O}(\omega) \\
&= \int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial u}{\partial s}(x_0+s\omega)\, s^{d-1}\,\mathrm{d}\mathcal{O}(\omega) \\
&= s^{d-1} \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_{\partial B(0,1)} u(x_0+s\omega)\,\mathrm{d}\mathcal{O}(\omega)}_{=0}.
\end{aligned}$$

Integration $\int_0^r (\cdot)\,\mathrm{d}s$ liefert

$$0 = \int_{\partial B(0,1)} u(x_0 + r\omega)\,\mathrm{d}\mathcal{O}(\omega) - u(x_0)\,|\partial B(0,1)|.$$

Es folgt die MWE

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_d} \int_{|\omega|=1} u(x_0 + r\omega)\,\mathrm{d}\mathcal{O}(\omega).$$

(b) Wir zeigen, dass es eine Folge (ϱ_ε) von Glättungskernen gibt mit

$$u(x) = (\varrho_\varepsilon * u)(x) \qquad \text{für } x \in \Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

(Vgl. Def. von (ϱ_n) in Kapitel 0.) Sei $\varrho \in C_c^\infty(B(0,1))$ mit $\int \varrho = 1$ und

$$\varrho(x) = \psi(|x|)\ \forall\, x,$$

d.h. $\omega_d \int_0^\infty r^{d-1}\psi(r)\,\mathrm{d}r = 1$. Setze für $\varepsilon > 0$

$$\varrho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\,\varrho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Für $x \in \Omega_\varepsilon$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u(y)\,\varrho_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^d} u(x+y)\varrho_\varepsilon\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{|y|<\varepsilon} u(x+y)\,\varrho\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{|y|<1} u(x+\varepsilon y)\varrho(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 r^{d-1} \left(\int_{\partial B(0,1)} u(x+\varepsilon r\omega)\,\underbrace{\varrho(r\omega)}_{\psi(r)}\,\mathrm{d}\mathcal{O}(\omega) \right) \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \psi(r)\,r^{d-1} \underbrace{\left(\int_{\partial B(0,1)} u(x+\varepsilon r\omega)\,\mathrm{d}\mathcal{O}(\omega) \right)}_{\overset{\text{MWE}}{=} u(x)\,\omega_d} \mathrm{d}r \\
&= u(x)\,\omega_d \int_0^1 \psi(r)\,r^{d-1}\,\mathrm{d}r \\
&= u(x).
\end{aligned}$$

Also gilt
$$u \in C^\infty(\Omega).$$
Damit folgt wie im Beweis von Teil (a) für jede Kugel $B(x,r) \subset \Omega$
$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)} \Delta u(y)\,\mathrm{d}y &= r^{d-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_{\partial B(0,1)} u(x+r\omega)\,\mathrm{d}\mathcal{O}(\omega)\\ &= r^{d-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\omega_d\, u(x)\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$
Also gilt
$$\Delta u(y) = 0 \;\forall\, y \in \Omega.$$
□

1.6 Definition. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt *subharmonisch in* Ω *(superharmonisch)*, falls
$$-\Delta u \leq 0 \qquad \text{in } \Omega \quad (\text{bzw. } -\Delta u \geq 0).$$
1.7 Folgerung. *Sei $u \in C^2(\Omega)$. Dann ist u subharmonisch (superharmonisch) in Ω genau dann, wenn für jede Kugel $B(x_0,r) \subset \Omega$*
$$u(x_0) \overset{(\geq)}{\leq} ⨍_{B(x_0,r)} u(y)\,\mathrm{d}y$$
gilt.

Beweis. Wurde bereits geführt (Gleichung durch Ungleichung ersetzen).

□

1.8 Satz (starkes Maximumsprinzip)**.** *Es gelte $-\Delta u \leq 0$ in Ω $(-\Delta u \geq \Omega)$ und es gebe einen Punkt $x_0 \in \Omega$ mit*
$$u(x_0) = \sup_\Omega u \qquad (u(x_0) = \inf_\Omega u).$$
Dann ist u konstant.

1.9 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit*
$$\Delta u = \Delta v \text{ in } \Omega \text{ und } u = v \text{ auf } \partial\Omega.$$
Dann ist $u = v$.

Beweis. Setze $w = u - v$, dann ist w harmonisch in Ω und erfüllt $w = 0$ auf $\partial\Omega$. Das Maximumsprinzip impliziert aber

$$(0 =) \min_{\partial\Omega} w \leq w \leq \max_{\partial\Omega} w (= 0).$$

□

Bemerkung. *Dieser Satz bedeutet, dass das Problem*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{in } \Omega \\ u = g & \textit{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für beschränkte Gebiete und stetige Randwerte $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ höchstens eine *Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ besitzt.*

1.10 Satz. *Sei u harmonisch in einem Gebiet Ω. Dann gilt für jede Kugel $B(x_0, r) \subset \Omega$ und jeden Multiindex α mit $|\alpha| = k \in \mathbb{N}_0$*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{c_k}{r^{d+k}} \, \|u\|_{L^1(B(x_0,r))},$$

wobei

$$c_0 = \frac{1}{\omega_d}, \quad c_k = \frac{(2^{d+1} \, d \, k)^k}{\omega_d} \ \textit{für } k \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Der Fall $k = 0$ ist äquivalent zur Mittelwerteigenschaft. Sei also $k = 1$. Mit u ist auch $\partial_i u$ harmonisch, also

$$\begin{aligned} |\partial_i u(x_0)| &= \left| \fint_{B(x_0, \frac{r}{2})} \partial_i u(y) \, \mathrm{d}y \right| \\ &= \frac{2^d}{\omega_d \, r^d} \left| \int_{\partial B(x_0, \frac{r}{2})} u(y) \nu_i(y) \, \mathrm{d}\mathcal{O}(y) \right| \\ &\leq \frac{2d}{r} \max_{\partial B(x_0, \frac{r}{2})} |u|. \end{aligned}$$

Für $x \in B(x_0, \frac{r}{2})$ gilt ($k = 0$)

$$|u(x)| \leq \frac{2^d}{\omega_d \, r^d} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \quad \left[L^1(B(x_0, \frac{r}{2})) \right].$$

Also

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{2^{d+1} d}{\omega_d \, r^{d+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}.$$

Damit ist der Fall $k = 1$ bewiesen. Im allgemeinen Fall wollen wir den Beweis mittels Induktion führen. Es gelte also die Aussage für $k-1$. Sei $B(x_0, r) \subset \Omega$ mit α Multiindex und $|\alpha| = k$. Es gibt dann $i \in \{1, \dots, d\}$ und einen Multiindex β mit $|\beta| = k-1$, sodass gilt

$$D^\alpha u = \partial_i (D^\beta u).$$

Nun schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x_0)| &= \left|\partial_i \left(D^\beta u\right)(x_0)\right| \\ &= \left| \fint_{B(x_0, \frac{r}{k})} \partial_i \left(D^\beta u\right)(y)\, \mathrm{d}y \right| \\ &\leq \frac{d\,k}{r} \max_{\partial B(x_0, \frac{r}{k})} \left|D^\beta u\right| \end{aligned}$$

Für $x \in \partial B(x_0, \frac{r}{k})$ ist $B(x, \frac{k-1}{k} r) \subset B(x_0, r)$. Nun wenden wir die Aussage für $k-1$ an, um $\left|D^\beta u(x)\right|$ nach oben abzuschätzen und erhalten die Aussage.

□

1.11 Satz (Liouville)**.** *Jede beschränkte Funktion $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, welche harmonisch ist in $\mathbb{R}^d$, ist bereits konstant.*

Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^d$ beliebig. Für jeden Radius $r > 0$ gilt mit einer positiven Konstanten c

$$\begin{aligned} |\nabla u(x_0)| &\leq \frac{c}{r^{d+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \\ &\leq \frac{c}{r^{d+1}} \sup_{\mathbb{R}^d} |u| \cdot |B(x_0, r)| \\ &\leq \frac{c}{r} \|u\|_\infty \xrightarrow{r\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Also folgt aus $\nabla u = 0$, dass u konstant ist.

□

1.12 Satz. *Sei $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch in Ω. Dann ist u bereits analytisch.*

Beweis-Idee. Die Taylorreihe von u in einem Punkt x_0 ist

$$\sum_\alpha \frac{D^\alpha u(x_0)(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}.$$

Man zeigt mit Satz 1.10, das das Restglied

$$\begin{aligned} R_N(x) &= u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \\ &= \sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha \left(u(x_0) + \theta(x-x_0)\right)(x-x_0)^\alpha \end{aligned}$$

eine Abschätzung der Form

$$|R_N(x)| \leq \frac{C(u)}{2^N}$$

erfüllt.

1.13 Satz (Harnack I)**.** *Für jede Kugel $B(x_0, 4R)$ und jede nicht-negative Funktion $u\colon B(x_0, 4R) \to \mathbb{R}$, welche harmonisch in $B(x_0, 4R)$ ist und alle Punkte $x, y \in B(x_0, R)$ gilt*

$$u(x) \leq 3^d\, u(y).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{|B(x,R)|} \int_{B(x,R)} u \\ &\leq \frac{1}{|B(x,R)|} \int_{B(y,3R)} u \\ &\leq \frac{|B(y,3R)|}{|B(x,R)|} ⨍_{B(y,3R)} u \\ &= 3^d\, u(y). \end{aligned}$$

□

Bemerkung. *Die Konstante 3^d ist unabhängig von u, x_0 und R!*

1.14 Satz (Harnack II)**.** *Zu $\theta \in (0,1)$ existiert eine Konstante c_θ derart, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$, alle harmonischen, nicht-negativen Funktionen $u\colon B(x_0, R) \to \mathbb{R}$ und alle $x, y \in B(x_0, \theta R)$ gilt*

$$u(x) \leq c_\theta\, u(y).$$

Beweis. Bild ... :-(... und Kettenargument: $\exists\, N \in \mathbb{N}$ und $x_0, \ldots, x_N$ mit $x_0 = x$, $x_N = y$ und $r_\theta > 0$ mit

$$B(x_{i+1}, 3r_\theta) \supset B(x_i, r_\theta).$$

□

1.15 Satz (Harnack III)**.** *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $\Omega' \Subset \Omega$ ein beschränktes Teilgebiet. Dann existiert eine positive Konstante $c > 0$ (abhängig von Ω und Ω') derart, dass für jede nicht-negative Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, welche harmonisch in Ω ist, gilt:*

$$\sup_{\Omega'} \le c \inf_{\Omega'} u.$$

Beweis. Hintereinanderausführung von Satz 1.14. Ungefähr gilt $c \approx 3^{dN}$ mit $N = 2\,\mathrm{dist}(\overline{\Omega'}, \partial\Omega)$.

□

Die Harnacksche Ungleichung hat den sog. *Harnack-Konvergenzsatz* zur Folge. Zunächst bemerken wir, dass aufgrund der Mittelwerteigenschaft bereits folgender Satz gilt:

1.16 Satz. *Falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $u_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch in Ω ist und ein $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ existiert mit*

$$\sup_{\Omega} |u_n - u| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

dann ist u ebenfalls harmonisch.

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$ und $B(x,r) \subset \Omega$ gilt aufgrund der MWE

$$u_n(x) = \fint_{B(x,r)} u_n(y)\,\mathrm{d}y.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$u_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} u(x)$$

und es folgt

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} u_n(y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y$$

und somit ist u harmonisch.

□

1.17 Satz (Harnack-Konvergenzsatz)**.** *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und (u_n) eine Folge monoton wachsender Funktionen $u_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$, harmonisch in Ω. Es gebe einen Punkt $y \in \Omega$, für welchen die Zahlenfolge $(u_n(y))$ beschränkt ist. Dann konvergiert die Folge (u_n)*

gleichmäßig auf jedem beschränkten Teilgebiet $\Omega' \Subset \Omega$ gegen eine Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, harmonisch in Ω.

Beweis. $(u_n(y))$ konvergiert, d.h. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N:$

$$0 \le u_m(y) - u_n(y) < \varepsilon \qquad \forall\, m \ge n \ge N.$$

Satz 1.15 liefert: $\exists\, c > 0:$

$$\sup_{\Omega'} |u_m - u_n| \le c\,\varepsilon,$$

d.h. (u_n) konvergiert gleichmäßig in Ω'. Die Grenzfunktion u ist harmonisch nach Satz 1.16.

□

1.2 Die Poisson-Gleichung

Ziel ist es nun, für (beschränkte) Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $\partial\Omega \in C^1$ Lösungen der Gleichungen bzw. des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

zu studieren.

1.18 Definition. Die Funktion $\Phi\colon \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\pi}\ \ln(|x|) & (d = 2) \\ \frac{1}{(d-2)\omega_d}\ \frac{1}{|x|^{d-2}} & (d \ge 3) \end{cases}$$

heißt *Fundamentallösung* von $\Delta u = 0$.

Bemerkung.

- *Erinnerung: Es ist* $\int_{|x| \underset{(\le)}{\ge} 1} \frac{1}{|x|^\alpha}\,\mathrm{d}x < \infty$ *genau dann, wenn* $\alpha \underset{(<)}{>} d$.
- *Es gilt* $\Phi(x) = v(|x|)$ *für* $v\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$.
- *Jede Fortsetzung* $\tilde{\Phi}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *genügt* $\tilde{\Phi} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

- $\exists\, c > 0\colon\ \forall\, x \neq 0$

$$\begin{aligned} |\nabla\Phi(x)| &\leq \frac{c}{|x|^{d-1}}, \\ \left|D^2\Phi(x)\right| &\leq \frac{c}{|x|^d}. \end{aligned}$$

- $(\Delta\Phi)(x) = 0\ \forall\ x \neq 0$.

1.19 Satz. *Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$. Sei $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$u(x) = \Phi * f \quad \left(= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y\right).$$

Dann gilt $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ und

$$-\Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^d.$$

Beweis. Achtung: $\Delta\Phi(x) \approx |x|^d$ und damit $\Delta\Phi \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$!

Mit den Eigenschaften der Faltung und $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$ erhalten wir $u \in C^2(\mathbb{R})$.

Sei $x \in \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y)\, \Delta_x f(x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\, \Delta_x f(x-y)\,\mathrm{d}y}_{=:I_\varepsilon} + \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)^\complement} \Phi(y)\, \Delta_x f(x-y)\,\mathrm{d}y}_{=:J_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} |I_\varepsilon| &\leq C \left\|D^2 f\right\|_\infty \left|\int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\,\mathrm{d}y\right| \\ &\leq C \left\|D^2 f\right\|_\infty \cdot \begin{cases} |\ln(\varepsilon)|\ \varepsilon^2 & (d=2) \\ \varepsilon^2 & (d \geq 3) \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$J_\varepsilon = \underbrace{-\int_{B(0,\varepsilon)^\complement} \langle \nabla\Phi(y), \nabla_J f(x-y)\rangle\,\mathrm{d}y}_{=:J_\varepsilon^1} + \underbrace{\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial\nu}(x-y)\,\mathrm{d}\mathcal{O}(y)}_{=:J_\varepsilon^2}.$$

Nun schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}\left|J_\varepsilon^2\right| &\leq \|\nabla f\|_\infty \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \, \mathrm{d}\mathcal{O}(y) \\ &= \|\nabla f\|_\infty \, C \cdot \begin{cases} |\ln(\varepsilon)| \cdot \varepsilon & (d=2) \\ \varepsilon & (d \geq 3) \end{cases}\end{aligned}$$

und

$$\left|J_\varepsilon^1\right| = \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)^\complement} \underbrace{\Delta\Phi(y)}_{=0} f(x-y) \, \mathrm{d}y}_{=0} - \int_{\partial B(0,\varepsilon)^\complement} \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y)}_{=\langle \nabla\Phi(y), \nu(y)\rangle} f(x-y) \, \mathrm{d}\mathcal{O}(y).$$

(Nebenrechnung: Im Fall $d \geq 3$ haben wir

$$\partial_i \Phi(y) = \frac{-1}{(d-2)\,\omega_d}(2-d)|x|^{1-d} \frac{x_i}{|x|} = \frac{-1}{\omega_d}|x|^{-d} x_i$$

und

$$\nabla\Phi(y) = \frac{-1}{\omega_d}|y|^{-d} y.$$

Für $y \in \partial B(0,\varepsilon)$ gilt

$$\nu(y) = \frac{-y}{|y|} = \frac{-y}{\varepsilon}$$

und

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) = \langle \nabla\Phi(y), \nu(y)\rangle = \frac{1}{\varepsilon\,\omega_d}|y|^{2-d} = \frac{\varepsilon^{1-d}}{\omega_d}.$$

Ende der Nebenrechnung.)

Also erhalten wir

$$J_\varepsilon^1 = -\frac{\varepsilon^{1-d}}{\omega_d} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) \, \mathrm{d}\mathcal{O}(y) = -\fint_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y) \, \mathrm{d}\mathcal{O}(y) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f(x).$$

$\square$

1.20 Proposition. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und seien $x \in \Omega$, $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
u(x) &= -\int_\Omega \Phi\,(y-x)\ \Delta u\,(y)\ \mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \left(\Phi\,(x-y)\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\,\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\,(y-x) \right)\ \mathrm{d}\mathcal{O}(y).
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Bemerkung. *Denke „$-\Delta\Phi = \delta_0$" beziehungsweise „$-\Delta\Phi * u = u$".*

Beweis. Sei $\overline{B(x,\varepsilon)} \subset \Omega$ und $V_\varepsilon = \Omega \setminus B(x,\varepsilon)$. Es gilt

$$
\int_{V_\varepsilon} \left[u(y)\ \underbrace{\Delta\Phi(y-x)}_{=0} - \Phi(y-x)\,\Delta u(y) \right]\ \mathrm{d}y = \int_{\partial V_\varepsilon} \left[u(y)\,\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) - \Phi(y-x)\,\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right]\ \mathrm{d}\mathcal{O}(y) \tag{1.2}
$$

und

$$
\left| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \Phi(y-x)\,\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\ \mathrm{d}\mathcal{O}(y) \right| \leq C\,\|u\|_\infty \underbrace{\max_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi|}_{\approx \varepsilon^{2-d}} \cdot \underbrace{|\partial B(x,\varepsilon)|}_{\approx e^{d-1}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.
$$

Mit Satz (1.19) wissen wir

$$
\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\,\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x)\ \mathrm{d}\mathcal{O}(y) = ⨍_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\ \mathrm{d}\mathcal{O}(y) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} u(x).
$$

Der Grenzübergang für $\varepsilon \to 0$ in Gleichung (1.2) führt zu

$$
-\int_\Omega \Phi(y-x)\,\Delta u(y)\ \mathrm{d}y = u(x) + \int_{\partial\Omega} \left[u(y)\,\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right]\ \mathrm{d}\mathcal{O}(y).
$$

□

Bemerkung. *Falls*

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= f \quad \textit{auf } \Omega \\
u &= g \quad \textit{auf } \partial\Omega \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} &= h \quad \textit{auf } \partial\Omega,
\end{aligned}
$$

so wird u durch Gleichung (1.1) dargestellt. Dieses Problem ist überbestimmt, denn

$$
\int_\Omega \Delta u = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\ \mathrm{d}\mathcal{O}.
$$

Unser Ziel ist nun die Einführung einer Hilfsfunktion, welche zu einer Darstellung von $u(x)$ führt, die nicht (explizit)

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\restriction_{\delta\Omega}$$

verwendet.

1.21 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Die Funktion $G\colon\ (\Omega \times \Omega) \setminus \operatorname{diag} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \varphi^x(y),$$

wobei für $x \in \Omega$ die Funktion $\varphi^x\colon \Omega \to \mathbb{R}$ Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \Delta\varphi^x(y) &= 0, \ y \in \Omega, \\ \varphi^x(y) &= \Phi(y - x), \ y \in \partial\Omega \end{aligned}$$

ist, heißt *Green-Funktion von* Δ *im Gebiet* Ω.

Wir wollen im weiteren Verlauf die Fragen untersuchen, wann es ein solches G gibt und wie G aussieht.

Denke: Für $x \in \Omega$ löst dann die Funktion $y \mapsto G(x, y)$ das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta G &= \delta_x \quad \text{in } \Omega, \\ G &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Doch zunächst werden wir festhalten, wofür die Green-Funktion nützlich ist. Dazu nehmen wir nun an, dass wir eine solche gegeben haben und betrachten den

1.22 Satz. *Seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *ein beschränktes Gebiet mit* $\partial\Omega \in C^1$. *Seien* $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$. *Die Funktion* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *sei eine Lösung von*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dann gilt für $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_\Omega G(x, y)\, f(y)\ \mathrm{d}y \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y)\, g(y)\ \mathrm{d}\mathcal{O}(y). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Beweis. Zunächst gilt für $x \in \Omega$

$$0 = \int_\Omega \varphi^x(y)\,\Delta u(x)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \left[u(y)\,\frac{\partial \varphi^x}{\partial \nu}(y) - \underbrace{\varphi^x}_{=\Phi(y-x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] \mathrm{d}\mathcal{O}(y). \tag{1.4}$$

Addition von Gleichung (1.4) und (1.1) liefert

$$\begin{aligned} u(X) &= \int_\Omega \underbrace{(-\Phi(y-x) + \varphi^x(y))}_{=-G(x,y)} \underbrace{\Delta u(y)}_{=-f(y)}\,\mathrm{d}y \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \underbrace{u(y)}_{=g(y)} \left[\underbrace{-\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) + \frac{\partial \varphi^x}{\partial \nu}(y)}_{=-\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)} \right] \mathrm{d}\mathcal{O}(y). \end{aligned}$$

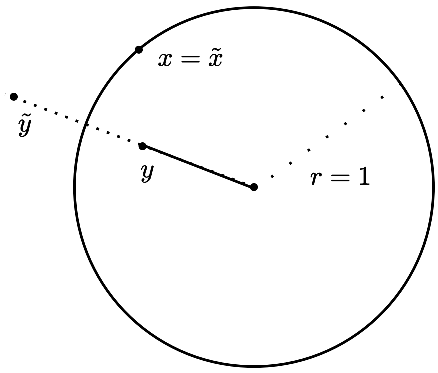
□

1.23 Proposition. *In jedem Fall gilt für $x, y \in \Omega$, $x \neq y$,*

$$G(x,y) = G(y,x).$$

(D.h. die Greensche Funktion ist symmetrisch.)

Fall I: Kugeln



Für $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ definieren wir $\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$. Offensichtlich gilt also $|\tilde{x}| = \frac{1}{|x|}$. Im Folgenden sei $B := B(0,1)$. Für $x \in B$ setzen wir

$$y \mapsto \varphi^x(y) = \Phi\left(|x|\,(y - x)\right),$$

falls die Raumdimension $d \geq 3$ ist.

Die Funktion $y \mapsto \varphi^x(y)$ ist harmonisch für $x \neq y$. Für $y \in \partial B$ und $x \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} |x|^2 \, |y - \tilde{x}|^2 &= |x|^2 \, \langle y - \tilde{x}, y - \tilde{x} \rangle \\ &= |x|^2 \left(\underbrace{|y|^2}_{=1} + \frac{1}{|x|^2} - 2 \, \langle \tilde{x}, y \rangle \right) \\ &= |x|^2 + 1 - 2 \, \langle x, y \rangle = |x - y|^2. \end{aligned}$$

Also ist

$$(|x| \, |y - \tilde{x}|)^{-(d-2)} = |x - y|^{-(d-2)}$$

und somit

$$\varphi^x = \Phi(\cdot - x) \text{ auf } \partial B$$

wie gewünscht.

1.24 Definition. Die Green-Funktion von Δ für die Einheitskugel $B \subset \mathbb{R}^d$ und $d \geq 2$ ist gegeben durch

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi\left(|x| \, (y - \tilde{x})\right)$$

für $x, y \in B$ und $x \neq y$.

1.25 Lemma. *Seien $B_r = B(0, r) \subset \mathbb{R}^d$, $g \in C(\partial B_r)$ und $u \in C^2(\overline{B_r})$ eine Lösung von*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } B_r, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial B_r. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{\omega_d \, r} \int_{\partial B_r} \frac{g(y)}{|x - y|^d} \, \mathrm{d}\mathcal{O}(y). \tag{1.5}$$

Beweis. Zunächst nur im Fall $r = 1$. Der allgemeine Beweis wird über Skalierung geführt.

Wir wissen zunächst, dass

$$u(x) = -\int_{\partial B} g(y) \, \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) \, \mathrm{d}\mathcal{O}(y).$$

Nun fixieren wir $x \in B$ und haben

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(x, y) = \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(y - x)}_{= \frac{1}{\omega_d} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^d}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_i} \Phi\left(|x| \, (y - \tilde{x})\right)}_{= \frac{-1}{\omega_d} \frac{y_i |x|^2 - x_i}{(|x| \, |y - \tilde{x}|)^d} \overset{|y|=1}{=} \frac{-1}{\omega_d} \frac{y_i |x|^2 - x_i}{|x-y|^d}}$$

und es folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) &= \sum_{i=1}^{d} y_i \frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) \\
&= (\dots) \text{ (einsetzen)} \\
&= \frac{-1}{\omega_d} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^d}.
\end{aligned}
$$

□

1.26 Definition. Die Funktion $K\colon B_r \times \partial B_r \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$K(x,y) = \frac{r^2 - |x|^2}{\omega_d\, r} \frac{1}{|x-y|^d}$$

heißt *Poisson-Kern von Ω für die Kugel B_r.*

1.27 Satz. *Seien $g \in C(\partial B_r)$ und $u\colon B_r \to \mathbb{R}$ definiert durch (1.5). Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0 \quad \textit{in } B_r, \\
\lim_{x \to z} u(x) &= g(z) \quad \textit{für alle } z \in \partial B_r.
\end{aligned}
$$

Bemerkung. *Dies bedeutet, dass der Übergang zu ∂B_r stetig ist!*

Beweis. Da $y \mapsto G(x,y)$ für $y \in B_r$, $y \neq x$, harmonisch ist, ist auch $x \mapsto G(x,y)$ für $x \in B_r$, $x \neq y$, harmonisch. Somit ist auch die Funktion

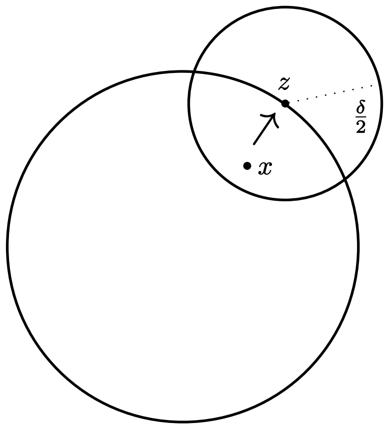
$$x \mapsto \frac{-\partial G}{\partial \nu}(x,y) = K(x,y), \quad \text{für } x \in B_r, y \in \partial B_r$$

stetig. Vertauschung von Differentiation und Integration (man überlegt sich leicht, dass dies möglich ist) liefert

$$\Delta u = 0 \text{ in } B_r$$

und damit auch

$$u \in C^\infty(B_r).$$



Wir bemerken, dass für alle $x \in B_r$

$$\int_{\partial B_r} K(x,y)\ \mathrm{d}\mathcal{O}(y) = 1$$

gilt, denn $u \equiv 1$ ist eindeutige Lösung von $\Delta u = 0$ in B_r mit $u\restriction_{\partial B_r} = 1$.

Sei nun $z \in \partial B_r$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta > 0$ mithilfe der Stetigkeit von g derart, dass

$$|g(y) - g(z)| < \varepsilon \quad \text{für } |y - z| < \delta.$$

Für $|x - z| < \frac{\delta}{2}$ gilt

$$\begin{aligned}
|g(z) - u(x)| &= \left| \int K(x,y)\ [g(z) - g(y)]\ \mathrm{d}\mathcal{O}(y) \right| \\
&\leq \int_{\substack{y \in \partial B_r, \\ |y-z| \leq \delta}} \left(\frac{r^2 - |x|^2}{\omega_d\, r} \right) \frac{\overbrace{|g(z) - g(y)|}^{\leq \varepsilon}}{|x-y|^d}\ \mathrm{d}\mathcal{O}(y) \\
&\quad + \int_{\substack{y \in \partial B_r, \\ |y-z| > \delta}} \left(\frac{r^2 - |x|^2}{\omega_d\, r} \right) \frac{|g(z) - g(y)|}{|x-y|^d}\ \mathrm{d}\mathcal{O}(y) \\
&\leq \varepsilon \cdot 1 + 2\|g\|_\infty \underbrace{(r^2 - |x|^2)}_{(r-|x|)(r+|x|)} \left(\frac{\delta}{2} \right)^{-d} \\
&\leq \varepsilon + 2\|g\|_\infty \left(\frac{\delta}{1} \right)^{-d} \cdot 2r\ (r - |x|)\,.
\end{aligned}$$

Für $|x - z| < \varepsilon\ \left(\frac{\delta}{2}\right)^d\ (4\|g\|_\infty r)^{-1}$ folgt

$$|u(x) - g(z)| < 2\varepsilon.$$

$\square$

Bemerkung. *Die Beweisidee ist nur „lokal", d.h. Stetigkeit von g im Punkt $z \in \partial B_r$ reicht aus, um $\lim_{x\to z} u(x) = g(z)$ zu zeigen.*

Fall II: Halbraum

$$\mathbb{R}^d_+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid x_d > 0 \right\}$$

Der Halbraum ist unbeschränkt. Die Darstellungsformeln gelten zunächst nicht und es ist auch sonst kein Analogon zu Lemma 1.25.

Wir erraten die Darstellungsformel und beweis direkt das Analogon von Satz 1.27. Für $x \in \mathbb{R}^d_+$ setzen wir

$$\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{d-1}, -x_d)$$

und für $x, y \in \mathbb{R}^d_+$ setzen wir

$$\varphi^x(y) = \Phi(y - \tilde{x}) = \Phi(y_1 - x_1, \ldots, y_{d-1} - x_{d-1}, y_d + x_d).$$

Dann erhalten wir für $x \in \mathbb{R}^d_+$ wie gewünscht

$$\begin{aligned} \Delta\varphi^x &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d_+, \\ \varphi^x &= \Phi(\cdot - x) \quad \text{auf } \partial\mathbb{R}^d_+. \end{aligned}$$

1.28 Definition. Die *Green-Funktion* von Δ für die obere Halbebene $\mathbb{R}^d_+$, $d \geq 2$, ist gegeben durch

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - \tilde{x}).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y_d}(x, y) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_d}(y - x) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_d}(y - \tilde{x}) \\ &= \frac{1}{(d-2)\omega_d} |y - x|^{1-d} \cdot (2 - d) \frac{(y - x)_d}{|y - x|} - \frac{1}{(d-2)\omega_d} |y - \tilde{x}|^{1-d} \cdot (2 - d) \frac{(y - \tilde{x})_d}{|y - \tilde{x}|} \\ &= \frac{-1}{\omega_d} \left(\frac{y_d - x_d}{|y - x|^d} - \frac{y_d + x_d}{|y - \tilde{x}|^d} \right). \end{aligned}$$

Damit gilt für $y \in \partial\mathbb{R}^d_+$, $x \in \mathbb{R}^d_+$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = \frac{-\partial G}{\partial y_d}(x, y) = \frac{-2x_d}{\omega_d} \frac{1}{|y - x|^d}.$$

Also haben wir Grund zur ANname, dass für „gute" Funktionen $g\colon \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ und jede Lösung $u\colon \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}$ von

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d_+, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\mathbb{R}^d_+ \end{aligned}$$

gilt:

$$u(x) = \frac{2x_d}{\omega_d} \int_{\partial\mathbb{R}^d_+} \frac{g(y)}{|x-y|^d} \, \mathrm{d}\mathcal{O}(y), \;\; x \in \mathbb{R}^d_+. \tag{1.6}$$

1.29 Definition. Die Funktion $K\colon \mathbb{R}^d_+ \times \partial\mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$K(x,y) = \frac{2x_d}{\omega_d} \, |x-y|^{-d} \, ,$$

heißt *Poisson-Kern* von Δ für den Halbraum $\mathbb{R}^d_+$.

1.30 Satz. *Seien $g \in C(\mathbb{R}^{d-1})$ beschränkt und u definiert durch (1.6). Dann ist u beschränkt und erfüllt*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \textit{in } \mathbb{R}^d_+, \\ \lim_{x \to z} u(x) &= g(z) \quad \textit{für alle } z \in \partial\mathbb{R}^d_+ \left(= \mathbb{R}^{d-1}\right). \end{aligned}$$

Beweis. Zunächst ist u beschränkt, was zu zeigen ist (Übung)! u ist harmonisch in $\mathbb{R}^d_+$, da $x \mapsto K(x,y)$ harmonisch in $\mathbb{R}^d_+$ ist und Integration und Differentiation vertauscht werden dürfen (Übung).

Seien $z \in \partial\mathbb{R}^d_+$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta > 0$ gemäß der Stetigkeit von g derart, dass $|g(y) - g(z)| < \varepsilon$ für $|y - z| < \delta$. Für $|x - z| < \frac{\delta}{2}$ gilt dann

$$|u(x) - g(z)| = \left| \int_{\partial\mathbb{R}^d_+} (g(y) - g(z)) \; K(x,y) \; \mathrm{d}\mathcal{O}(y) \right| ,$$

denn für alle $x \in \mathbb{R}^d_+$ gilt $\int_{\partial\mathbb{R}^d_+} K(x,y) \; \mathrm{d}\mathcal{O}(y) = 1$, was ebenfalls zu zeigen ist (Übung).

Es folgt also

$$\begin{aligned}
|u(x) - g(z)| &\leq \int_{\substack{y \in \partial\mathbb{R}^d_+, \\ |y-z|<\delta}} \underbrace{|g(y) - g(z)|}_{\leq \varepsilon} K(x,y) \, \mathrm{d}\mathcal{O}(y) \\
&\quad + \int_{\substack{y \in \partial\mathbb{R}^d_+, \\ |y-z|\geq\delta}} |g(y) - g(z)| \, K(x,y) \, \mathrm{d}\mathcal{O}(y) \\
&\leq \varepsilon \cdot 1 + 2\|g\|_\infty \frac{2x_d}{\omega_d} \int_{\substack{y \in \partial\mathbb{R}^d_+, \\ |y-z|>\delta}} |x-y|^{-d} \, \mathrm{d}\mathcal{O}(y) \\
&\leq \varepsilon + \frac{4\|g\|_\infty x_d}{\omega_d} 2^d \int_{\substack{y \in \partial\mathbb{R}^d_+, \\ |y-z|>\delta}} |z-y|^{-d} \, \mathrm{d}\mathcal{O}(y),
\end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}
|y-z| &\leq |y-x| + |x-z| \\
&\leq |y-x| + \frac{\delta}{2} \\
&\leq |y-x| + \frac{|y-z|}{2}
\end{aligned}$$

und somit erhalten wir

$$|y-z| \leq 2\,|y-x|.$$

Für

$$x_d < \varepsilon \left(\frac{4\|g\|_\infty}{\omega_d} 2^d \int_{|y-z|>\delta} |y-z|^{-d} \, \mathrm{d}\mathcal{O}(y) \right)^{-1}$$

folgt also

$$|u(x) - g(z)| < 2\,\varepsilon.$$

□

2 Die Wellengleichung

2.1 Die (inhomogene) Transportgleichung

Wir betrachten zunächst eine sog. *Transportgleichung*. Bei gegebenen $b \in \mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, ist $u\colon\ (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gesucht mit

$$\begin{aligned} \partial_t u + \langle b, \nabla u \rangle &= 0 \quad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) &= g \quad \text{auf } \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Wir beachten zunächst, dass gilt

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \nabla u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{i=1,\dots,d}. \end{aligned}$$

Sei $u \in C^1\left([0,\infty) \times \mathbb{R}^d\right)$ eine Lösung von (2.1). Für $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, definieren wir eine Hilfsfunktion $\alpha\colon (-t,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$\alpha(s) = u(t+s, x+sb).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= \partial_t u(t+s, x+sb) + \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} u(t+s, x+sb)\, b_i \\ &= \left(\partial_t u + \langle \nabla u, b \rangle\right)(t+s, x+sb) \\ &= 0 \end{aligned}$$

für jedes $s > -t$. Also ist α konstant und somit ist u auf der Zeit-Raum-Linie

$$\left\{(t+s, x+sb) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \mid s > -t\right\}$$

konstant. Durch den Übergang $s \searrow -t$ folgt

$$\begin{aligned} u(t+s, x+sb) &= u(0, x-tb) \\ &= g(0, x-tb). \end{aligned}$$

Ergo erfüllt jede Lösung $u \in C^1\left([0,\infty) \times \mathbb{R}^d\right)$ die Gleichung

$$u(t,x) = g(x-tb) \tag{2.2}$$

für $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$. Falls $g \in C^1(\mathbb{R}^d)$ und u wie in (2.2), so ist u eine Lösung von (2.1).

Es sei nun zusätzlich eine Funktion $f\colon (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gegeben und gesucht werde die Lösung u von der inhomogenen Transportgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u + \langle b, \nabla u \rangle &= f \quad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) &= g \quad \text{auf } \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Mit derselben Hilfsfunktion α erhalten wir für $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ und $s > -t$

$$\alpha'(s) = f(t+s, x+sb),$$

also

$$\begin{aligned} u(t,x) - \overbrace{g(x-tb)}^{=u(0,x-tb)} &= \alpha(0) - \alpha(-t) \\ &= \int_{-t}^{0} \alpha'(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{-t}^{0} f(t+s, x+sb)\,\mathrm{d}s \\ &\underset{\tilde{s}=s+t}{\overset{\text{Substitution}}{=}} \int_{0}^{t} f(s, x+(s-t)b)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Jede Lösung $u \in C^1\left((0,\infty) \times \mathbb{R}^d\right)$ von (2.3) ist also von der Form

$$u(t,x) = g(x-tb) + \int_0^t f(s, x-(t-s)b)\,\mathrm{d}s. \tag{2.4}$$

Ebenso gilt, dass u wie in (2.4) eine Lösung von (2.3) ist.

2.2 Herleitung der eindimensionalen Wellengleichung

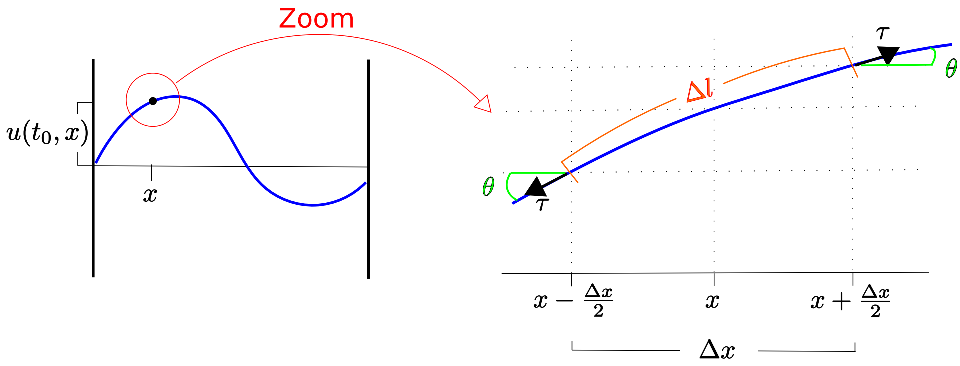


Abbildung 2.1: Schwingende Saite (blau)

Es sei in Abbildung 2.1 eine schwingende Saite abgebildet und ϱ eine konstante Massedichte, $\theta(t,x)$ der Auslenkungswinkel, τ eine konstante Spannkraft entlang der Saite, $\tau \cdot sin(\theta(t,x))$ die resultierende Kraft. Mit Newton gilt

$$(\varrho \Delta l)\ \partial_t^2 u(t,x) = \tau\ \sin\left(\theta\left(t, x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) - \tau\ \sin\left(\theta\left(t, x - \frac{\Delta x}{2}\right)\right).$$

Wir beachten, dass für die Werte von θ

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &\approx \tan(\theta) \\ &= \partial_x u(t,x) \end{aligned}$$

und

$$\cos(\theta) \approx 1$$

gilt, d.h.

$$\Delta l \approx \Delta x.$$

Also

$$\varrho\, \partial_t^2 u(t,x) = \tau\, \frac{\partial_x u\left(t, x + \frac{\Delta x}{2}\right) - \partial_x u\left(t, x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

Für $\Delta x \to 0$ ergibt sich

$$\varrho\, \partial_t^2 u(t,x) = \tau\, \partial_x^2 u\,(t,x)$$

bzw. für $c = \sqrt{\frac{\tau}{\varrho}}$

$$\partial_t^2 u(t,x) - c\, \partial_x^2 u(t,x) = 0. \tag{2.5}$$

Falls die Saite die Länge L hat, an beiden Seiten fest eingespannt ist, zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Ausgangslage $u(0,x) = g(x)$ und eine Anfangsgeschwindigkeit $\partial_t u(0,x) = h(x)$ für $x \in (0,L)$ hat, so lautet die entsprechende Gleichung

$$\begin{array}{rcll} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u & = & 0 & \text{in } (0,\infty) \times (0,L), \\ u(t,0) = u(t,L) & = & 0 & \text{für } t \geq 0, \\ u(0,\cdot) & = & g & \text{auf } (0,L), \quad \left[\lim_{x\to 0} g(x) = 0 = \lim_{x \to L} g(x)\right] \\ \partial_t u(0,\cdot) & = & h & \text{auf } (0,L). \end{array}$$

Im mehrdimensionalen Fall, d.h. $u\colon (0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (d.h. Ω ist offen und zusammenhängend) kann man die Wellengleichung

$$\partial_t^2 u - c\Delta u = 0$$

wie folgt herleiten:

Sei $V \subset \Omega$ ein (kleiner) Testkörper. Dann muss nach Newton

$$\int_V \partial_{tt}^2 u \, \mathrm{d}x = -\int_{\partial V} \langle F, \nu \rangle \, \mathrm{d}\mathcal{O}$$

gelten. Da dies für beliebige Testkörper V gelten muss, folgt

$$\partial_{tt}^2 u + \operatorname{div} F = 0.$$

Für elastische Körper gilt ungefähr

$$\begin{array}{rcl} F = F(\nabla u) \approx -c\nabla u & \Rightarrow & \partial_{tt}^2 u - c \operatorname{div}(\nabla u) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \partial_{tt}^2 u - c\Delta u = 0. \end{array}$$

Ziel ist es nun, eine (bzw. alle) Lösung(en) $u\colon (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von

$$\begin{array}{rcll} \partial_{tt}^2 u - \partial_{tt}^2 & = & 0 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,\cdot) & = & g & \text{auf } \mathbb{R}, \\ \partial_t u(0,\cdot) & = & h & \text{auf } \mathbb{R}. \end{array} \tag{2.6}$$

zu konstruieren, wobei die Funktionen $g, h \in C^1(\mathbb{R})$ gegeben sind. Sei $u \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R})$

eine Lösung von (2.6). Als Ansatz bzw. Trick betrachten wir

$$\partial_{t\,t}^2 - \partial_{x\,x}^2 = (\partial_t + \partial_x)\,(\partial_t - \partial_x)\; u.$$

Dann erfüllt die (Hilfs-) Funktion $(t,x) \mapsto v(t,x) = \partial_t u(t,x) - \partial_x u(t,x)$ die Gleichung

$$\partial_t v + \partial_x v = 0 \qquad \text{für } t > 0, x \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

v löst also eine eindimensionale Transportgleichung und es gilt also

$$v(t,x) = v(0, x-t) \qquad (t > 0, x \in \mathbb{R}).$$

Somit haben wir

$$\partial_t u(t,x) - \partial_x u(t,x) = v(0, x-t) \qquad (t > 0, x \in \mathbb{R}).$$

u löst selbst also eine inhomogene Transportgleichung mit $d = 1, b = -1, f(t,x) = v(0, x-t)$. Wegen (2.4) erhalten wir

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= g(x+t) + \int_0^t v(0,\; \underbrace{x-(s-t)-s}_{=x+t-2s=:g \Rightarrow \mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\mathrm{d}y}\;)\;\mathrm{d}s \\
&= g(x+t) + \left(-\frac{1}{2}\right) \int_{x+t}^{x-t} v(0,y)\;\mathrm{d}y \\
&= g(x+t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \left(h(y) - \underbrace{g'(y)}_{=\partial_x u(0,y)} \right) \mathrm{d}y \\
&= g(x+t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y)\;\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(x-t)\right) \\
&= \frac{g(x+t) + g(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+1} h(y)\;\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Die letzte Gleichung (2.8) heißt auch *D'Alembertsche Formel* zur Lösung der Wellengleichung.

2.1 Satz. *Seien $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ und u wie in (2.8). Dann gilt*

$$u \in C^2\left([0,\infty) \times \mathbb{R}\right)$$

und

(i)

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \qquad \textit{in } (0,\infty).$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\lim_{(t,x)\to(0,z)} u(t,x) &= g(z) \qquad \textit{für jedes } z \in \mathbb{R}, \\
\lim_{(t,x)\to(0,z)} \partial_t u(t,x) &= h(z) \qquad \textit{für jedes } z \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Beweis. Nachrechnen.

□

Bemerkung. *Die D'Alembertsche Formel (2.8) bedeutet für $k \in \mathbb{N}$*

$$g \in C^k, h \in C^{k-1} \Rightarrow u \in C^k.$$

Sie bedeutet aber auch, dass im Allgemeinen $g \in C^k, h \in C^{k-1} \Rightarrow u \in C^m$ für $m > k$ falsch *ist. D.h. „die Wellengleichung regularisiert die Anfangsdaten* nicht*!" (Anders sieht es bei der Wärmeleitungsgleichung aus.)*

Durch ungerade Fortsetzung / Spiegelung an $\{x = 0\}$, d.h. für $t > 0$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(x) &= \begin{cases} g(x), & x \geq 0, \\ -g(-x), & x < 0, \end{cases} \\
\tilde{h} &= \begin{cases} h(x), & x \geq 0, \\ -h(-x), & x < 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

kann man die d'Alembertsche Lösungsformel auch für den Fall der Halbgeraden erhalten, wenn $g(0) = 0 = h(0)$. Für $t \geq 0$, $x \geq 0$ gilt dann

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{g(x+t)+g(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,\mathrm{d}y, & x \geq t, \\ \frac{g(x+t)+g(t-x)}{2} + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t} h(y)\,\mathrm{d}y, & x < t. \end{cases} \tag{2.9}$$

Bemerkung. *Damit u zweimal stetig differenzierbar bis zum Rand $\{x = 0\}$ gelten kann, ist $g''(0) = 0$ notwendig.*

2.3 Die mehrdimensionale Wellengleichung

Ziel 1: Wir suchen explizite Darstellungen von Lösungen $u\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ von

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta u &= 0 && \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d,\\ u(0,\cdot) &= g && \text{auf } \mathbb{R}^d,\\ \partial_t u(0,\cdot) &= h && \text{auf } \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ziel 2: Wir möchten die Eindeutigkeit von Lösungen und den Nachweis der beschränkten Ausbreitungsgeschwindigkeit erhalten.

Zum Erreichen des Ziels 1 betrachten wir folgende Strategie: Gegeben seien u, g, h wie in (2.10) und wir definieren für $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} U^x(t,r) &= ⨍_{\partial B(x,r)} u(t,y)\ \mathrm{d}\mathcal{O}(y),\\ G^x(r) &= ⨍_{\partial B(x,r)} g(y)\ \mathrm{d}\mathcal{O}(y),\\ H^x(r) &= ⨍_{\partial B(x,r)} h(y)\ \mathrm{d}\mathcal{O}(y). \end{aligned}$$

2.2 Proposition. *Seien $d \geq 2$, $m \geq 2$ und $u \in C^m([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ eine Lösung von (2.10). Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Dann erfüllt die Funktion $U^x\colon (0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \partial_t^2 U^x - \partial_r^2 U^x - \frac{d-1}{r}\partial_r U^x &= 0 && \textit{in } (0,\infty)\times(0,\infty),\\ U^x(0,\cdot) &= G^x && \textit{auf } (0,\infty),\\ \partial_t U^x(0,\cdot) &= H^x && \textit{auf } (0,\infty). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Strategie: Man kann nun die Gleichung (2.11) zu einer eindimensionalen Wellengleichung transformieren. Hierbei spielt leider der Wert von $d \geq 2$ eine große Rolle.

Beispiel (d=3)**.** Definiere

$$\begin{aligned} \tilde{U}^x(t,r) &= rU^x(t,r),\\ \tilde{G}^x(t,r) &= rG^x(r),\\ \tilde{H}^x(t,r) &= rH^x(r). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \tilde{U}^x - \partial_r^2 \tilde{U}^x &= 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times (0,\infty), \\ \tilde{U}^x(0,r) &= \tilde{G}^x \qquad \text{auf } (0,\infty), \\ \partial_t \tilde{U}^x(0,r) &= \tilde{H}^x \qquad \text{auf } (0,\infty) \end{aligned}$$

eine eindimensionale Wellengleichung. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \tilde{U}^x - \partial_r^2 \tilde{U}^x &= r\partial_t^2 U^x - 2\partial_r U^x - r\partial_r^2 U^x \\ &= r\left(\partial_t^2 U^x - \partial_r^2 U^x - \frac{2}{r}\partial_r U^x\right). \end{aligned}$$

Duch Anwendung von (2.9) erhalten wir für $0 \le r \le t$

$$\tilde{U}^x(t,r) = \frac{\tilde{G}^x(r+t) + \tilde{G}^x(t-r)}{2} + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{r+t} \tilde{H}^x(y)\, \mathrm{d}y.$$

Für $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \lim_{r \searrow 0} \frac{\tilde{U}(t,r)}{r} \\ &= \left(\tilde{G}^x\right)'(t) + \left(\tilde{H}^x\right)'(t) \end{aligned}$$

und wir erhalten damit die *Kirchhoffsche Lösungsformel in* $\mathbb{R}^3$

$$u(t,x) = ⨍_{\partial B(x,t)} \left(th(y) + g(y) + \langle \nabla g(y), y - x\rangle\right)\ \mathrm{d}\mathcal{O}(y). \tag{2.12}$$

Beispiel (d=2)**.** Die *Poissonsche Lösungsformel im* $\mathbb{R}^2$ lautet

$$u(t,x) = \frac{1}{2} ⨍_{B(x,t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + t\,\langle g(y), y - x\rangle}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\ \mathrm{d}y. \tag{2.13}$$

Zur Berechnung von $u(t,x)$ benötigt man im Falle ungerader Raumdimensionen „nur" die Anfangsdaten g und h auf der Sphäre $\partial B(x,t)$. Im Falle gerader Raumdimensionen hingegen sind die Anfangsdaten auf der ganzen Vollkugel $B(x,t)$ nötig.

Wir wenden uns nun Ziel 2 zu. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$. Für

$T > 0$ setze

$$\begin{aligned} Q_T &= (0,T] \times \Omega \text{ und} \\ \Gamma_T &= \overline{Q_T} - Q_T. \end{aligned}$$

(Γ_T entspricht der Raum-Zeit-Hülle ohne Zeitdeckel und Q_T der Raum-Zeit-Geraden ohne Zeitboden.)

2.3 Satz. *Sei $T > 0$. Es gibt höchstens eine Lösung $u \in C^2(\overline{Q_T})$ von*

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta u &= f && \textit{in } Q_T, \\ u &= g && \textit{auf } \Gamma_T, \\ \partial_t u(0,\cdot) &= h && \textit{auf } \Omega, \end{aligned}$$

wobei $h\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $g\colon \Gamma_T \to \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $v \in C^2(\overline{Q_T})$ eine zweite Lösung. Dann ist $w = u - v \in C^2(\overline{Q_T})$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t^2 w - \Delta w &= 0 && \text{auf } Q_T, \\ w &= 0 && \text{auf } \Gamma_T, \\ \partial_t w &= 0 && \text{auf } \Omega. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Wir definieren für $t > 0$ die „Energie" als das Raumintegral

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \Big((\partial_t w(t,x))^2 + (\nabla w(t,x))^2 \Big) \, \mathrm{d}x.$$

Es folgt für die Ableitung

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_\Omega \left(\partial_t w \cdot \partial_t^2 w + \langle \nabla w, \nabla \partial_t w \rangle \right)(t,x) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \partial_t w \underbrace{(\partial_t^2 w - \Delta w)}_{=0}(t,x) \, \mathrm{d}x \\ &= 0 \end{aligned}$$

für jedes $t > 0$. Es folgt $E(t) = E(0) = 0$ für alle t, da $\partial_t w = \nabla w = 0$ auf $\{0\} \times \Omega$. Also

$$\partial_t w = \nabla w = 0 \qquad \text{in } Q_T$$

und somit gilt $w \equiv 0$ in Q_T.

$\square$

3 Die Wärmeleitungsgleichung

3.1 Motivation

Wir betrachten einen homogenen dünnen Draht mit konstanter Querschnittsfläche S. Mit $\varrho > 0$ und $c > 0$ bezeichnen wir die konstante spezifische Dichte und die Wärmekapazität. Die Temperatur zum Zeitpunkt $t > 0$ an der Position $x \in \mathbb{R}$ wird mit $u(t, x)$ bezeichnet. Die Wärme im Abschnitt V, welcher durch die Eckdaten $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben ist, ist gegeben durch

$$Q(t) = \int_a^b c\,\varrho\,S\,u(t,x)\;\mathrm{d}x$$

und wir erhalten

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = \varrho\,c\,S \int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\;\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

Andererseits ist der Wärmefluß durch das Querschnittselement proportional zu S und umgekehrt proportional zu Δx (das *Fouriersche Gesetz*). Die übertragene Wärme in V (von beiden Seiten betrachtet) ist dann

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} - C\,\frac{\partial u(t,a)}{\partial x}\,S + C\,\frac{\partial u(t,b)}{\partial x}\,S, \tag{3.2}$$

wobei $C > 0$ die Wärmeleitzahl ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} &= CS\left(\frac{\partial u(t,b)}{\partial x} - \frac{\partial u(t,a)}{\partial x}\right) \\ &= CS\int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\;\mathrm{d}x \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = CS\int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\;\mathrm{d}x. \tag{3.3}$$

Nun vergleichen wir (3.1) und (3.3):

$$\varrho\,c\,S\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\;\mathrm{d}x = CS\int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\;\mathrm{d}x,$$

d.h.

$$\int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{C}{\varrho\, c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \right) \, \mathrm{d}x = 0$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann gilt die folgende Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{C}{\varrho\, c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0 \qquad \text{für alle } (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Diese Gleichung ist als die *eindimensionale Wärmeleitungsgleichung* bekannt. In mehreren Dimensionen ersetzen wir $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ durch den Laplace-Operator Δu.

Beispiel.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\, \Delta u(t,x), & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

ist auch als die *Diffusionsgleichung* bekannt. Diese Gleichung modelliert die Ausbreitung eines gelösten Stoffes durch Diffusion, wobei $u_o(x)$ die Konzentration (Dichte) des Stoffes am Anfang im Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet.

3.2 Die Poissonsche Formel

Wir betrachten das homogene Anfangswertproblem (Cauchyproblem)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) &= 0 \qquad && \text{für } (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

3.1 Definition. Die Funktion

$$\Phi\colon (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to (0,\infty), \ \Phi(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

heißt *Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.*

Bemerkung. *(a)* $\Phi \in C^\infty\big((0,\infty) \times \mathbb{R}^d\big)$.

(b) Φ *erfüllt die Wärmeleitungsgleichung (Übung)*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Delta \Phi = 0 \quad \textit{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d.$$

(c) Für $t = 0$ *ist* Φ nicht *definiert.*

(d) $\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,x)\ \mathrm{d}x = 1$ *(Übung).*

3.2 Satz (Poissonsche Formel)**.** *Sei $u_0 \in C(\mathbb{R}^d)$ beschränkt. Wir definieren*

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t, x-y)\, u_0(y)\ \mathrm{d}y = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, u_0(y)\ \mathrm{d}y.$$

Dann gilt

(i) $u \in C^\infty\left((0,\infty)\times\mathbb{R}^d\right)$.

(ii) $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \Delta u(t,x) = 0$ *für alle* $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d$.

(iii) $\lim\limits_{\substack{(t,x)\to(0,z) \\ (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d}} u(t,x) = u_0(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{R}^d$.

Bemerkung. *(a) Es gelte $u_0(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $u_0 \not\equiv 0$. Dann ist*

$$u(t,x) > 0$$

für alle $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d$. Wir sagen, dass die Wärmeleitungsgleichung eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit fordert.

(b) Es gilt $u(t,x) = (\Phi(t,\cdot) * u_0)(x)$, d.h. wir können u als Faltung der Fundamentallösung und u_0 auffassen.

Beweis von 3.2. Sei $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d$. Zunächst berechnen wir die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x)$. Nachdem Mittelwertsatz existiert für jedes $x \in \mathbb{R}^d$, $h \in \mathbb{R}$, $|h| < 1$ ein $\theta \in [0,1]$ derart, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi(t, x+he_i) - \Phi(t,x)}{h} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(t, x+\theta\, he_i) \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}\, e^{-\frac{|x+\theta\, he_i|^2}{ht}} \left(-2\,\frac{x_i+\theta h}{ht}\right).
\end{aligned}$$

Somit ist
$$\left|\frac{\Phi(t,x+he_i)-\Phi(t,x)}{h}\right| \leq C_1 \cdot |x|\, e^{-C_2|x|^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d$$

mit Konstanten $C_1, C_2 > 0$, welche nur von t abhängen.

Nun ist nach dem Satz der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{u(t,x+he_i)-u(t,x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\Phi(t,x-y+he_i)-\Phi(t,x-y)}{h} u_0(y)\ \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(t,x-y+he_i)-\Phi(t,x-y)}{h} u_0(y)\ \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(t,x-y)\, u_0(y)\ \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Somit haben wir

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(t,x-y)\, u_0(y)\ \mathrm{d}y.$$

Analog zeigen wir

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,x-y)\, u_0(y)\ \mathrm{d}y$$

und erhalten somit für die zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_i}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial y_i}(t,x-y)\, u_0(y)\ \mathrm{d}y,$$

sowie

$$u \in C^\infty \Big((0,\infty) \times \mathbb{R}^d \Big).$$

Wir haben durch (ii):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) = \int \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,x-y) - \Delta\Phi(t,x-y) \right)}_{=0 \text{ (Fundamentallösung)}} u_0(y)\ \mathrm{d}y = 0.$$

Nun zu Teil (iii): Sei $z \in \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $\delta > 0$ derart, dass

$$|u_0(y) - u_0(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^d, |y-z| < \delta.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^d$, $|x - z| < \frac{\delta}{2}$ gilt

$$\begin{aligned}
|u(t,x) - u_0(z)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t, x-y)\, u_0(y)\ \mathrm{d}y - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t, x-y)}_{=1,\ \text{vgl. Bem. (d)}}\ u_0(z)\ \mathrm{d}y \right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t, x-y)\, |u_0(y) - u_0(z)|\ \mathrm{d}y \\
&= \underbrace{\int_{B(z,\delta)} \Phi(t, x-y)\, |u_0(y) - u_0(z)|\ \mathrm{d}y}_{=:J_1} + \underbrace{\int_{B(z,\delta)^\complement} \Phi(t, x-y)\, |u_0(y) - u_0(z)|\ \mathrm{d}y}_{=:J_2}.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{B(z,\delta)} \Phi(t, x-y)\ \underbrace{|u_0(y) - u_0(z)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}\ \mathrm{d}y \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} \int_{B(z,\delta)} \Phi(t, x-y)\ \mathrm{d}y \le \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t, x-y)\ \mathrm{d}y}_{=1} = \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_{B(z,\delta)^\complement} \Phi(t, x-y) \quad \underbrace{|u_0(y) - u_0(z)|}_{\le |u_0(y)| + |u_0(z)| \le 2\|u_0\|_\infty} \quad \mathrm{d}y \\
&\le \frac{2\,\|u_0\|_\infty}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{B(z,\delta)^\complement} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\ \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Wir wissen, dass $|x - z| \le \frac{\delta}{2}$ und $|y - z| \ge \delta$ gilt. Mithilfe der Dreiecksungleichung

$$|y - z| \le |y - x| + |x - z| \le |y - x| + \frac{\delta}{2} \le |y - x| + \frac{1}{2}\,|y - z|$$

haben wir also

$$|x - y| \ge \frac{1}{2}\,|y - z|.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
J_2 &\le \frac{2\,\|u_0\|_\infty}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\,\frac{1}{t^{\frac{d}{2}}}\int_{B(z,\delta)^{\complement}} e^{-\frac{|y-z|^2}{16t}}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{2\,\|u_0\|_\infty}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\,\frac{1}{t^{\frac{d}{2}}}\int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}}\,r^{d-1}\,\omega_d\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{2\,\|u_0\|_\infty\,\omega_d}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\,\underbrace{\frac{1}{t^{\frac{d}{2}}}\int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}}\,r^{d-1}\,\mathrm{d}r}_{\xrightarrow{t\to 0} 0 \text{ durch Substitution } s=\frac{r}{4t}}
\end{aligned}$$

und nun wählen wir $t_0 > 0$ derart, dass

$$\frac{2\,\|u_0\|_\infty\,\omega_d}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\,\frac{1}{t^{\frac{d}{2}}}\int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}}\,r^{d-1}\,\mathrm{d}r < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $t \in (0, t_0)$ gilt. Somit ist (iii), gezeigt, denn es ist

$$(u(t,x) - u_0(z)) < \varepsilon \quad \text{für alle } (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d, |x-z| < \frac{\delta}{2}, t \in (0,t_0).$$

□

Nun betrachten wir das inhomogene Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) &= f(t,x) && \text{für } (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \\
u(0,x) &= u_0(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}^d.
\end{aligned}$$

Zunächst nehmen wir $u_0 \equiv 0$ an.

3.3 Satz. *Sei $f \in C_c^{(1,2)}\left([0,\infty)\times\mathbb{R}^d\right)$ und definiere*

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t-s, x-y)\, f(s,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}\, f(s,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

für $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d$. Dann gilt

(i) $u \in C^{(1,2)}\left((0,\infty)\times\mathbb{R}^d\right)$.

(ii) $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x)$ *für* $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d$.

(iii) $\lim\limits_{\substack{(t,x)\to(0,z)\\(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d}} u(t,x) = 0$ *für* $z \in \mathbb{R}^d$.

Mit der Poissonschen Formel 3.2 und obigem Satz 3.3 folgt

3.4 Folgerung. *Seien* $f \in C_c^{(1,2)}\left((0,\infty)\times\mathbb{R}^d\right)$ *und* $u_0 \in C\left(\mathbb{R}^d\right)$ *beschränkt. Wir definieren*

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,x-y)u_0(y)\ \mathrm{d}y + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t-s,x-y)\,f(s,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s$$

für $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d$. *Dann gilt*

(i) $u \in C^{(1,2)}\left((0,\infty)\times\mathbb{R}^d\right)$.

(ii) $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x)$ *für* $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d$.

(iii) $\lim\limits_{\substack{(t,x)\to(0,z)\\(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d}} u(t,x) = u_0(z)$ *für* $z \in \mathbb{R}^d$.

Beweis von 3.3. Durch Substitution erhalten wir

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y)\,f(t-s,x-y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s.$$

Analog wie im Beweis von Satz 3.2 zeigen wir, dass

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t-s,x-y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,y)\,f(0,x-y)\ \mathrm{d}y \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y)\,\frac{\partial}{\partial t} f(t-s,x-y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Hierbei benutzen wir die Voraussetzung, dass f einen kompakten Träger hat. Wir sehen auch, dass $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in C\left((0,\infty)\times\mathbb{R}^d\right)$. Somit gilt für $0<\varepsilon<t$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) f(t-s,x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,y)\, f(0,x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y) \left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right) f(t-s,x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y) \left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right) f(t-s,x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,y)\, f(0,x-y)\,\mathrm{d}y \\
&=: I_\varepsilon + J_\varepsilon + K.
\end{aligned}$$

Nun schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
|J_\varepsilon| &\le \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y) \underbrace{\left(\left|\frac{\partial}{\partial s} f(t-s,x-y)\right| + |\Delta_y f(t-s,x-y)|\right)}_{\le \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_\infty + d\cdot\max_{1\le i\le d}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right\|_\infty =: C_f} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&\le C_f \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = C_f\,\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Mit partieller Integration in I_ε schätzen wir nun ab:

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^d} \left[\Phi(s,y)\,\left[-f(t-s,x-y)\right]_\varepsilon^t - \int_\varepsilon^t \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s,y)\,\left(-f(t-s,x-y)\right)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^d} \left(-\Delta_y \Phi(s,y)\right)\, f(t-s,x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

weil

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y)\,\left(-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right) f(t-s,x-y)\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s,y)\,\left(-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right) f(t-s,x-y)\,\mathrm{d}y_1\right]\,\mathrm{d}y_2 \cdots \mathrm{d}y_d$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}$$
$$\underbrace{\left[\Phi(s,y)\left(-\frac{\partial}{\partial y_1} f(t-s,x-y)\right)\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0-0=0}$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}(s,y)\,\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} f(t-s,x-y)\right)\,\mathrm{d}y_1$$
$$\mathrm{d}y_2 \cdots \mathrm{d}y_d$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}$$
$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}(s,y)\,f(t-s,x-y)\right]_{-\infty}^{\infty}$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2}(s,y)\,f(t-s,x-y)\,\mathrm{d}y_1$$
$$\mathrm{d}y_2 \cdots \mathrm{d}y_d$$

und somit ist

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}(s,y) - \Delta_y \Phi(s,y)\right)}_{=0} f(t-s,x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\varepsilon,y)\,f(t-\varepsilon,x-y)\,\mathrm{d}y \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,y)\,f(0,x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\varepsilon,y)\,f(t-\varepsilon,x-y)\,\mathrm{d}y - K. \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} (I_\varepsilon + J_\varepsilon + K) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\varepsilon, y)\, f(t-\varepsilon, x-y)\ \mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Satz 3.2 (iii)}}{=} f(t,y).
\end{aligned}$$

Für Aussage (iii) betrachten wir

$$|u(t,x)| \le \|f\|_\infty \int_0^t \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t-s, x-y)\ \mathrm{d}y}_{=1}\ \mathrm{d}s = t\,\|f\|_\infty \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

□

3.3 Eigenschaften der Lösung

Zunächst betrachten wir die Eindeutigkeit der Lösung. Wie bei der Wellengleichung definieren wir den Zeit-Raum-Zylinder (ohne Zeit-Boden)

$$Q_T = (0,T] \times \Omega,$$

wobei $T > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$ ist. Die Zeit-Raum-Hülle (ohne Zeit-Deckel) wird durch

$$\Gamma_T = \overline{Q_T} \setminus Q_T$$

definiert.

3.5 Satz. *Es gibt höchstens eine Lösung $u \in C^2(\overline{Q_T})$ des Problems*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f \qquad \text{in } Q_T, \\
u &= u_0 \qquad \text{auf } \Gamma_T.
\end{aligned}$$

Beweis. Seien u, v zwei Lösungen. Dann löst

$$w := u - v$$

das homogene Problem

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w &= 0 \qquad \text{in } Q_T, \\
w &= 0 \qquad \text{auf } \Gamma_T.
\end{aligned}
$$

Nun definieren wir die Energie

$$E(t) = \int_\Omega w(t,x)^2 \, \mathrm{d}x, \ t \in [0,T].$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
E'(t) &= \int_\Omega 2w(t,x) \frac{\partial w}{\partial t}(t,x) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega 2w(t,x)\, \Delta w(t,x) \, \mathrm{d}x \\
&\underset{\text{Formel}}{\overset{\text{Greensche}}{=}} -2 \int_\Omega |\nabla w(t,x)|^2 \, \mathrm{d}x \le 0
\end{aligned}
$$

und damit gilt

$$E(t) \le E(0) = 0,$$

d.h.

$$u - v = w = 0 \quad \text{auf } Q_T.$$

□

3.6 Satz. *Seien u_1, $u_2 \in C^2\left(\overline{Q_T}\right)$ beide Lösungen von*

$$
\begin{aligned}
\partial_t u - \Delta u = 0 &\quad \textit{in } Q_T, \\
u = g &\quad \textit{auf } [0,T] \times \partial\Omega
\end{aligned}
$$

und es gelte $u_1(T,\cdot) = u_2(T,\cdot)$. Dann folgt

$$u_1 \equiv u_2 \quad \textit{in } Q_T.$$

Bemerkung. *Man nennt dieses Phänomen auch „rückwärtige Eindeutigkeit". D.h., dass zwei unterschiedliche, anfängliche Wärmeverteilungen am Zylinderand nicht die selbe Wärmeverteilung im gesamten Zylinder erzeugen können.*

Beweis. Wir setzen $w = u_1 - u_2$ und für $0 \le t \le T$

$$A(t) = \int_\Omega (w(t,x))^2 \, \mathrm{d}x.$$

Dann gilt $A(T)=0$ und es ist $A(\cdot)=0$ zu zeigen.

$$A'(t)=\int_\Omega 2\,w\,\underbrace{\partial_t w}_{=\Delta}\ \mathrm{d}x=-2\int_\Omega (\nabla w)^2\ \mathrm{d}x,$$

sowie

$$A''(t)=-4\int_\Omega (\nabla w\,\nabla\partial_t w)\ \mathrm{d}x \overset{\partial_t w\restriction_{\Gamma_T}=0}{=} 4\int_\Omega (\nabla w)\ \partial_t w\ \mathrm{d}x=4\int_\Omega (\Delta w)^2\ \mathrm{d}x.$$

Andererseits gilt

$$\int_\Omega (\nabla w)^2\ \mathrm{d}x=-\int_\Omega w\,\Delta w\ \mathrm{d}x \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(\int_\Omega w^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega (\Delta w)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.5}$$

Ergo

$$\left(A'(t)\right)^2=4\left(\int_\Omega (\nabla w)^2\ \mathrm{d}x\right)^2 \overset{(3.5)}{\leq} \left(\int_\Omega w^2\right)\left(4\int_\Omega (\Delta w)^2\ \mathrm{d}x\right)=A(t)\,A''(t).$$

Wegen $A(T)=0$ folgt

$$A(t)=0$$

für $0\leq t\leq T$.

$\square$

3.7 Satz (Maximumprinzip)**.** *Sei $u\in C\left(\overline{Q_T}\right)\cap C^{1,2}(Q_T)$. Es gelte*

$$\partial_t u-\Delta u=0\quad \textit{in } Q_T.$$

Dann folgt

$$\max_{\overline{Q_T}} u=\max_{\Gamma_T} u. \qquad \left[Q_T=(0,T]\times\Omega, \Gamma_T=\overline{Q_T}\setminus Q_T\right]$$

Beweis. Wir nehmen zunächst

$$\partial_t u-\Delta u\quad <\quad 0\quad \text{in } Q_T \tag{3.6}$$

an. Sei $\varepsilon\in(0,T)$ und $Q_{T-\varepsilon}=(0,T-\varepsilon]\times\Omega$. Da $u\in C\left(\overline{Q_{T-\varepsilon}}\right)$, existiert $(t_0,x_0)\in\overline{Q_{T-\varepsilon}}$ mit

$$u(t_0,x_0)=\max_{\overline{Q_{T-\varepsilon}}} u.$$

Wir unterscheiden nun die mögliche Lage von (t_0,x_0):

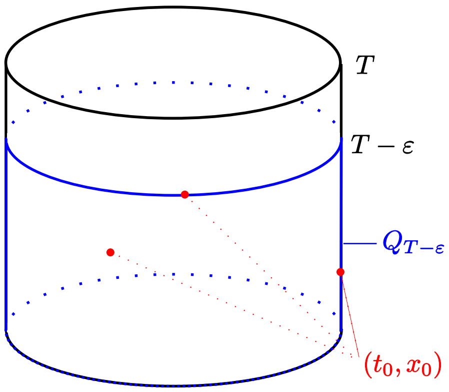


Abbildung 3.1: Mögliche Lage von (t_0, x_0) in $Q_{T-\varepsilon}$(blau).

Falls $(t_0, x_0) \in Q_{T-\varepsilon}$, so müsste

$$\partial_t u(t_0, x_0) = 0, \ \Delta u(t_0, x_0) \leq 0$$

gelten, was einen Widerspruch zu (3.6) darstellt. D.h. der Punkt (t_0, x_0) liegt nicht im Inneren von $Q_{T-\varepsilon}$.

Falls $t_0 = T - \varepsilon$ (d.h. (t_0, x_0) liege im „Zeitdeckel" von $Q_{T-\varepsilon}$), so müsste

$$\partial_t u(t_0, x_0) \geq 0, \ \Delta u(t_0, x_0) \leq 0$$

gelten, was erneut einen Widerspruch zu (3.6) darstellt.

Also ist $(t_0, x_0) \in \Gamma_{T-\varepsilon}$, d.h.

$$\max_{\overline{Q_{T-\varepsilon}}} u = \max_{\Gamma_{T-\varepsilon}} u \leq \max_{\Gamma_T} u.$$

Damit erhalten wir

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma_T} u,$$

denn jede mögliche Maximumstelle $(t_1, x_1) \in \overline{Q_T}$ liegt entweder in $\overline{Q_{T-\varepsilon}}$ für $\varepsilon > 0$ geeignet oder in Γ_T oder es gilt $t_1 = T$. In allen Fällen folgt die Behauptung.

Es gelte nun wie im Satz angenommen „nur"

$$\partial_t u - \Delta u \leq 0 \quad \text{in } Q_T.$$

Setzen für $\delta > 0$

$$v(t, x) = u(t, x) - \delta t.$$

Dann folgt, dass die Wärmeleitungsgleichung für v

$$\partial_t v - \Delta v = \partial_t u - \Delta u - \delta < 0 \quad \text{in } Q_T$$

erfüllt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\max_{\overline{Q_T}} u &= \max_{(t,x)\in Q_T} (v(t,x) + \delta t) \\
&\leq \max_{\overline{Q_T}} v + \delta T = \max_{\Gamma_T} v + \delta T \\
&\leq \max_{\Gamma_T} u + \delta T.
\end{aligned}$$

Mit dem Grenzübergang $\delta \to 0$ folgt die Behauptung.

□

Wir können nun Satz 3.5 etwas verbessern:

3.8 Folgerung. *Es gibt höchstens eine Lösung $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C\left(\overline{Q_T}\right)$ des Problems*

$$\begin{aligned}
\partial_t - \Delta u &= f \quad \textit{in } Q_T, \\
u &= g \quad \textit{auf } \Gamma_T,
\end{aligned}$$

wobei $g \in C(\Gamma_T)$.

Ohne Beweis und ohne Verwendung notieren wir

3.9 Satz (Starkes Maximumprinzip)**.** *Sei $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C\left(\overline{Q_T}\right)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in Q_T und es gebe $(t_0, x_0) \in Q_T$ mit*

$$u(t_0, x_0) = \max_{\overline{Q_T}} u.$$

Dann ist u konstant in $\overline{Q_{t_0}} = [0, t_0] \times \overline{\Omega}$.

3.10 Satz. *Sei $T > 0$ und sei $u \in C^{1,2}\left((0,T] \times \mathbb{R}^d\right) \cap C\left([0,T] \times \mathbb{R}^d\right)$ eine Lösung von*

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \Delta u &= 0 \quad \textit{in } (0,T) \times \mathbb{R}^d, \\
u(0,\cdot) &= g \quad \textit{auf } \mathbb{R}^d,
\end{aligned}$$

wobei $g \in C\left(\mathbb{R}^d\right)$. Es gebe Konstanten a, $K > 0$ derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $0 \leq t \leq T$ gilt:

$$u(t,x) \leq K\, e^{a|x|^2}.$$

Dann gilt

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} u = \sup_{\mathbb{R}^d} g.$$

Bemerkung. *Die Voraussetzungen sind nicht für alle Funktionen u erfüllt, betrachte so beispielsweise $u(t,x) = e^{|x|^3}$.*

Dieser Satz liefert sofort die folgende Eindeutigkeit.

3.11 Folgerung. *Seien $g \in C\left(\mathbb{R}^d\right)$, $f \in C\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$. Dann existiert höchstens eine Funktion $u \in C^{1,2}\left((0,T]\times\mathbb{R}^d\right) \cap C\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$, welche sowohl*

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \quad \textit{in } (0,T)\times\mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) &= g \quad \textit{auf } \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

als auch

$$|u(t,x)| \leq K\, e^{a|x|^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$, $0 \leq t \leq T$ und geeigneten Konstanten a, $K > 0$ erfüllt.

Beweis von 3.10. Wir nehmen an, dass

$$T < \frac{1}{4a} \tag{3.7}$$

gelte. Wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, dass $4a(T+\varepsilon) < 1$ gilt. Sei $y \in \mathbb{R}^d$, $\delta > 0$ beliebig. Wir definieren eine Hilfsfunktion v durch

$$v(t,x) = u(t,x) - \delta\left(\frac{1}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{d}{2}}}\, e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}}\right),$$

d.h. v entspricht der sozusagen Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung, welche sowohl in der Zeit als auch um x bzw. y verschoben. Durch Nachrechnen sieht man, dass

$$\partial_t v - \Delta v = 0 \quad (0,T)\times\mathbb{R}^d.$$

Sei $r > 0$, $\Omega = B(y,r)$ und $Q_T = (0,T]\times B(y,r)$. Wegen Satz 3.7 gilt

$$\max_{\overline{Q_T}} v = \max_{\Gamma_T} v.$$

Für $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$v(0,x) \leq u(0,x) = g(x).$$

Für $0 \leq t \leq T$ und $|y - x| \leq r$ gilt

$$\begin{aligned} v(t,x) &= u(t,x) - \delta \left(\frac{1}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{d}{2}}} \, e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \right) \\ &\overset{\text{Voraus.}}{\leq} K\, e^{a|x|^2} - \delta \left(\frac{1}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{d}{2}}} \, e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \right) \\ &\leq K\, e^{a(|y|-r)^2} - \delta \left(\frac{1}{(T+\varepsilon)^{\frac{d}{2}}} \, e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}} \right) \quad [\text{mit } |x| \leq |x-y| + |y|]\,. \end{aligned}$$

Setzen wir nun $\gamma = \frac{1}{4(T+\varepsilon)} - a$, so folgt $\gamma > 0$ und

$$v(t,x) \leq K\, e^{a(|y|+r)^2 - \delta(4(a+\gamma))^{\frac{d}{2}}} e^{(a+\gamma)r^2}.$$

Für y fest und r hinreichend groß (also x weit genug weg von y) folgt für $r = |x-y|$

$$v(t,x) \leq \sup g.$$

Also gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$, $0 \leq t \leq T$, unter der Annahme $T < \frac{1}{4a}$

$$v(t,x) \leq \sup g.$$

Mit dem Grenzübergang $\delta \to 0$ erhalten wir

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} u \leq \sup g.$$

Durch Hintereinandersausführung auf den Zeitintervallen $(0, \frac{1}{8aT}], (\frac{1}{8aT}, \frac{2}{8aT}], \ldots, (\frac{k}{8aT}, \frac{k+1}{8aT}], \ldots$ mit $k \in \mathbb{N}$ erhalten wir schließlich die gewünschte Aussage.

$\square$

3.12 Satz. *Sei $u \in C^{1,2}(Q_T)$ eine Lösung von*

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \textit{in } Q_T.$$

Dann gilt

$$u \in C^\infty(Q_T)\,.$$

Bemerkung. *Man merkt sich diesen Satz am Besten so: „Lösungen der Wärmeleitungsgleichungen sind C^∞!"*

Beweisskizze. Wir betrachten die folgenden Zylinder:

$$Z_\varrho(t,x) = \left\{(s,y) \mid |x-y| < \varrho,\ t-\varrho^2 \le s \le t\right\}$$

Sei $(t_0, x_0) \in Q_T$. Wähle $r > 0$ klein genug, sodass

$$Z = Z_r(t_0, x_0) \subset Q_T.$$

Definiere nun

$$\begin{aligned} Z' &:= Z_{\frac{3}{4}r}(t_0, x_0), \\ Z'' &:= Z_{\frac{r}{2}}(t_0, x_0). \end{aligned}$$

Wir wählen nun eine Funktion $\tau \in C^\infty(Q_T)$ mit

$$\begin{aligned} 0 \le \tau \le 1&, \\ \tau \equiv 1 &\quad \text{auf } Z', \\ \tau \equiv 0 &\quad \text{in einer Umgebung des Randes} \\ &\quad \text{von } Z \text{ und außerhalb.} \end{aligned}$$

Aus technischen Gründen nehmen wir zusätzlich $u \in C^\infty(Q_T)$ an (auch wenn wir dies eigentlich beweisen wollen), denn später wird u durch $u * \varrho_\varepsilon$ für einen Faltungskern ϱ ersetzt. Wir defnieren

$$v(t,x) = \tau(t,x)\, u(t,x) \quad x \in \mathbb{R}^d,\ 0 \le t \le t_0.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_t v &= \tau \partial_t u + \partial_t \tau \cdot u, \\ \Delta v &= \tau \Delta u + 2\langle \nabla\tau, \nabla u\rangle + u \cdot \Delta\tau. \end{aligned}$$

Also gilt $v = 0$ auf $\{0\} \times \mathbb{R}^d$ und

$$\partial_t v - \Delta v = \underbrace{\partial_t \tau\, u - 2\langle \nabla\tau, \nabla u\rangle - u\Delta\tau}_{=:f} \quad \underbrace{(-\tau\delta_t u - \tau\Delta u)}_{=0 \text{ wg. } \partial_t u - \Delta u = 0}.$$

v löst also $\partial_t v - \Delta v = f$ in $(0, t_0) \times \mathbb{R}^d$ mit Anfangswertbedingung $v = 0$ auf $\{0\} \times \mathbb{R}^d$.

Somit folgt

$$v(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi\left(t-s, x-y\right)\, f(s,y)\; \mathrm{d}y\; \mathrm{d}s.$$

Wir beachten, dass $\tau = 0$ außerhalb von Z und, dass τ konstant in Z'' ist. Daher erhalten wir $f = 0$ in Z''. Für $(t,x) \in Z''$ ist also $v(t,x) = u(t,x)$ gegeben durch

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\left\{y\in\mathbb{R}^d \;\mid\; (s,y)\in Z\right\}} \Phi\left(t-s, x-y\right)\, f(s,y)\; \mathrm{d}y\; \mathrm{d}s, \tag{3.8}$$

wobei $f = 0$ in der Nähe der Singularität von Φ gilt. Eine genaue Untersuchung des Integrals ergibt, dass die Darstellung (3.8) die Regularität von u verbessert.

4 Schwache Ableitungen und Sobolev-Räume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen.

4.1 Definition. Seien $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und α ein Multiindex. Eine Funktion $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt *α-te schwache Ableitung von u*, falls für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega u\,\partial^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g\,\varphi.$$

Bemerkung. *Im Fall $d = 1$ und $\Omega = (a,b)$ bedeutet dieses, dass*

$$\int_a^b u\,\varphi' = -\int_a^b g\,\varphi \quad \forall\,\varphi \in C_c^\infty\,(a,b)\,. \tag{4.1}$$

Wir wussten schon immer, dass für $u \in C^1\,(a,b)$ und $\varphi \in C_c^\infty\,(a,b)$ mit partieller Integration gilt:

$$\int_a^b u\,\varphi' = [u\,\varphi]_a^b - \int_a^b u'\cdot\varphi = 0 - \int_a^b u'\cdot\varphi,$$

d.h. in diesem Fall ist $g = u'$ und die erste (schwache) Ableitung.

Beispiel. Sei $u\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, $u(x) = |x|$ die Betragsfunktion. Wir behaupten, dass $g\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ \pi, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

eine (die) schwache Ableitung von u ist. (Schwache Ableitungen sind fast sicher gleich, d.h. die Stelle $x = 0$ spielt bei der Definition von g keine Rolle, wie wir im folgenden Beweis sehen werden.)

Beweis. Sei $\varphi \in C_c^\infty(-1,1)$. Zu zeigen ist

$$\int_1^1 u\varphi' = -\int_{-1}^1 g\varphi.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 u\varphi' &= \int_{-1}^0 (-x)\,\varphi'(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^1 x\varphi'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [-x\varphi(x)]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 1\cdot\varphi(x)\ \mathrm{d}x + [x\varphi(x)]_0^1 - \int_0^1 1\cdot\varphi(x)\ \mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_{-1}^0 \varphi + 0 - \int_0^1 \varphi.
\end{aligned}$$

Die andere Seite liefert

$$-\int_{-1}^1 g\varphi = +\int_{-1}^0 \varphi(x)\ \mathrm{d}x - \int_0^1 \varphi(x)\ \mathrm{d}x.$$

□

Beispiel. Sei $u\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ und

$$u(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Wir stellen uns die Frage, ob $g \equiv 0$ eine (die) schwache Ableitung ist. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} \int_{-1}^1 u\varphi' = \int_{-1}^0 \varphi'(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^1 \varphi'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= -\varphi(0) + \varphi(-1) + \varphi(1) - \varphi(0) \\
&= -2\varphi(0).
\end{aligned}$$

Es müsste gelten:

$$\varphi(0) = 0\ \forall\ \varphi \in C_c^\infty(-1,1).$$

Das ist jedoch nicht möglich, d.h. $g \equiv 0$ ist *nicht* die schwache Ableitung. Wir können sogar zeigen, dass u gar keine schwache Ableitung besitzt: Dazu bemerken wir, dass wir u auch als $u(x) = \operatorname{sgn}(x)$ schreiben können. Angenommen $u' \in L_{loc}^1$ sei die schwache

Ableitung von u. Dann würde für jedes $\varphi \in C_c^\infty((-1,1))$

$$\int_{-1}^{1} u\varphi' = -\int_{-1}^{1} u'\varphi.$$

gelten. Daraus erhalten wir jedoch

$$-\int_{-1}^{0} \varphi'(x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \varphi'(x)\ \mathrm{d}x \quad = \quad -2\varphi(0) = -\int_{-1}^{1} u'(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x$$

und somit

$$\varphi(0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u'(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x.$$

Wir wählen nun die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varphi_n \in C_c^\infty((-1,1))$, $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $\varphi_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann würde folgen:

$$1 = \varphi_n(0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u'(x)\varphi_n(x)\ \mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

4.2 Proposition. *Schwache Ableitungen sind fast sicher eindeutig.*

Beweis. Seien g, h schwache Ableitungen einer Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann gilt für jedes $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega h(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x$$

und somit

$$\int_\Omega (g(x) - h(x))\,\varphi(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ und somit $g = h$ f.ü.

$\square$

4.3 Definition. Seien $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ falls } |\alpha| \leq m\}.$$

Bemerkung. *(1) Der Raum $W^{m,p}(\Omega)$ enthält alle $L^p(\Omega)$-Funktionen, welche schwache Ableitungen bis zur Ordnung m in $L^p(\Omega)$ besitzen.*

(2) Beispiel: Wir betrachten wieder die Betragsfunktion $u\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, $u(x) = |x|$. Dann gilt $u \in W^{1,1}((-1,1))$, aber auch $W^{1,\infty}((-1,1))$.

(3) Es gibt Funktionen $u \in W^{m,p}(\Omega)$, welche auf einer dichten Teilmenge $K \subset \Omega$ mit

$\overline{K} = \Omega$ beliebig groß werden.

Beispiel hierzu: Seien $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{Q}^3 \cap \Omega$ und $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von K. Wir definieren $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} |x - z_j|^{-1} .$$

Dann gilt $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Im Fall $d = 1$ tritt dieses Phänomen nicht auf.

(4) Falls $u \in W^{m,p}(\Omega)$ und $v = u$ fast überall, dann gilt $v \in W^{m,p}(\Omega)$. Dies folgt sofort aus der Definition von $W^{m,p}(\Omega)$!

(5) Es ist $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Ohne Beweis und spätere Verwendung notieren wir folgenden

4.4 Satz. *Seien $1 \leq p \leq \infty$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $i \in \{1, \dots, d\}$*

$$\partial_i u \in C(\Omega)$$

gilt, wobei u die schwache Ableitung bezeichnet. Dann exisitiert eine Funktion $\tilde{u} \in C^1(\Omega)$ mit

$$\tilde{u} = u \quad \text{fast überall.}$$

4.5 Satz (Rechnen mit schwachen Ableitungen)**.** *Seien $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $|\alpha| \leq m$ und $u, v \in W^{m,p}(\Omega)$.*

(i) Es gilt $\partial^\alpha u \in W^{m-|\alpha|,p}(\Omega)$ und $\partial^\beta(\partial^\alpha u) = \partial^\alpha\left(\partial^\beta u\right) = \partial^{\alpha+\beta} u$, falls $|\alpha| + |\beta| \leq m$.

(ii) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda u + \mu v \in W^{m,p}(\Omega)$ mit $\partial^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda \partial^\alpha u + \mu \partial^\alpha v$.

(iii) Falls $\Omega' \subset \Omega$ offen, so gilt $u\restriction_{\Omega'} \in W^{m,p}(\Omega')$.

(iv) Für $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt $\eta u \in W^{m,p}(\Omega)$ und

$$\partial^\alpha(\eta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(\partial^\beta \eta\right) \left(\partial^{\alpha-\beta} u\right),$$

wobei $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

Beweis. Zu (i): Wir zeigen, dass $\partial^\beta(\partial^\alpha) = \partial^{\alpha+\beta}$ im schwachen Sinne gilt. Sei also $\partial^\alpha u$ die α-te schwache Ableitung von u und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ eine Testfunktion. Dann gilt $\partial^\beta\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ und somit

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\beta \varphi &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u\partial^\alpha\left(\partial^\beta\varphi\right) = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u\partial^{\alpha+\beta}\varphi \\ &= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha+\beta|}\int_\Omega \partial^{\alpha+\beta}u \cdot \varphi \quad \text{(nach Def. von } \partial^{\alpha+\beta}u) \\ &= (-1)^{|\beta|}\int_\Omega \partial^{\alpha+\beta}u \cdot \varphi.\end{aligned}$$

(ii) und (iii) sind trivial. (iv) beweist man mittels Induktion nach $|\alpha|$.

□

Wir versehen nun $W^{m,p}(\Omega)$ mit einer Norm und beweisen die Vollständigkeit von $W^{m,p}(\Omega)$ bezüglich dieser Norm. Wir werden also sehen, dass $W^{m,p}(\Omega)$ ein Banachraum ist.

4.6 Definition. Für $1 \le p \le \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $u \in W^{m,p}(\Omega)$ definieren wir die *Sobolev-Norm* durch

$$\|u\|_{m,p} := \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \begin{cases}\left(\sum_{|\alpha|\le m}\|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{für } 1 \le p < \infty, \\ \sum_{|\alpha|\le m}\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{für } p = \infty.\end{cases}$$

Den auf diese Weise normierten Vektorraum $W^{m,p}(\Omega)$ nennen wir *Sobolev-Raum.*

4.7 Satz. *Für alle $1 \le p \le \infty$, $m \in \mathbb{N}$ ist $\left(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}\right)$ ein Banachraum.*

Beweis. Sei (u_n) eine Cauchyfolge in $W^{m,p}(\Omega)$. Insbesondere ist damit $(\partial^\alpha u_n)_n$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$ für $|\alpha| \le m$. Da $L^p(\Omega)$ vollständig ist, existiert zu jedem α ein Grenzelement $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ mit

$$\|g_\alpha - \partial^\alpha u_n\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Wir definieren $u = g_{(0,\dots,0)}$, d.h.

$$\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Wir zeigen nun $u \in W^{m,p}(\Omega)$ mit $\partial^\alpha u = g_\alpha$. Seien α ein Multiindex mit $|\alpha|$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ eine beliebige Testfunktion. Dann gilt wegen $\|u_n\psi - u\psi\|_p = \|(u_n - u)\psi\|_p \le$

$\|\psi\|_\infty \|u_n - u\|$ für $\psi \in L^\infty$

$$\begin{aligned} \int_\Omega u\partial^\alpha\varphi &\overset{\partial^\alpha\varphi\in L^\infty}{=} \lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n\partial^\alpha\varphi \overset{\text{Def. }\partial^\alpha u_n}{=} (-1)^{|\alpha|}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \partial^\alpha u \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g_\alpha\varphi \end{aligned}$$

und somit

$$\partial^\alpha u = g$$

und wir erhalten

$$\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u,$$

also $\|u_n - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \to 0$.

□

4.8 Satz. *$W^{m,p}(\Omega)$ ist reflexiv für $1 < p < \infty$ und seperabel für $1 \le p < \infty$.*

Beweis. Wir betrachten den Banachraum

$$X = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)^d \times L^p(\Omega)^{(d^2)} \times \cdots \times L^p(\Omega)^{(d^m)}$$

und die Ableitung $T\colon W^{m,p}(\Omega) \to X$,

$$u \mapsto T(u) = \left(u, \nabla u, D^2u, \ldots, D^m u\right).$$

Aufgrund der Definition der Sobolovnorm auf $W^{m,p}(\Omega)$ ist T eine Isometrie. Weil $W^{m,p}(\Omega)$ vollständig ist, ist $T(W^{m,p}) \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Als solcher erbt $W^{m,p}(\Omega)$ die Reflexivität und Separabilität von X. Vergleiche hierzu auch das Skript zur Funktionalanalysis.

□

Wir wollen nun den wichtigen Satz von Meyers-Serrin beweisen, der besagt, dass $W^{m,p}(\Omega)$-Funktionen Grenzelemente von Folgen in $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ sind.

4.9 Proposition. *Seien $1 \le p < \infty$ und für $\varepsilon > 0$*

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\},$$

$u_\varepsilon\colon \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$, $u_\varepsilon = \varrho_\varepsilon * u$, wobei wie üblich (ϱ_ε) eine Dirac-Folge ist. Dann folgt für jede offene Menge $\Omega_0 \Subset \Omega$

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W^{m,p}(\Omega_0)} \to 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Bemerkung. *Hier schreiben wir u anstelle von $u\restriction_{\Omega_0}$. Weiterhin könnte passieren, dass ε so groß ist, dass $\Omega_\varepsilon \subsetneq \Omega_0$ gilt, jedoch ist dies für den Grenzübergang egal, da wir für ε klein genug (d.h. $\varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$) immer $\Omega_\varepsilon \supset \Omega_0$ erhalten.*

Beweis. Wie in der Funktionalanalsis (Kapitel 2.4) bereits gezeigt, ist zunächst u_ε glatt, d.h. $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Wir zeigen, dass für jeden Multiindex α mit $|\alpha| \le m$

$$\partial^\alpha u_\varepsilon = \varrho_\varepsilon * \partial^\alpha u \quad \text{in } \Omega_\varepsilon \tag{4.2}$$

gilt, wobei $\partial^\alpha u$ die schwache Ableitung von u ist.

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha u_\varepsilon(x) \quad &= \quad \partial^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \varrho_\varepsilon(x-y)u(y)\ \mathrm{d}y = \partial^\alpha \int_\Omega \varrho_\varepsilon(x-y)u(y)\ \mathrm{d}y \\
&= \quad \int_\Omega \partial_x^\alpha \varrho_\varepsilon(x-y)u(y)\ \mathrm{d}y = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \partial_y^\alpha \varrho_\varepsilon(x-y)u(y)\ \mathrm{d}y \\
&\overset{\substack{\text{Def. schw.} \\ \text{Ableitung}}}{=} \quad (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \varrho_\varepsilon(x-y)\, \partial^\alpha u(y)\ \mathrm{d}y \\
&= \quad \varrho_\varepsilon * \partial^\alpha u.
\end{aligned}$$

Es gilt also (4.2). Sei nun $\Omega_0 \Subset \Omega$. Wir erhalten

$$\partial^\alpha u_\varepsilon = \varrho_\varepsilon * \partial^\alpha u \to \partial^\alpha u \quad \text{in } L^p(\Omega_0)$$

für $|\alpha| \le m$. Also gilt

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W^{m,p}(\Omega_0)} \to 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

□

Nun befinden wir uns in folgender allgemeinen Situation: Wir haben eine Folge (u_n) in einem (Funktionen-) Banachraum X mit

$$\|u_n - u\|_{X(\Omega_0)} \to 0$$

für alle $\Omega_0 \Subset \Omega$. Wir fragen uns nun, ob$\|u_n - u\|_{X(\Omega)} \to 0$ gilt. Dieses Ergebnis ist i.A. falsch, falls die Norm Werte der Ableitung(en) berücksichtigt.

Die Konvergenz auf ganz $W^{m,p}(\Omega)$ liefert uns der folgende

4.10 Satz (Meyers-Serrin)**.** *Seien $1 \le p < \infty$, $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Dann existiert eine Folge (u_n) in $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ mit*

$$\|u_n - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \to 0 \quad \textit{für } n \to \infty.$$

Bemerkung. *(1) Im Allgemeinen ist diese Folge* nicht *in* $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

(2) Aufgrund dieses Satzes lassen sich viele Aussagen über $W^{m,p}(\Omega)$*-Funktionen beweisen, indem man sie zunächst für Funktionen in* $C^\infty(\Omega)$ *beweist und dann zur Grenze übergeht.*

4.11 Folgerung. *Sei* $H^{m,p}(\Omega)$ *definiert als der Abschluß von* $C^\infty(\Omega)$ *bezüglich der* $W^{m,p}(\Omega)$*-Norm. Dann gilt*

$$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega).$$

Beweis. Satz 4.10 besagt $W^{m,p}(\Omega) \subset H^{m,p}(\Omega)$. Die andere Inklusion gilt nach Definition von $W^{m,p}(\Omega)$. Sei $u \in H^{m,p}(\Omega)$ und sei (u_n) eine Folge in $C^\infty(\Omega)$ mit

$$\|u_n - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \to 0.$$

Zu zeigen ist, dass u schwache Ableitungen in $L^p(\Omega)$ besitzt.

Da (u_n) kovergiert, exisitiert für $|\alpha| \le m$ ein $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ mit $\|\partial^\alpha u_n - g_\alpha\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Also gilt für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\underbrace{\int_\Omega \partial^\alpha u_n\, \varphi}_{\to \int_\Omega g_\alpha \varphi} = \underbrace{(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_n\, \partial^\alpha \varphi}_{\to (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u\, \partial^\alpha \varphi},$$

d.h. wir haben

$$\int_\Omega g_\alpha\, \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u\, \partial^\alpha \varphi.$$

Also ist g_α die α-te schwache Ableitung von u.

□

Beweis von 4.10. Sei Ω beschränkt und seien für $j \in \mathbb{N}$

$$\Omega_j = \left\{ x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{j} \right\}$$

und $S_j = \Omega_{j+3} - \overline{\Omega_{j+1}}$, sowie $S_j' = \Omega_{j+4} - \overline{\Omega_j} \supset S_j$. Wir wählen $S_0 \Subset \Omega$ derart, dass

$$\Omega = \cup_{j=0}^\infty S_j.$$

Seien nun $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots$ eine zu $\{S_j\}_{j=0}^\infty$ gehörende Zerlegung der Eins, d.h. $\theta_j \in C_c^\infty(S_j)$

und $0 \leq \theta_j \leq 1$ für alle j und zudem

$$\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j(x) = 1 \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Weiter sei nun $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Dann gilt natürlich $\theta_j u \in W^{m,p}(\Omega)$ und $\operatorname{supp}(\theta_j u) \subset S_j$. Sei $\delta > 0$ beliebig. Wir wählen zu $j \in \mathbb{N}_0$ ein e_{j_0} so klein, dass für die Funktion

$$u_j = \varrho_{e_j} * (\theta_j u)$$

folgendes gilt:

$$\|u_j - \theta_j u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq \frac{\delta}{2^{j+1}} \quad \text{für } j \in \mathbb{N}_0 \tag{4.3}$$

und

$$\operatorname{supp}(u_j) \subset S'_j \quad \text{für } j \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren nun

$$u^\delta = \sum_{j=0}^{\infty} u_j. \tag{4.4}$$

Für jedes $\Omega_0 \Subset \Omega$ ist $u \in C^\infty(\Omega_0)$, da die Summe in (4.4) endlich ist für jedes $x \in \Omega_0$. Sei nun $\Omega_0 \Subset \Omega$ fixierft, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|u^\delta - u\|_{W^{m,p}(\Omega_0)} &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} u_j - \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j u \right\|_{W^{m,p}(\Omega_0)} \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \|u_j - \theta_j u\|_{W^{m,p}(\Omega_0)} \overset{(4.3)}{\leq} \delta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \leq \delta.
\end{aligned}$$

Da δ beliebig und insbesondere unabhängig von Ω_0 ist, können wir nun das Supremum über alle $\Omega_0 \Subset \Omega$ betrachten.

Im Falle, dass Ω unbeschränkt ist (z.B. $\Omega = \mathbb{R}^d$) findet man zu $\delta > 0$ ein $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ mit

$$\|u - u\restriction_{\tilde{\Omega}}\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq \delta.$$

Das obige Argument wird nun auf $u\restriction_{\tilde{\Omega}}$ angewendet. Im Ergebnis finden wir wieder eine Folge (u_n) in $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$, diesmal sogar mit $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$, mit

$$\|u - u_n\|_{W^{m,p}(\Omega)} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

□

4.12 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$. Seien $1 \leq p < \infty$ und $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Dann existiert eine Folge (u_n) in $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \cap W^{m,p}(\Omega)$ mit*

$$\|u_n - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Diesen wichtigen Satz beweisen wir nicht, verwenden ihn aber im Folgenden.

4.1 Fortsetzungen, Randwerte und Spuren in $W^{m,p}(\Omega)$

4.13 Satz. *Sei $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$. Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit*

$$\overline{\Omega} \subset \mathcal{O}.$$

Dann exisitiert ein beschränkter, linearer Operator $E\colon W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ derart, dass für jedes $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt:

(1) $Eu = u$ fast überall in Ω.

(2) $Eu = 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$.

(3) $\|Eu\|_{W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ mit $C > 0$ unabhängig von u.

Bemerkung. *$E(u)$ steht für Extension, zu Deutsch: Fortsetzung von u.*

Beweis. Wir nehmen zunächst $\Omega = \mathbb{R}^d_+ \cap B_{100}(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < 100, x_d > 0\right\}$ und $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ an. Wir fixieren $x^* \in \partial\Omega$ mit $x^*_d = 0$ und $B = B_r(x^*) \subset B_{100}(0)$ und setzen

$$B^+ = B_r(x^*) \cap \Omega,\ B^- = B_r(x^*) \cap \left(\mathbb{R}^d \setminus \Omega\right).$$

Unser Ziel ist es nun, $u\restriction_{B^+}$ zu $\bar{x}\colon B \to \mathbb{R}$ derart fortzusetzen, dass $\bar{x} \in C^1(B)$ gilt. Spiegeln der Funktionswerte wie z.B. durch

$$\bar{u}(x) = u(x_1, \ldots, x_{d-1}, -x_d) \quad \text{für } x \in B^-$$

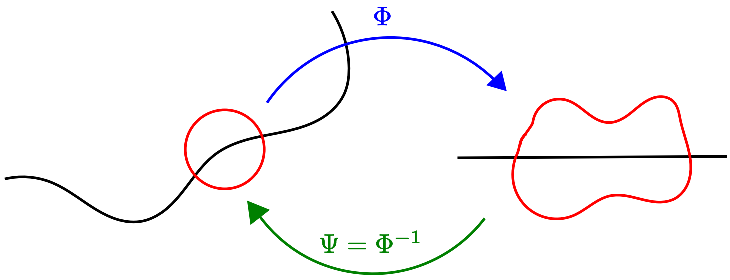
reicht hierzu *nicht* aus!

Wir definieren

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in B^+, \\ -3u\left(x_1, \ldots, x_{d-1}, -x_d\right) + 4u\left(x_1, \ldots, x_{d-1}, -\frac{x_d}{2}\right), & x \in B^-. \end{cases}$$

Es gilt nun
$$\bar{u} \in C^1(B),$$
d.h. die Fortsetzung setzt auch die ersten Ableitungen stetig fort. Hierzu müssen wir zeigen, dass für $|\alpha| \leq m$
$$\partial^\alpha u \restriction_{\{x_d=0\}} = \partial^\alpha \bar{u} \restriction_{\{x_d=0\}}$$
gilt. Für $1 \leq i \leq d-1$ gilt offensichtlich
$$\partial_i u \restriction_{\{x_d=0\}} = \partial_i \bar{u} \restriction_{\{x_d=0\}}, \quad \text{weil } -3+4=1.$$
Sei nun $x \in B^-$. Dann gilt
$$\begin{aligned} \partial_d \bar{u}(x) \quad &= \quad -3\partial_d u\left(x_1, \ldots, x_{d-1}, -x_d\right)(-1) + 4\partial_d u\left(x_1, \ldots, x_{d-1}, -\frac{x_d}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &\xrightarrow{x_d \to 0} \quad (3-2)\left(\partial_d u\left(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0\right)\right), \quad \text{weil } 3-2=1. \end{aligned}$$
Damit gilt
$$\bar{u} \in C^1(B).$$
Weiterhin gilt nach Definition von $\bar{u}$
$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(B^+)},$$
wobei sich $C > 0$ explizit ausrechnen lässt. Aussage (3) entspricht der Stetigkeit (Beschränktheit) des Operators und ist somit gezeigt.

Die obigen Schritten lassen sich nicht nur für Kugeln $B = B_r\left(x^*\right)$ durchführen, sondern ohne Weiteres auch für einfach zusammenhängende, kleine Gebiete $B' \ni x^*$ mit $\partial B' \in C^1$.

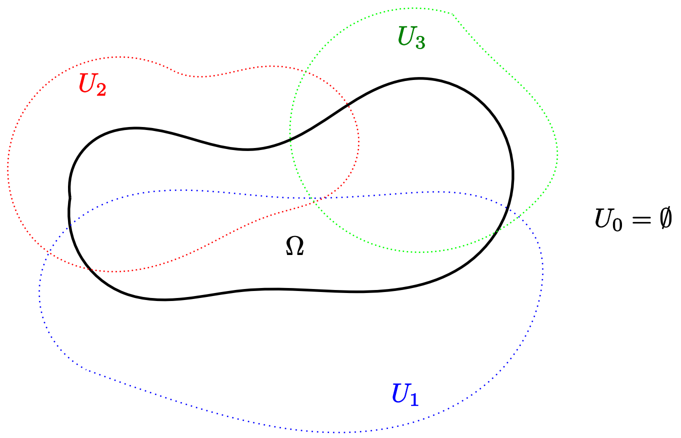


Wenn Ω nicht von der Form $\Omega = \mathbb{R}^d_+ \cap B_{100}(0)$ ist, so betrachten wir einen Diffeomorphismus Φ, welcher den Rand $\partial\Omega$ lokal „aufbiegt", d.h. $\Phi\colon B_r\left(x^*\right) \cap \Omega \to \mathbb{R}^d_+$, wobei für

$x = (x_1, \dots, x_{d-1}, \gamma(x_1, \dots, x_{d-1}))$

$$\Phi(x) = y = \left(\Phi^1(x), \dots, \Phi^{d-1}(x), x_d - \gamma(x_1, \dots, x_{d-1})\right)$$

gilt, mit $\Phi^d(x) = x_d - \gamma(x_1, \dots, x_{d-1})$ und γ den Rand beschreibt.



Da $\partial\Omega$ kompakt ist, existieren Punkte $x_1, \dots, x_N \in \partial\Omega$ und offene Mengen $U_1, \dots, U_N$ mit $x_i \in U_i$ derart, dass $\partial\Omega \subset \cup_{i=1}^N$. Sei $U_0 \Subset \Omega$ derart geeignet, dass

$$\Omega \subset \cup_{i=0}^N U_i$$

gilt. Sei $\theta_0, \dots, \theta_N$ eine diesbezügliche Zerlegung der Eins. Seien $\bar{u_i}$ die Fortsetzungen von $U_i \cap \Omega \to U_i$ und $\partial\Omega \cap U_i$ sich schreiben lässt als Graph einer C^1-Funktion. Wir definieren

$$\bar{u} = \sum_{i=0}^N \theta_i \bar{u_i}$$

und erhalten somit

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}$$

und für $y \mapsto \Psi(y)$ entsprechend. Wir setzen nun $u' \colon \Phi(B_r(x^*) \cap \Omega) \to \mathbb{R}$ durch $u'(y) = u(\Psi(y))$. Es folgt

$$\|\bar{u'}\|_{W^{1,p}(\Phi(B))} \leq C \|u'\|_{W^{1,p}(\Phi(B^+))}$$

und somit

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Um $\operatorname{supp}(\bar{u}) \subset \mathcal{O}$ zu erreichen, definieren wir $I\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch

$$I(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 1, & x \in \mathcal{O} \setminus \Omega, \operatorname{dist}(x, \partial\mathcal{O}) > \frac{3\operatorname{dist}(\Omega,\partial\mathcal{O})}{4}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

und ersetzen $\bar{u}$ durch $\bar{u} \cdot (I * \varrho_\varepsilon)$, wobei $\varepsilon < \frac{\operatorname{dist}(\Omega,\partial\mathcal{O})}{4}$.

Falls $u \in W^{1,p}(\Omega)$, aber euch $u \notin C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ gilt, so wählen wir eine Folge (u_n) in $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \cap W^{1,p}(\Omega)$ mit

$$\|u_n - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \to 0.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \|Eu_m - Eu_l\|_{W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)} &= \|E(u_m - u_l)\|_{W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)} \\ &\overset{u_m - u_l \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)}{\leq} C\,\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Also ist (Eu_n) selbst eine Cauchyfolge, konvergiert also in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Da E linear ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} Eu_n = Eu =: \bar{u}.$$

$\square$

Bemerkung. *Für $W^{m,p}(\Omega)$ mit $m > 1$ müsste man Fortsetzungen wählen, welche auch Ableitungen bis zur Ordnung m stetig fortsetzen und höhere Regularitäten des Randes fordern, damit die Komposition*

$$u' = u \circ \Psi$$

behandelt werden kann.

4.14 Satz. *Seien $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$. Dann existiert ein linearer, beschränkter Operator $T\colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ derart, dass für jedes $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt:*

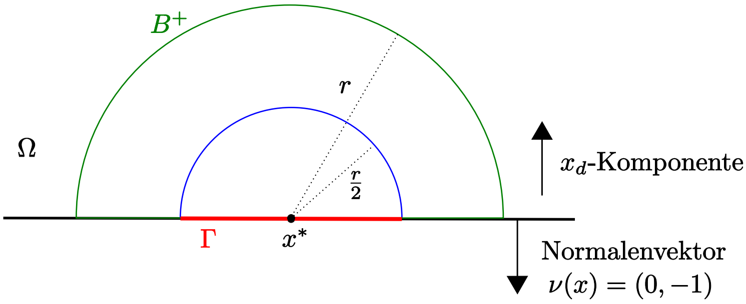
(i) $Tu = u\restriction_{\partial\Omega}$, falls $u \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap W^{1,p}(\Omega)$.

(ii) $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ mit $C > 0$ unabhängig von u. (D.h. T ist stetig.)

Bemerkung. *$T(u)$ steht für die Spur (Englisch: trace) von u.*

Beweis. Zunächst nehmen wir $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ und $\Omega = \mathbb{R}^d_+ \cap B_{100}(0)$ an. Wir fixieren $x^* \in \partial\Omega$ mit $x^*_d = 0$ und $B = B_r(x^*) \subset B_{100}(0)$ und setzen $\tilde{B} = B_{\frac{r}{2}}(x^*)$. Weiterhin setzen wir

$$\Gamma = \partial\Omega \cap \tilde{B}.$$



Sei $\varphi \in C_c^\infty(B)$, $\varphi \geq 0$, mit $\varphi = 1$ auf $\tilde{B}$. Für $x = (x_1, \ldots, x_d)$ schreiben wir $x' = (x_1, \ldots, x_{d-1})$, sodass $x = (x', x_d)$. Es gilt nun

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma |u(x')|^p \,\mathrm{d}x' &\leq \int_{\{x_d=0\}} \varphi(x',0)\,|u(x',0)|^p \,\mathrm{d}x' = -\int_{B^+} \frac{\partial}{\partial x_d}\left(\varphi\,|u|^p\right)(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{B^+} \left(\partial_d\varphi|u|^p + \varphi p|u|^{p-1}\,\mathrm{sgn}(u)\,\partial_d u\right)(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \|\nabla\varphi\|_\infty \int_{B^+} |u|^p(x)\,\mathrm{d}x + \|\varphi\|_\infty p \int_{B^+} |u|^{p-1}|\nabla u|(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \|\nabla\varphi\|_\infty \int_{B^+} |u|^p(x)\,\mathrm{d}x + \|\varphi\|_\infty p\left(\frac{p-1}{p}\int_{B^+} |u(x)|^p\,\mathrm{d}x + \frac{1}{p}\int |\nabla u(x)|^p\,\mathrm{d}x\right) \\
&\leq C\left(\|\varphi\|_{C^1}, p\right)\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)},
\end{aligned}$$

also gilt

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Die weiteren Schritte verlaufen analog zum Beweis von Satz 4.13, d.h.

(2) „Lokales Aufbiegen" des Randes mittels eines Diffeomorphismus für $x^* \in \partial\Omega$ mit $\Gamma = B_r(x^*) \cap \partial\Omega$.

(3) Überdecken des Randes derart, dass

$$\partial\Omega = \cup_{i=1}^N \Gamma_i.$$

Dann gilt für $i \in \{1, \ldots, d\}$

$$\|u\|_{L^p(\Gamma_i)} \leq C \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

(4) Mittels einer Zerlegung der Eins und einer Darstellung der Form $u = \sum_{i=1}^{N} u \cdot \theta_i$ definiereren wir

$$T(u) = \sum_{i=1}^{N} (u \restriction_{\partial\Omega}) \cdot \theta_i$$

und erhalten

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C(\Omega, p) \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

(5) Falls $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und $u \notin C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, so betrachten wir eine Folge (u_n) in $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ mit $\|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0$. Dann ist nach Schritt (4) (Tu_n) eine Cauchyfolge in $L^p(\partial\Omega)$, also exisitiert ein Grenzwert, für den wegen der Linearität von T

$$\lim_{n\to\infty} T(u_n) = Tu$$

gilt. Zudem gilt für die Folge (u_n)

$$\sup_{\partial\Omega} |u_n - u| \to 0,$$

was wir auch im Beweis von Satz 4.12 sehen würden.

□

Wir stellen uns nun die Frage, was es für eine Funktion in $W^{1,p}(\Omega)$ bedeutet, die Aussage Tu fast überall auf $\partial\Omega$ zu erfüllen.

4.15 Definition. Für $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, bezeichnet $W_0^{m,p}(\Omega)$ den Abschluß von $C_c^\infty(\Omega)$ bezüglich der $W^{m,p}(\Omega)$-Norm, d.h.

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \exists \, (u_n) \in C_c^\infty(\Omega)^{\mathbb{N}} \text{ mit } \|u_n - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \to 0 \right\}.$$

4.16 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$. Seien $1 \leq p < \infty$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow Tu = 0 \quad \textit{f.ü. auf } \partial\Omega.$$

Beweis. Für $d = 1$ siehe Übungszettel.

□

4.2 Einbettungen

4.17 Satz. *Zu jedem p mit $1 \leq p < d$ existiert eine Konstante $c > 0$ derart, dass für alle Funktionen $u \in C_c^1\left(\mathbb{R}^d\right)$*

$$\|u\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}\left(\mathbb{R}^d\right)} \leq c\,\|\nabla u\|_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)} \left(\leq c\,\|u\|_{W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)}\right) \tag{4.5}$$

gilt, d.h. es gibt eine stetige Einbettung

$$W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow L^{\frac{dp}{d-p}}\left(\mathbb{R}^d\right).$$

Bemerkung. *Für $p \nearrow d$ ergibt sich „$\frac{dp}{d-p} \nearrow \infty$". In der Tat gilt für $p > d$, dass $W^{1,p}$-Funktionen (bis auf Modifikation) Hölder-stetig sind.*

4.18 Folgerung. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$. Es gelte $1 \leq p < d$. Dann existiert eine stetige Einbettung $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)$, d.h. mit $c > 0$ gilt für $u \in W^{1,p}(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Bemerkung. *$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ wäre auf der rechten Seite nicht ausreichen, z.B. für $u \equiv 1$.*

Beweis. Nach Satz 4.13 existiert $\bar{u} = E(u) \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ mit $|\operatorname{supp}| < \infty$ und

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)} \leq c_1\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{4.6}$$

mit $c_1 > 0$ unabhängig von u. Da $\bar{u}$ einen kompakten Träger besitzt, existiert nach Satz **??** (lok. Approximaiton von $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$) eine Folge $(u_n) \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ mit $\|u_n - \bar{u}\|_{W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)} \to 0$. Nach Satz 4.17 existiert $c_2 > 0$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\|u_n\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}\left(\mathbb{R}^d\right)} \leq c_2\,\|\nabla u_n\|_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)} \tag{4.7}$$

Die Folge (u_n) konvergiert zunächst nur in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$, es handelt sich dabei jedoch auch um eine Cauchyfolge in $L^{\frac{dp}{d-p}}\left(\mathbb{R}^d\right)$, denn es gilt

$$\|u_k - u_l\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}\left(\mathbb{R}^d\right)} \leq c_2\,\|\nabla(u_k - u_l)\|_{W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)}.$$

Der Grenzübergang in (4.7) für $n \to \infty$ liefert nun

$$\|u\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)} \leq \|\bar{u}\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}\left(\mathbb{R}^d\right)} \leq c_2\,\|\nabla \bar{u}\|_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)} \overset{(4.6)}{\leq} c_2 c_1\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

$\square$

Beweis von 4.17. Zunächst zeigen wir, dass es ausreicht, (4.5) für $p = 1$ zu zeigen. Sei also $1 < p < d$. Wir wählen $\gamma = \frac{p(d-1)}{d-p}$, sodass

$$\frac{\gamma d}{d-1} = (\gamma - 1)\,\frac{p}{p-1} = \frac{dp}{d-p}. \tag{4.8}$$

Wir wenden nun (4.5) auf die Funktion

$$x \mapsto |u(x)|^{\gamma}$$

an, wobei (4.5) für $p = 1$ gelte. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{\frac{\gamma d}{d-1}}\right)^{\frac{d-1}{d}} \quad &\leq \quad c\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\left(|u|^{\gamma}\right)| = c\gamma \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{\gamma-1}|\nabla u| \\ &\underset{\frac{p}{p-1}\text{ bzw. }\frac{p}{1}}{\overset{\text{Hölder mit}}{\leq}} \quad c\gamma \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

und wir erhalten wegen $(\gamma - 1)\frac{p}{p-1} = \frac{\gamma d}{d-1}$ die Gleichung (4.5) für $1 < p < d$.

Sei nun $p = 1$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wissen wir, dass für jeden Index $i \in \{1, \ldots, d\}$ und $x \in \mathbb{R}^d$

$$|u(x)| \quad \leq \quad \int_{-\infty}^{x_i} |\partial_i u(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_d)| \ \mathrm{d}y_i \tag{4.9}$$

gilt. Multiplikation der linken und rechten Seiten dieser Ungleichung für $i = 1, \ldots, d$ liefert dann gerade

$$|u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leq \left(\prod_{i=1}^{d} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_i u(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_d)| \ \mathrm{d}y_i}_{=:v_i}\right)^{\frac{1}{d-1}},$$

d.h.

$$|u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leq \prod_{i=1}^{d} v_i^{\frac{1}{d-1}}.$$

Mit Integration über ganz $\mathbb{R}$ bezüglich x_1, also $\int_{-\infty}^{\infty} \cdot \, \mathrm{d}x_1$, liefert

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \, \mathrm{d}x_1 \quad &\leq \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{v_1}^{\text{unabh. von } x_1} \, \mathrm{d}x_1 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{v_2^{\frac{1}{d-1}} v_3^{\frac{1}{d-1}} \cdots v_d^{\frac{1}{d-1}}}^{\substack{d-1 \text{ Faktoren mit} \\ \sum_{i=2}^{d} \frac{1}{d-1} = (d-1)\frac{1}{d-1} = 1}} \, \mathrm{d}x_1 \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \quad \int_{-\infty}^{\infty} v_1 \, \mathrm{d}x_1 \cdot \prod_{i=2}^{d} \left(\int_{-\infty}^{\infty} v_i \, \mathrm{d}x_1 \right)^{\frac{1}{d-1}}.
\end{aligned}$$

$(d-1)$-fache Iteration $\int \cdots \int \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_d$ liefert nun

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}}^{\frac{d}{d-1}} \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \, \mathrm{d}x \leq \left(\prod_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u| \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{d-1}}$$

und somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \quad &\underset{\leq \text{arithm. Mittel}}{\overset{\text{geom. Mittel}}{\leq}} \quad \left(\prod_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_1 u| \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{d}} \\
&\leq \quad \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u| \, \mathrm{d}x \\
&\overset{\sum |a_i| \leq \sqrt{d}|a|}{\leq} \quad \frac{\sqrt{d}}{d} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)| \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

4.19 Folgerung. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$ und $1 \leq mp < d$ mit $m \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine stetige Einbettung von $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{dp}{d-mp}}(\Omega)$, d.h. es existiert ein $c > 0$ derart, dass für alle $u \in C_c^{\infty}(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^{\frac{dp}{d-mp}}(\Omega)} \leq c \, \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

gilt. Die Voraussetzung $\partial\Omega \in C^1$ ist nicht notwendig, falls $W^{m,p}(\Omega)$ durch $W_0^{m,p}(\Omega)$ ersetzt wird.

4.20 Folgerung (Poincaré-Ungleichung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Seien weiter $1 \leq p < d$ und $1 \leq q \leq \frac{dp}{d-p}$. Dann gibt es $c > 0$ derart, dass für alle $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ gilt:*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c \, \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{4.10}$$

Beweis. Bewiesen ist bereits

$$\|u\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)} \leq c\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \text{(Satz 4.17)}.$$

Mit der Hölder-Ungleichung auf beschränkten Gebieten folgt die Behauptung nun aus

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|u|^q \cdot 1)^{\frac{1}{q}}\right) \leq \left(\int_\Omega |u|^{\frac{dp}{d-p}}\right)^{\frac{d-p}{dp}} \left(\underbrace{\int_\Omega 1}_{=|\Omega|}\right)^{\frac{dp-q(d-p)}{dpq}},$$

denn es ist $\left(\frac{dp}{(d-p)q}\right)' = \frac{dp}{dp-(d-p)q}$.

□

4.21 Folgerung (Poincaré)**.** *Es gibt $c > 0$ derart, dass für alle Kugeln $B_R = B_R(x) \subset \mathbb{R}^d$ und alle $u \in W_0^{1,p}(B_R)$ gilt:*

$$\int_{B_R} |u(x)|^2 \leq c\,R^2 \int_{B_R} |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{4.11}$$

Beweis. Wir setzen im Beweis von Folgerung 4.20 $p = q = 2$ und $\Omega = B_R$. Dann ist

$$|\Omega|^{\frac{dp-q(d-p)}{dpq}} = c\,R^{d\frac{2d-2(d-2)}{4d}} = c\,R^1.$$

□

4.22 Satz. *Sei $d < p \leq \infty$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$ derart, dass für alle $u \in C^1(\mathbb{R}^d)$*

$$\|u\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^d)} \leq c\,\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}$$

mit $\alpha = 1 - \frac{d}{p} = \frac{p-d}{p}$ gilt.

Zur Erinnerung: Es gilt

$$\|u\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^d)} = \|u\|_\infty + \sup_{x,y\in\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Beweis. Der Beweis setzt sich aus folgenden Schritten zusammen:

(1) Für alle Kugeln $B_r(x) \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$\fint_{B_r(x)} |u(x) - u(y)| \, \mathrm{d}y \le c_1 \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{d-1}} \, \mathrm{d}y.$$

(2) Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$|u(x)| \le c \, \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

(3) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $x \neq y$ gilt

$$|u(x) - u(y)| \le c \, |x-y|^\alpha \, \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.12}$$

Zu Schritt (1): Sei $B_r(x) \subset \mathbb{R}^d$. Für $\omega \in \partial B_1(0)$ und $0 < s < r$ gilt

$$|u(x+s\omega) - u(x)| \;=\; \left| \int_0^s \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(x+t\omega) \, \mathrm{d}t \right| \le \int_0^s |\nabla u(x+t\omega)| \, \mathrm{d}t$$

und es folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_1(0)} |u(x+s\omega) - u(x)| \, \mathrm{d}\mathcal{O}(\omega) &\le \int_0^s \int_{\partial B_1(0)} |\nabla u(x+t\omega)| \, \mathrm{d}\mathcal{O}(\omega) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^s \int_{\partial B_1(0)} |\nabla u(x+t\omega)| \frac{t^{d-1}}{t^{d-1}} \, \mathrm{d}\mathcal{O}(\omega) \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Für $y = t\omega$ $(t = |x-y|)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_1(0)} |u(x+s\omega) - u(x)| \, \mathrm{d}\mathcal{O}(\omega) &\le \int_0^s \int_{\partial B_t(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{d-1}} \, \mathrm{d}y = \int_{B_s(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{d-1}} \, \mathrm{d}y \\
&\overset{s<r}{\le} \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{d-1}} \, \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Multiplikation mit s^{d-1} und Integration $\int_0^r \cdot \, \mathrm{d}s$ liefert nun

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(x)} |u(y) - u(x)| \, \mathrm{d}y &= \int_0^r s^{d-1} \int_{\partial B_1(0)} |u(x+s\omega) - u(x)| \, \mathrm{d}\mathcal{O}(\omega) \\
&\le \frac{r^d}{d} \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{d-1}} \, \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\fint_{B_r(x)} |u(y) - u(x)| \, \mathrm{d}y \le \underbrace{c(d)}_{=:c_1} \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{d-1}} \, \mathrm{d}y$$

und somit Aussage (1).

Zu Schritt (2): Wir fixieren $x \in \mathbb{R}^d$ und berechnen

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= \fint_{B_1(x)} |u(x)| \, \mathrm{d}y \le \fint_{B_1(x)} |u(x)-u(y)| \, \mathrm{d}y + \fint_{B_1(x)} |u(y)| \, \mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Schritt (1)}}{\le} c_1 \int_{B_1(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{d-1}} \, \mathrm{d}y + c_2 \|u\|_{L^p(B_1(x))} \\
&\underset{\text{Hölder}}{\overset{d<p}{\le}} c_1 \left(\int_{B_1(x)} |\nabla u(y)|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \left(\underbrace{\int_{B_1(x)} \left(\frac{1}{|x-y|^{d-1}} \right)^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}y}_{<\infty} \right)^{\frac{p-1}{p}} + c_2 \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\
&\le c_3(d,p) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + c_2 \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\
&\le c_4 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)},
\end{aligned}$$

womit Aussage (2) gezeigt ist.

Wir wenden uns nun Aussage (3) zu: Seien $x, y \in \mathbb{R}^d$, $r = |x-y|$ und $V = B_r(x) \cap B_r(y)$. Es gilt

$$|u(x)-u(y)| = \fint_V |u(x)-u(y)| \, \mathrm{d}z \le \fint_V |u(x)-u(z)| \, \mathrm{d}z + \fint_V |u(y)-u(z)| \, \mathrm{d}z.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\fint_V |u(x)-u(z)| \, \mathrm{d}z &\le \frac{|B_r|}{|V|} \fint_{B_r(x)} |u(x)-u(z)| \, \mathrm{d}z \\
&\overset{(1)}{\le} c_1 \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{d-1}} \, \mathrm{d}z \\
&\le c_1 \left(\int_{B_r(x)} |\nabla u(z)|^p \, \mathrm{d}z \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_r(x)} |x-z|^{(-d+1)\left(\frac{p}{p-1}\right)} \, \mathrm{d}z \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\le c \|\nabla u\|_{L^p(B_r(x))} \cdot \left(r^{\frac{p-d}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \le c \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \cdot r^{\frac{p-d}{p}} \\
&\quad \left(\alpha = 1 - \frac{d}{p} = \frac{p-d}{p} \right).
\end{aligned}$$

□

4.23 Satz (Einbettung in C^α)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$. Dann existiert $c > 0$ und zu jedem $u \in W^{1,p}(\Omega)$ eine Modifikation (bzw. Version, d.h. Abände-*

rung von u auf Nullmengen) $u^* \in C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$ *mit* $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$ *und*

$$\|u^*\|_{C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)} \le c\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Beweis. Zu $u \in W^{1,p}(\Omega)$ existiert eine Fortsetzung $\bar{u} \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ mit $\|\bar{u}\|_{W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)} \le c\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ und $\operatorname{supp}(\bar{u})$ kompakt. Nach Proposition 4.9 (??) gibt es eine Folge $(u_n) \in C_c^\infty$ mit

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)} \to 0. \tag{4.13}$$

Nach Satz 4.22 (??) gilt dann

$$\|u_m - u_l\|_{C^\alpha\left(\mathbb{R}^d\right)} \le c\,\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)}.$$

Also existiert ein Grenzwert $u^* \in C^\alpha\left(\mathbb{R}^d\right)$ mit

$$\|u_n - u^*\|_{C^\alpha\left(\mathbb{R}^d\right)} \to 0. \tag{4.14}$$

Aus (4.13) und (4.14) folgt $u = \bar{u} = u^*$ fast überall in Ω. Außerdem gilt

$$\|u^* \restriction_\Omega\|_{C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)} \le \|u^*\|_{C^\alpha\left(\mathbb{R}^d\right)} \le c_1\,\|\bar{u}\|_{W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)} \le c_2\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

□

Bemerkung. *Durch Betrachten der Ableitungen folgt nun auch die Existenz einer stetigen Einbettung*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right),$$

falls $mp > d$ *und* $l \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$ *geeignet.*

Wir fassen die Resultate über stetige Einbettungen wie folgt zusammen:

4.24 Satz. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen und beschränkt mit* $\partial\Omega \in C^1$. *Dann sind die folgenden Einbettungen stetig:*

(1) Fall $m < \frac{d}{p}$ *oder* $m - \frac{d}{p} \ge 0 - \frac{d}{q}$ $\left(\Leftrightarrow q \le \frac{dp}{d-mp}\right)$:

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

(2) Fall $m > \frac{d}{p}$: *Setze* $l = m - \left\lfloor \frac{d}{p} \right\rfloor - 1$.

(a) $\frac{d}{p} \notin \mathbb{N}$: *Setze* $\alpha = \left\lfloor \frac{d}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{d}{p}$:

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right).$$

(b) $\frac{d}{p} \in \mathbb{N}$:

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\beta}\left(\overline{\Omega}\right) \quad \textit{für } 0 < \beta < 1.$$

Bemerkung (Faustregel). *Für* $m - \frac{d}{p} < 0$ *erhalten wir also eine stetige Einbettung* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *falls die für die „Sobolev-Zahlen" gilt:*

$$m - \frac{d}{p} \geq 0 - \frac{d}{p} \quad \Leftrightarrow \quad q \leq \frac{dp}{d - mp}.$$

Ist $m - \frac{d}{p} > 0$, *so erhalten wir eine stetige Einbettung* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ *mit* α *hinreichend groß, falls*

$$m - \frac{d}{p} \geq l + \alpha.$$

Inbesondere sind die Funktionen im Zielraum also sogar beschränkt.

Im Prinzip vergleichen wir bei dieser Faustregel die Anzahl der Ableitungen, da $l + \alpha$ *die Anzahl der möglichen Ableitungen in* $C^{l,\alpha}$ *ist. Im Sobolev-Raum müssen wir jedoch um den Faktor* $\frac{d}{p}$ *korrigieren.*

4.3 Kompakte Einbettungen

Frage: Wir wissen nun, dass die Einbettung $W^{1,2}(B) \hookrightarrow L^6(B)$ für $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ stetig ist. Hat sie als Einbettung $W^{1,2}(B) \hookrightarrow L^5(B)$ eventuell noch bessere Eigenschaften?

Antwort: Ja, sie ist sogar kompakt, d.h. beschränkte Mengen werden auf relative kompakte Mengen abgebildet.

Bemerkung. $L^6(B) \hookrightarrow L^5(B)$ *ist stetig, aber nicht kompakt.*

4.25 Satz (Rellich-Kondrachov). *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen und beschränkt. Dann ist die Einbettung* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *für*

$$1 \leq q < \frac{dp}{d - mp}$$

kompakt.

Beweis. Sei (u_n) eine beschränkte Folge in $W^{1,p}(\Omega)$ mit der Eigenschaft $\operatorname{supp}(u_n) \subset \mathcal{O}$ und $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt. Wir betrachten $u_n^\varepsilon = \varrho_\varepsilon * u_n$ und nehmen o.B.d.A. an, dass auch $\operatorname{supp}(u_n^\varepsilon) \subset \mathcal{O}$ gilt. Die beiden entscheidenden Schritte sind:

(1) Die Konvergenz $\|u_n^\varepsilon - u_n\|_{L^q(\mathcal{O})} \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ ist gleichmäßig in $n \in \mathbb{N}$.

(2) Für fixiertes $\varepsilon > 0$ ist die Folge (u_n^ε) beschränkt und gleichgradig stetig.

Zum Nachweis von (1): Wir nehmen $u_n \in C^1(\mathcal{O})$ an. Es gilt

$$\begin{aligned} u_n^\varepsilon(x) - u_n(x) &= \int_{B_1(0)} \varrho(y)\,(u_n(x-\varepsilon y) - u_n(x))\;\mathrm{d}y \\ &= \int_{B_1(0)} \varrho(y)\left(\int_0^1 u_n'(x-\varepsilon ty)\;\mathrm{d}t\right)\;\mathrm{d}y \\ &= -\varepsilon\int_{B_1(0)} \varrho(y)\left(\int_0^1 \langle \nabla u_n(x-\varepsilon ty), y\rangle\;\mathrm{d}t\right)\;\mathrm{d}y \\ &\le \varepsilon\,\|\nabla u_n\|_{L^1(\mathcal{O})} \le c_1\,\varepsilon\,\|\nabla u_n\|_{L^p(\mathcal{O})}, \end{aligned}$$

d.h.

$$\|u_n^\varepsilon - u_n\|_{L^1(\mathcal{O})} \le c_2\,\varepsilon,$$

d.h. Konvergenz gegen Null für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig in $n \in \mathbb{N}$. ($c_2 = c_1 \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}$) Gilt auch in $L^q(\mathcal{O})$ für $q < \frac{dp}{d-p}$ nach Interpolation von $L^q(\mathcal{O})$ zwischen $L^1(\mathcal{O})$ und $L^{\frac{dp}{d-p}}(\mathcal{O})$. Zur Erinnerung: Falls $f \in L^{p_1} \cap L^{p_3}$ für $1 \le p_1 < p_2 < p_3 \le \infty$, dann

$$\|f\|_{L^{p_2}} \le \|f\|_{L^{p_1}}^{\theta}\,\|f\|_{L^{p_3}}^{1-\theta}$$

für $\frac{1}{p_2} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_3}$.

Wir führen nun den Nachweis von (2): Es gilt

$$\begin{aligned} |u_n^\varepsilon(x)| &\le \int_{B_\varepsilon(x)} \varrho_\varepsilon(x-y)\,|u_n(y)|\;\mathrm{d}y \le \|\varrho_\varepsilon\|_{L^\infty}\|u_n\|_{L^1} \\ &\le c_1(\varepsilon), \end{aligned}$$

wobei die Konstante $c_1(\varepsilon)$ unabhängig von n ist. Ebenso gilt für $i \in \{1,\ldots,d\}$

$$|\partial_i u_n^\varepsilon(x)| \le \int_{B_\varepsilon(x)} \partial_i \varrho_\varepsilon(x-y)\,|u_n(y)|\;\mathrm{d}y \le c_2(\varepsilon)$$

und analog für höhere Ableitungen. Damit ist (2) gezeigt.

Zum Beweis, dass (u_n) eine in $L^q(\Omega)$ konvergente Teilfolge besitzt, wählen wir $\delta > 0$

und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, dass

$$\|u_n^\varepsilon - u_n\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq \frac{\delta}{2} \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}. \tag{4.15}$$

Die Folge (u_n^ε) besitzt wegen (2) und nach dem Satz von Arzela-Ascoli eine Teilfolge $\left(u_{n_k}^\varepsilon\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset (u_n^\varepsilon)$ mit

$$\limsup_{l,k\to\infty} \left\|u_{n_l}^\varepsilon - u_{n_k}^\varepsilon\right\|_{L^q(\mathcal{O})} = 0.$$

Mit (4.15) und der Dreiecksungleichung gilt nun

$$\limsup_{l,k\to\infty} \|u_{n_l} - u_{n_k}\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq \delta.$$

Mit z.B. $\delta = \frac{1}{10^n}$,$n \in \mathbb{N}$ und durch Wahl einer geeigneten Diagonalteilfolge $\left(u_{n_{k_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ erhalten wir die gewünschte Konvergenz:

$$\limsup_{i,j\to\infty} \left\|u_{n_{k_j}} - u_{n_{k_i}}\right\|_{L^q(\mathcal{O})} = 0.$$

□

4.4 Die Hilberträume $H^m(\Omega)$

Auf $W^{m,2}(\Omega)$ und $W_0^{m,2}(\Omega)$ für $m \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt ist mittels

$$\langle u, v\rangle_{H^m} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle_{L^2}$$

ein Skalarprodukt erklärt.

4.26 Definition. Die (seperablen) Hilberträume $W^{m,2}(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ werden mit $H^m(\Omega)$ bzw. $H_0^m(\Omega)$ bezeichnet. Der Dualraum $(H_0^m(\Omega))'$ wird mit $H^{-m}(\Omega)$ bezeichnet.

Bemerkung. *$H_0^m(\Omega)$-Funktionen erfüllen* $\operatorname{Spur}(\partial^\alpha u) = 0$ *für* $|\alpha| \leq m-1$.

Motivation des Dualraums: Falls $f \in L^2(\Omega)$ (bzw. $f \in C(\Omega)$) und $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ Lösungen von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{auf } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.16}$$

sind, so gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ die Gleichung

$$\int_\Omega \nabla u(x)\, \nabla\varphi(x)\; \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\; \mathrm{d}x. \tag{4.17}$$

4.27 Definition. Sei $f \in H^{-1}(\Omega)$. Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ heißt *schwache Lösung von (4.16)*, falls

$$\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle_{L^2} = \langle f, \varphi\rangle_{H^{-1},H^1} \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty \text{ bzw. für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Es gilt offensichtlich, dass eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ von (4.16) eine schwache Lösung ist, falls $f \in C(\Omega)$. Wie wir sehen werden, ist in vielen Fällen (z.B. wenn $\partial\Omega \in C^1$, $f \in L^2(\Omega)$) jede schwache Lösung auch eine klassische Lösung, zumindest dann gilt (4.16) punktweise.

4.28 Satz. *Zu $f \in H^{-1}(\Omega)$ existieren funktionen $f^0, f^1, \ldots, f^d \in L^2(\Omega)$ mit*

$$\langle f, \varphi\rangle_{H^{-1},H^1} = \int_\Omega f^0\varphi + \sum_{i=1}^d \left(\int_\Omega f^i \partial_i\varphi\right) \quad \textit{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{4.18}$$

und

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf\left\{\left(\sum_{i=0}^d \|g^i\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \mid g^0, \ldots, g^d \in L^2(\Omega) \ \textit{erfüllen } (4.18)\right\}.$$

Beweis. Sei $f \in H^{-1}(\Omega)$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert $u_f \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle u_f, \varphi\rangle_{H_0^1} \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega)\,,$$

also gilt für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle u_f, \varphi\rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^d \langle \partial_i u_f, \partial_i\varphi\rangle_{L^2}\,. \tag{4.19}$$

Für alle $g^0, \ldots, g^d \in L^2(\Omega)$, welche f gemäß (4.18) darstellen, gilt (wähle $\varphi = u_f$)

$$\begin{aligned} \|u_f\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_f\|_{L^2}^2 &= \langle u_f, u_f\rangle + \langle \nabla u_f, \nabla u_f\rangle \overset{(4.19)}{=} \langle f, u_f\rangle \\ &\overset{(4.18)}{\leq} \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^d \|g\|_{L^2}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\|u_f\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_f\|_{L^2}^2\right) \end{aligned}$$

und somit folgt

$$\|u_f\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_f\|_{L^2}^2 \leq \sum_{i=1}^{d} \|g_i\|_{L^2}^2. \tag{4.20}$$

Also folgt für alle $g^0, \ldots, g^d \in L^2(\Omega)$ mit (4.18) und alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ mit $\|\varphi\|_{H^1} \leq 1$

$$\| \langle f, \varphi \rangle \| \overset{(4.19)}{\leq} \|u_f\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1} \leq \left(\sum_{i=0}^{d} \|g^i\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

und damit

$$\|f\|_{H^{-1}} \leq \left(\sum_{i=0}^{d} \|g^i\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wenn man $\varphi = \frac{u_f}{\|u_f\|_{H^1}}$ in (4.19) wählt, so folgt $\langle f, u_f \rangle = \|u_f\|_{H^1}^2$.

$\square$

5 Elliptische Differentialgleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Wir betrachten nun Verallgemeinerungen der Gleichung $\Delta u = 0$ bzw. des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Seien $a_{i,j} \colon \Omega \to \mathbb{R}$, $b_i \colon \Omega \to \mathbb{R}$ und $c \colon \Omega \to \mathbb{R}$ für $1 \leq i, j \leq d$ messbare, beschränkte Funktionen. Die Voraussetzungen an b_i und c werden wir später (eventuell in den Übungen) weiter abschwächen. Wir nehmen an, dass die Matrix $A := (a_{i,j}(\cdot))_{i,j}$ gleichmäßig bezüglich x positiv definit ist, d.h.

$$\exists\, \lambda \geq 0\ \forall\, x \in \Omega\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d \colon \quad a_{i,j}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \lambda\, |\xi|^2 .$$

Wir definieren zunächst zunächst symbolisch einen Differentialoperator L über

$$\begin{aligned} (Lu)\,(x) &= -\operatorname{div}\left(A(x)\,\nabla u(x)\right) + b_i(x)\,\partial_i u(x) + c(x) u(x) \\ &= -\partial_i\left(a_{i,j}\,\partial_j u\right) + b_i\,\partial_i u + cu. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $(Lu)\,(x)$ selbst für $u \in C^\infty(\Omega)$ im Allgemeinen in keinem Punkt $x \in \Omega$ definiert, da die Funktionen $a_{i,j}$ nicht differenzierbar sind (und i.A. auch nicht das Produkt $a_{i,j}\,\partial_j u$). Dennoch wollen wir für $f \in L^2(\Omega)$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} Lu &= f \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

lösen. Mit Hilfe der Theorie der Sobolevräume und des Lemmas von Lax-Milgram ist dies tatsächlich im schwachen Sinne möglich, in vielen Fällen sogar eindeutig.

Wiederholung Kapitel 7.3 des Funktionalanalysis-Skriptes

Sei H ein separabler Hilbertraum.

5.1 Definition. Sei $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Diese heißt *stetig*, falls

$$\exists\, c > 0\ \forall\, u, v \in H\colon \quad |a(u,v)| \le c\,\|u\|\|v\|.$$

a heißt *koerziv*, falls

$$\exists\, \alpha > 0\ \forall\, u \in H\colon \quad a(u,u) \ge \alpha\,\|u\|^2.$$

5.2 Satz (Stampacchia). *Seien H ein Hilbertraum, $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige, koerzive Bilinearform. Seien $K \subset H$ nichtleer, abgeschlossen und konvex und $f \in H^*$. Dann existiert genau ein Element $u \in K$ mit*

$$a(u, v-u) \ge (f, v-u) \quad \textit{für alle } v \in K.$$

Falls a symmetrisch ist, so ist dieses Element u beschrieben durch

(i) $u \in K$ *und*

(ii) $\frac{1}{2}a(u,u) - (f,u) = \min_{v \in K}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - (f,v)\right\}$.

Als Folgerung im Fall $K = H$ ergibt sich

5.3 Lemma (Lax-Milgram). *Seien H ein separabler Hilbertrau und $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige, koerzive Bilinearform. Sei $f\colon H \to \mathbb{R}$ ein lineares beschränktes Funktional. Dann existiert genau ein Element $u \in H$ mit*

$$a(u,\varphi) = (f,\varphi) \quad \textit{für alle } \varphi \in H.$$

Wir betrachten nun den Hilbertraum $H = H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$. Als Bilinearform $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ betrachten wir

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(a_{i,j}\,\partial_i u\,\partial_j v + b_i\,\partial_i u \cdot v + cuv\right). \qquad \left(= \int_\Omega (Lu)\cdot v\right)$$

Natürlich kann $f \in L^2(\Omega)$ als lineares, beschränktes Funktional auf $H_0^1(\Omega)$ aufgefasst werden, denn für $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$|(f,\varphi)| \le \|f\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}\|\varphi\|_{H^1}.$$

Die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ ist auf $H_0^1(\Omega)$ beschränkt, denn für $u,v \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \int_\Omega \left(|a_{i,j}\,\partial_i u\,\partial_j v| + |b_i\,\partial_i u\,v| + |cuv|\right) \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} d^2 \underbrace{\max_{1\leq i,j\leq d} \|a_{i,j}\|_\infty}_{=:\bar{a}} \|\nabla u\|_{L^2}\,\|\nabla v\|_{L^2} + d \underbrace{\max_{1\leq i\leq d} \|b_i\|_\infty}_{=:\bar{b}} \|v\|_{L^2} + \|c\|_\infty \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\
&\leq C_1\left(d,\bar{a},\bar{b},\|c\|_\infty\right)\,\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Bemerkung. *Da für alle $w \in H^1$*

$$\|w\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C_2\,\|w\|_{H^1}$$

mit einer Konstanten $C_2 > 0$, kann man die Voraussetzungen an b_i bzw. an c abschwächen, indem man die Höldersche Ungleichung verwendet.

Die spannendste Frage ist, ob $a(\cdot,\cdot)$ koerziv auf $H_0^1(\Omega)$ ist. Nach Voraussetzung gilt

$$\int_\Omega a_{i,j}\,\partial_i u\,\partial_j v \geq \lambda \|\nabla u\|_2^2.$$

Interessant sind die Terme niedriger Ordnung:

Fall I: $C \geq 0$ f.ü. in Ω und $b_i = 0$ für jedes i.

$$a(u,u) \geq \lambda\|\nabla u\|_2^2 + \underbrace{\int_\Omega c(x)\,(u(x))^2\,\mathrm{d}x}_{\geq 0} \geq \lambda\|\nabla u\|_2^2 \geq \lambda K^{-2}\|u\|_{H^1}^2,$$

wobei K die Konstante aus der Poincaré-Ungleichung ist.

Fall II: $b_i \in C^1(\Omega)$ und $-\frac{1}{2}\,\partial_i b_i + c \geq 0$ f.ü. in Ω.

$$\begin{aligned}
a(u,u) &\geq \lambda\|\nabla u\|_2^2 + \int_\Omega \left(b_i \underbrace{\partial_i u \cdot u}_{=\frac{1}{2}\partial_i(u^2)} + cu^2 \right) \overset{u^2 \in W_0^{1,1}(\Omega)}{=} \lambda\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{2}\int \left(\partial_i b_i + c\right) u^2. \\
&\geq \lambda\|\nabla u\|_2^2 \geq \lambda\left(K^{-2}\right)\|u\|_{H^1}^2.
\end{aligned}$$

Fall III: $d\,K\,\bar{b} + K^2\,\|c^-\|_\infty < \lambda$.

$$\begin{aligned} a(u,u) &\geq \lambda\|\nabla u\|_2^2 - d\,\bar{b}\,\|\nabla u\|_2\,\|u\|_{L^2} - \|c^-\|_\infty\,\|u\|_{L^2}^2 \\ &\geq \lambda\|\nabla u\|_2^2 - d\,\bar{b}\,K\,\|\nabla u\|_{L^2}^2 - K^2\,\|c^-\|_\infty\,\|\nabla u\|_{L^2}^2 \\ &= \|\nabla u\|_2^2\left(\lambda - d\,K\,\bar{b} - K^2\,\|c^-\|_\infty\right). \end{aligned}$$

5.4 Satz. *Unter den oben genannten Voraussetzungen (Fall I-III) existiert genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des Problems*

$$\begin{aligned} Lu &= f \qquad \textit{in } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \textit{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Beweis. Lemma von Lax-Milgram. □

Unter einer *schwachen Lösung des Randwerproblems*

$$\begin{aligned} Lu &= f \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

verstehen wir eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$, für welche gilt:

$$a(u,\varphi) = \langle f,\varphi\rangle \qquad \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Wir sagen, dass $Lu = f$ in Ω im schwachen Sinne gilt, falls $u \in H^1(\Omega)$ und $a(u,\varphi) = \langle f,\varphi\rangle\ \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega)$. Ein solches u ist i.A. natürlich nicht eindeutig, denn bereits im Fall $c = 0$ ist mit u auch $u + l$ für $l \in \mathbb{R}$ konstant eine Lösung von $Lu = f$ in Ω.

Bemerkung. *Wenn man $u \in H^1(\Omega)$ und $a(u,\varphi) = \langle f,\varphi\rangle\ \forall\ \varphi \in H^1(\Omega)$ fordert, so ist u nicht nur eine Lösung von $Lu = f$ in Ω, sondern es werden gewisse Randbedingungen (manchmal natürliche Randbedingungen genannt) erzwungen.*

Beispiel. Es gelte $u \in H^1(\Omega)$ und

$$\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi = a(u,\varphi) = \langle f,\varphi\rangle = 0$$

für alle $\varphi \in H^1(\Omega)$ mit $a_{i,j} = \delta_{ij}$ und $b_i = c = f = 0$. Zunächst folgt nach Wahl von $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u\,(-\Delta\varphi) = \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi = 0$$

und mit dem Satz von Weyl erhalten wir $\Delta u = 0$ in Ω. Wenn man nun $\varphi \in H^1(\Omega)$ allgemein wählt, so folgt

$$0 = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \underbrace{-\int_\Omega \Delta u \cdot \varphi}_{=0} + \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu \varphi,$$

also folgt auch

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu \varphi = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in L^2(\partial\Omega),$$

d.h. $\nabla u \cdot \nu = 0$ f.ü. auf $\partial\Omega$.

Anstelle einer rechten Seite $f \in L^2(\Omega)$ in der Gleichung $Lu = f$ kann man auch allgemeiner eine rechte Seite $f + \partial_1 f_1 + \cdots + \partial_d f_d$ mit $f_i \in L^2(\Omega)$ für $1 \le i \le d$ betrachten, da auch $\partial_i f_i \in H^{-1}(\Omega)$ gilt, also ist $\partial_i f_i$ bereits ein lineares beschränktes Funktional auf $H_0^1(\Omega)$. Wir setzen für $\nu \in H_0^1(\Omega)$ $\langle \partial_i f_i, v\rangle = -\int f_i \partial_i v$. Also ist auch das Randwertproblem

$$\begin{aligned} Lu &= f + \partial_i f_i && \text{in } \Omega, \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

unter den gemachten Voraussetzungen eindeutig lösbar.

5.5 Satz. *Sei L ein ellliptischer Differentialoperator in Divergenzform wie oben mit den Voraussetzungen an $a_{i,j}$, b_i und c, welche sicherstellen, dass die zu L zugehöhrige Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ auf $H_0^1(\Omega)$ beschränkt und koerziv ist. Seien $f, f_1, \ldots, f_d \in L^2(\Omega)$ und $g \in H^1(\Omega)$. Dann existiert genau eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ des Randwertproblems*

$$\begin{aligned} Lu &= f + \partial_i f_i && \textit{in } \Omega, \\ u &= g && \textit{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

d.h. es gilt $u - g \in H_0^1(\Omega)$ und

$$a(u,\varphi) = \langle f, \varphi\rangle - \langle f_i, \partial_i \varphi\rangle \qquad \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Beweis. Das Problem ist (eindeutig) gelöst, falls wir zeigen können, dass es genau eine Funktion $w \in H_0^1(\Omega)$ gibt, welche im schwachen Sinne

$$Lw = f + \partial_i f_i - Lg \qquad \text{in } \Omega$$

erfüllt. Mit $u = w + g$ folgt dann $Lu = Lw + Lg = f + \partial_i f_i$ wie gewünscht. Da $Lg \in H^{-1}(\Omega)$ gilt, folgen Existenz und Eindeutigkeit von w wiederrum wie oben aus dem Lemma von Lax-Milgram. $Lg \in H^{-1}$ folgt mittels

$$\begin{aligned}
\langle Lg, v\rangle &= \langle -\partial_i (a_{i,j}\,\partial_j g) + b_i\,\partial_i g + cg, v\rangle \\
&= \int \left(a_{i,j}\, \underbrace{\partial_j g}_{\in L^2}\, \underbrace{\partial_i v}_{\in L^2} + b_i\, \underbrace{(\partial_i g)}_{\in L^2}\, v + cgv \right).
\end{aligned}$$

□

Wir erinnern an folgende Schreibweise:

$$u^+ = \max(u, 0), \quad u^- = -\min(u, 0).$$

5.6 Proposition. *Sei $u \in H^1(\Omega)$. Dann ist $u^+, u^-, |u| \in H^1(\Omega)$ mit*

$$\begin{aligned}
\nabla\left(u^+\right) &= \begin{cases} \nabla u, & \textit{falls } u > 0, \\ 0, & \textit{falls } u \le 0, \end{cases} \\
\nabla(|u|) &= \begin{cases} \nabla u, & \textit{falls } u > 0, \\ 0, & \textit{falls } u = 0, \\ -\nabla u, & \textit{falls } u < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Beweis. Wähle für $\varepsilon > 0$ $b_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b_\varepsilon(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+\varepsilon^2} - \varepsilon^2, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$ d.h. b_ε approximiert x^+. Für $u \in H^1(\Omega)$ und $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_\Omega b_\varepsilon(u(x))\, \partial_i\varphi(x)\, \mathrm{d}x &= -\int_{\{u>0\}} \frac{u(x)\,\partial_i u(x)}{\sqrt{(u(x))^2 + \varepsilon^2}} \cdot \varphi(x)\, \mathrm{d}x \\
&\downarrow \\
\int_\Omega u^+(x)\, \partial_i\varphi(x)\, \mathrm{d}x &= -\int_{\{u>0\}} \partial_i u(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Analog behandeln wir die Fälle u^- und $|u|$.

□

5.7 Folgerung. *Seien $u \in H^1(\Omega)$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\nabla u = 0$ f.ü. auf $\{u = c\}$.*

Beweis. $\nabla u = \nabla u^+ - \nabla u^-$. $\square$

5.8 Satz (Schwaches Maximumprinzip)**.** *Angenommen, L erfüllt die Bedingungen wie oben und zusätzlich sei $c \geq 0$ f.ü. in Ω. $u \in H^1(\Omega)$ erfülle $Lu \leq 0$ in Ω im schwachen Sinne, d.h.*

$$a(u, \varphi) \leq 0 \qquad \forall\, \varphi \in H_0^1, \varphi \geq 0.$$

Dann gilt

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+. \tag{5.1}$$

5.9 Folgerung. *Ebenso impliziert $Lu \geq 0$ in Ω auch*

$$\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-.$$

Beweis. Für $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ gilt nach Voraussetzung

$$\int_\Omega \left(a_{i,j}\, \partial_i u\, \partial_j \varphi + b_i\, \partial_i \varphi + cu\varphi\right) \leq 0.$$

Falls $b_i = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, d\}$ setzen wir $U := \sup_{\partial\Omega} u^+$ und wählen die Testfunktion

$$\varphi = \max\left(u - U, 0\right) = (u - U)^+.$$

Dann folgt

$$\int_{\Omega \cap \{u > U\}} a_{i,j}\, \partial_i u\, \partial_j u \leq 0 \;\Rightarrow\; \lambda \int_{\{u>U\}} |\nabla u|^2 \leq 0.$$

Also ist u konstant auf $\{u > U\}$, also $u \leq U$ fast überall.

$\square$

Bemerkung. *(1) Die Abschätzung (5.1) gilt apriori für alle möglichen u mit $Lu \leq 0$ in Ω. Die Existenz solcher u spielt hier keine Rolle.*

(2) Für $v \in H^1(\Omega)$ gilt $v \leq 0$ auf $\partial\Omega$, wenn $v^+ = \max(v, 0) \in H_0^1(\Omega)$. Analog gilt $v \geq 0$ auf $\partial\Omega$, falls $-v \leq 0$ auf $\partial\Omega$ und $v \leq g$ auf $\partial\Omega$, falls $v - g \leq 0$ auf $\partial\Omega$.

(3) $\sup_{\partial\Omega} v$ bezeichnet $\sup_{\partial\Omega}(Tv)$ für $v \in H^1(\Omega)$, wobei Tv = Spur von v.

(4) Man kann i.A. hier $\sup_{\partial\Omega} u^+$ nicht durch $\sup_{\partial\Omega} u$ ersetzen (vgl. Übungsaufgabe).

5.10 Folgerung. *Angewendet auf $-u$ ergibt sich aus Satz 5.8 auch die Implikation*

$$Lu \geq 0 \text{ in } \Omega \quad \Rightarrow \quad \inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-.$$

Beweis. $Lu \leq 0$ in Ω im schwachen Sinne bedeutet

$$\int_\Omega (a_{i,j}\, \partial_i u\, \partial_j \varphi + b_i\, \partial_i u\, \varphi + c\, u\, \varphi) \leq 0 \quad \forall\, \varphi \in H_0^1\,(\Omega)\,,\ \varphi \geq 0.$$

Im Fall $b_i = 0$ für alle i und $c \geq c_0 > 0$ würde für $U = \sup_{\partial\Omega} u^+$ nach Wahl von $\varphi = (u-U)^+$

$$c_0 \int_{\{u \geq U\}} (u-U)^2 \leq 0$$

und hieraus wiederrum

$$u \leq U \qquad \text{f.ü. in } \Omega$$

folgen. Im allgemeinen Fall wählen wir $k \in \mathbb{R}$ mit

$$U \leq k < \sup_\Omega u.$$

Falls kein solches k existiert, gilt $\sup_\Omega u \leq U$, d.h. die Aussage ist bewiesen. Wir wählen als Testfunktion $\varphi = (u-k)^+$und erhalten

$$\begin{aligned} \nabla\varphi &= \begin{cases} \nabla u, & u > k, \\ 0, & u \leq k \end{cases} && \text{und} \\ \operatorname{supp}(\nabla\varphi) &\subset \operatorname{supp}(\varphi) && [\text{"}\varphi = \varphi_k\text{"}]\,. \end{aligned}$$

Aus der schwachen Formulierung folgt

$$\int_\Omega a_{i,j}\, \partial_i u\, \partial_j \varphi \leq \bar{b} \int_\Omega |\nabla u| \cdot \varphi \leq \bar{b} \int_{\operatorname{supp}(\nabla\varphi)} |\nabla\varphi| \cdot \varphi.$$

Aus der gleichmäßigen positiven Definitheit von $A = (a_{i,j})$ folgt

$$\lambda \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \leq \bar{b} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\varphi\|_{L^2(\operatorname{supp}(\nabla\varphi))}$$

und es folgt

$$\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\bar{b}}{\lambda} \|\varphi\|_{L^2(\operatorname{supp}(\nabla\varphi))}.$$

Wegen der Sobolev-Einbettung nach $L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} &\leq C(\bar{b},\lambda)\|\varphi\|_{L^2(\mathrm{supp}(\nabla\varphi))} = C(\bar{b},\lambda)\left(\int_{\mathrm{supp}(\nabla\varphi)} |\varphi|^2 \cdot 1\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(\bar{b},\lambda) \cdot |\,\mathrm{supp}\,(\nabla\varphi)\,|^{\frac{1}{d}} \cdot \|\varphi\|^{\frac{d-2}{2d}}_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \qquad \left[\left(\frac{d}{d-2}\right)' = \frac{d}{2}\right]
\end{aligned}$$

und wir erhalten somit

$$|\,\mathrm{supp}\,(\nabla\varphi)\,| \geq \left(\frac{1}{C(\bar{b},\lambda)}\right)^d = C_1\left(\bar{b},\lambda,d\right) > 0.$$

Diese Abschätzung gilt gleichmäßig bzgl. dem Parameter k. Also können wir aus Stetigkeitsgründen $k = \sup_\Omega u$ wählen und erhalten, dass sowohl

$$\begin{aligned}
\mathrm{supp}\,(u-U)_+ &\geq C_2 \quad \text{und} \\
\mathrm{supp}\,\nabla\,(u-U)_+ &\geq C_2
\end{aligned}$$

gilt, was einen Widerspruch darstellt.

□

5.11 Folgerung. *Unter den obigen Voraussetzungen gilt*

$$u \in H_0^1(\Omega)\,,\ Lu = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0 \quad \textit{f.ü. in } \Omega.$$

5.1 Existenz von Lösungen mittels der Fredholm-Alternative

Seien X, Y Banachräume über $\mathbb{R}$. Ein linearer, beschränkter Operator $A\colon X \to Y$ heißt kompakt, wenn er beschränkte Mengen auf präkompakte Mengen abbildet. Äquivalent hierzu ist die Eigenschaft, dass für jede beschränkte Folge (u_n) in X die Bildfolge (Au_n) eine konvergente Teilfolge in Y besitzt.

Falls H ein Hilbertraum und $A\colon H \to H$ kompakt (linear, beschränkt) ist, so gilt bereits, dass $\|Au_n - Au\| \to 0$ gilt, falls $u_n \to u$ schwach.

Falls $A\colon H \to H$ linear und beschränkt, so bezeichnet $A^*\colon H \to H$ mit

$$\forall\ u, v \in H \quad \langle A^* v, u\rangle = \langle v, A^* u\rangle$$

den zu A adjungierten Operator. (A^* ist das darstellende Element der Abbildung $u \mapsto \langle v, Au\rangle$).

5.12 Proposition. *Falls der lineare, beschränkte Operator $A\colon H \to H$ kompakt ist, so ist auch A^* kompakt.*

Beispiel. Seien $(a_{i,j}) : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ und

$$L = \partial_i \left(a_{i,j}\partial_j\right) : H_0^1\left(\Omega\right) \to H^{-1}\left(\Omega\right).$$

Dann ist der zu L adjungierte Differentialoperator L^* gegeben durch

$$L^* = \partial_i \left(a_{j,i}\partial_j u\right),$$

denn

$$a^*\left(u,\varphi\right) = \int a_{j,i}\,\partial_j u\,\partial_i\varphi = \int a_{i,j}\,\partial_i u\,\partial_j\varphi = \int a_{i,j}\,\partial_j\varphi\,\partial_i u = a(\varphi,u),$$

wobei $a(\cdot,\cdot)$ und $a^*\left(\cdot,\cdot\right)$ die zu L bzw. L^* gehörigen Bilinearformen sind.

5.13 Satz. *Sei $K\colon H \to H$ ein linearer, beschränkter,* kompakter *Operator. Dann gilt:*

(i) *Die Dimension des Nullraums $N(I-K)$ ist endlich.*

(ii) *Der Bildraum $R(I-K)$ ist abgeschlossen.*

(iii) $R(I-K) = N(I-K^*)^{\perp}$.

(iv) $N(I-K) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad R(I-K) = H$.

(v) $\dim N(I-K) = \dim N(I-K^*)$.

Die Aussage (iv) heißt auch Fredholm-Alternative.

Bevor wir Satz 5.13 beweisen, wollen wir Eigenschaft (iv), die Fredholm-Alternative, studieren bzw. anwenden. Abstragt gesehen besagt (iv), dass **entweder** die Aussage

Für jedes $f \in H$ hat die Gleichung

$$u - Ku = f$$

eine eindeutige Lösung.

oder

Es gibt eine Lösung $u \in H$, $u \neq 0$, der Gleichung

$$u - Ku = 0.$$

gilt.

5.14 Satz. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und wie oben $L = -\partial_i\left(a_{i,j}\,\partial_j u\right) + b_i\,\partial_j u + cu$. Dann trifft genau eine der beiden Aussagen zu:*

(1) Zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ existiert genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des Problems

$$\begin{aligned} Lu &= f \qquad \textit{in } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \textit{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5.2}$$

(2) Es gibt genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, des Problems

$$\begin{aligned} Lu &= 0 \qquad \textit{in } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \textit{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Beweis. Für $\gamma > 0$, $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$ definieren wir

$$a_\gamma(u,\varphi) = \int_\Omega \left(a_{i,j}\,\partial_i u\,\partial_j\varphi + b_i\,\partial_i u\,\varphi + cu\varphi + \gamma\,u\,\varphi\right).$$

$u \in H_0^1(\Omega)$ ist eine Lösung von (5.2) genau dann, wenn es $\gamma > 0$ mit

$$a_\gamma(u,\varphi) = \langle \gamma\,u + f, \varphi\rangle \qquad \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

gibt, d.h.

$$u = L_\gamma^{-1}(\gamma\,u + f),$$

wobei $L_\gamma = L + \gamma\,\mathrm{Id}$. Bemerkung: Addition von $\gamma\,u$ auf beiden Seiten der Gleichung. Wähle $\gamma = \mu$, wobei $\mu > 0$ so groß, dass die Bilinearform $a_\mu(\cdot,\cdot)$ auf $H_0^1(\Omega)$ koerziv ist. Definiere für $u \in L^2(\Omega)$

$$Ku = \gamma\,L_\gamma^{-1}u, \quad h = L_\gamma^{-1}f. \tag{5.4}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} u = L_\gamma^{-1}(\gamma\,u + f) \quad &\Leftrightarrow \quad u - Ku = h \;\Leftrightarrow\; L_\gamma(u - Ku) = f \\ &\Leftrightarrow \quad L_\gamma u - L_\gamma(Ku) = f \;\Leftrightarrow\; L_\gamma u - \gamma\,u = f \\ &\Leftrightarrow \quad L_\gamma u = \gamma\,u + f. \end{aligned}$$

Die Idee ist nun zu zeigen, dass

$$K\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

beschränkt, linear und *kompakt* ist. Sei hierzu $v \in L^2(\Omega)$. Da $\gamma \geq \mu$ ist die Gleichung

$$a_\gamma(u, \varphi) = (v, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{5.5}$$

eindeutig lösbar mit (wähle hierzu $\varphi = u$)

$$\begin{aligned} c_1 \|u\|_{H^1}^2 &= a_\gamma(u, u) \leq |(v, u)| \\ &\leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1} \\ \Rightarrow \|u\|_{H^1} &\leq \frac{1}{c_1} \|v\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Wegen $Kv = \gamma L_\gamma^{-1} v = \gamma u$ (wg. (5.5)) folgt

$$\|Kv\|_{H^1} \leq \frac{\gamma}{c_1} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Da $\|Kv\|_{L^2(\Omega)} \leq \|Kv\|_{H^1}$ ist K also beschränkt (und linear sowieso nach Definition). Da $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt (Satz von Rellich 4.25) folgt, dass K kompakt ist. Satz 5.13 liefert, dass nur *genau eine* der folgenden Aussagen gilt:

(A) Für jedes $f \in L^2(\Omega)$hat die Gleichung

$$u - Ku = h$$

eine eindeutige Lösung in $L^2(\Omega)$.

(B) Es gibt $u \in L^2(\Omega)$, $u \neq 0$, mit

$$u - Ku = 0.$$

□

Beweis von 5.13. (i) Falls $\dim(N(I-K)) = \infty$, so existiert eine Folge (u_k) in $N(I-K)$ von zueinander orthogonalen Elementen mit $\|u_n\| = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, denn jeder Hilbertraum besitzt ein unendlich-dimensionales Orthonormalsystem. Wähle solch eine Folge (u_n) im besagten Nullraum, d.h. es gilt insbesondere

$$Ku_n = u_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Im Hilbertraum gilt immer für Orthonormalsystem, dass

$$\|u_n - u_m\| = \sqrt{2} \quad \text{für alle } n, m,$$

denn es ist $\|u_m - u_n\|^2 = \underbrace{\|u_m\|^2}_{=1} + \underbrace{\|u_n\|^2}_{=1} - 2\underbrace{\langle u_n, u_m\rangle}_{=0} = 2$. Also folgt $\|Ku_n - Ku_m\| = \sqrt{2}$ für alle n, m und somit besitzt (Ku_n) keine konvergente Teilfolge, was einen Widerspruch zur Kompaktheit darstellt, da (u_n) beschränkt ist.

(ii) Wir nehmen an, wir hätten bereits die Aussage

$$\exists\, \gamma > 0\ \forall\, u \in N(I-K)^\perp:\ \ \|u - Ku\| \geq \gamma\|u\| \tag{5.6}$$

bewiesen. Sei nun (v_k) Folge in $R(I-K)$ mit $v_k \to v \in H$. Es ist zu zeigen, dass ein $u \in H$ mit

$$u - K(u) = v$$

existiert. Zunächst existieren $u_k \in H$ mit

$$u_k - Ku_k = v_k$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \|v_m - v_n\| &= \|u_m - Ku_m - (u_n - Ku_n)\| = \|(u_m - u_n) - K(u_m - u_n)\| \\ &\overset{(5.6)}{\geq} \gamma\,\|u_m - u_n\|. \end{aligned}$$

Also konvergiert auch die Folge (u_n) gegen ein $u \in H$ und wegen der Stetigkeit von K folgt

$$u - Ku = v, \quad \text{d.h. } v \in R(I-K).$$

Wir wenden uns nun dem Nachweis von (5.6) zu: Angenommen, (5.6) gelte nicht, dann existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $u_k \in N(I-K)^\perp$ mit $\|u_k\| = 1$ und $\|u_k - Ku_k\| < \frac{1}{k}$. Also folgt

$$u_k - Ku_k \to 0. \tag{5.7}$$

Da jedoch (u_k) beschränkt ist, existiert eine Teilfolge (o.B.d.A. die Folge (u_k) selbst) und ein $u \in H$ mit $u_k \to u$ schwach. Da K kompakt ist, folgt $\|Ku_k - Ku\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Aus (5.7) erhalten wir zudem $\|u_k - u\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Wiederrum aus (5.7) folgt $u - Ku = 0$, d.h. $u \in N(I-K)$, d.h.

$$0 = \langle u, u_k\rangle \quad \text{für alle } k.$$

Dies ist ein Widerspruch, denn es gilt $\langle u, u_k\rangle \to \langle u, u\rangle = \|u\|^2 = 1$.

(iii) Diese Aussage folgt aus (ii), da

$$\overline{R(I-K)} = N(I-K^*)^\perp,$$

denn im Allgemeinen gilt für einen linearen, beschränkten Operator $A\colon H \to A$

$$\begin{aligned} x \in N(A^*) \quad &\Leftrightarrow \quad A^*x = 0 \;\Leftrightarrow\; \langle A^*x, y\rangle = 0 \;\forall\; x \in H \\ &\Leftrightarrow \quad \langle x, Ay\rangle = 0 \;\forall\; y \in H \;\Leftrightarrow\; x \in R(A)^\perp \end{aligned}$$

und somit erhalten wir $R(A)^\perp = N(A^*)$ und sogar $\overline{R(A)} = N(A^*)^\perp$, da $R(A)$ abgeschlossen ist.

(iv) „$\Rightarrow$": Sei $N(I-K) = \{0\}$. Wir nehmen an, dass $R(I-K) \neq H$ und führen dies zu einem Widerspruch. Sei $H_1 = (I-K)(H)$, dann ist $H_1 \subsetneq H$ und H_1 auch abgeschlossen wegen (ii). Setze nun $H_2 = (I-K)(H_1)$. Da $I-K$ nach Voraussetzung injektiv ist, gilt $H_2 \subsetneq H_1$ und auch H_2 ist wieder abgeschlossen wegen (ii).

Auf diese Weise erhalten wir eine Folge (H_n), sodass jedes H_n abgeschlossen ist und

$$H_{n+1} \subsetneq H_n$$

für alle n gilt. Sei nun (u_n) eine Folge in H mit $\|u_n\| = 1$ und $u_n \in H_n \cap H_{n+1}^\perp$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$Ku_m - Ku_n = u_m - u_n - (u_m - Ku_m) + (u_n - Ku_n)$$

und für alle $m > n$ gilt

$$H_{m+1} \subsetneq H_m \subset H_{n+1} \subsetneq H_n.$$

Somit erhalten wir $u_m - Ku_m \in H_{n+1}$, $u_n - Ku_n \in H_{n+1}$ und $u_m \in H_{n+1}$. Mit $w = u_m - (u_m - Ku_m) + (u_n + Ku_n)$ folgt $\langle u_n, w\rangle = 0$. Also erhalten wir

$$\|Ku_m - Ku_n\|^2 = \|w - u_n\|^2 = \|w\|^2 + \underbrace{\|u_n\|^2}_{=1} - 2\langle w, u_n\rangle \geq 1.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch, da K ein kompakter Operator ist und somit die Folge (Ku_n) eine konvergente Teilfolge besitzen müsste, da (u_n) beschränkt ist.

„$\Leftarrow$": Sei nun $R(I-K) = H$ und somit $N(I-K^*) = \{0\}$. Da K^* kompakt ist, folgt mit „⇒" $R(I-K^*) = H$ und somit

$$N(I-K) = R(I-K^*)^{\perp} = \{0\}\,.$$

(v) Diese Aussage bleibt ohne Beweis und ohne Verwendung.

□

Bemerkung. *Die Fredholm-Alternative gilt auch für unbeschränkte, lineare Operatoren $A\colon D(A) \to Y$ zwischen zwei Banachräumen, falls $\overline{D(A)} = X$.*

5.2 Die Methode der Differenzenquotienten

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $h > 0$ und $i \in \{1, \ldots, d\}$. Für $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $x \in \{x \in \Omega \mid x \pm he_i \in \Omega\} =: \Omega^{\pm h,i}$ sei

$$\begin{aligned} D_i^h u(x) &= \frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} \quad \text{und} \\ D_i^{-h}(x) &= \frac{u(x-he_i)-u(x)}{-h}. \end{aligned}$$

5.15 Satz (Übungsaufgabe XII.4). *(i) Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt für $i \in \{1, \ldots, d\}$, $h > 0$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$*

$$\|D_i^h u\|_{L^p\left(\Omega^{h,i}\right)} \leq \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}.$$

(ii) Seien $1 \leq p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ und $i \in \{1, \ldots, d\}$. Es gelte für jedes $\Omega' \Subset \Omega$, jedes $h > 0$ genügend klein und ein $K > 0$

$$\|D_i^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq K.$$

Dann existiert die schwache Ableitung $\partial_i u \in L^p(\Omega)$ mit

$$\|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)} \leq K.$$

5.16 Satz (Innere H^2-Regularität). *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $L\colon \partial_i(a_{i,j}\,\partial_j u) + b_i\,\partial_i u + cu$ ein Differentialoperator mit $a_{i,j} \in C^1(\Omega)$, $b_i \in L^\infty(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$ und $(a_{i,j}(\cdot))$ gleichmäßig in Ω positiv definit.*

Sei $f \in L^2(\Omega)$ und sei $u \in H^1(\Omega)$ eine Lösung im schwachen Sinne von $Lu = f$. Dann gilt für jede offene Teilmenge $\Omega' \Subset \Omega$ und eine geeignete Konstante $c =$

$c\left(\Omega,\Omega',(a_{i,j}),\bar b,\bar c\right)>0$, dass $u\in H^2(\Omega')$ und

$$\|u\|_{H^2(\Omega')}\le c\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Bemerkung.

- *Eine alternative Schreibeweise für „$u\in H^2(\Omega')\ \forall\ \Omega'\Subset\Omega$" ist „$u\in H^2_{loc}(\Omega)$".*
- *Falls $u\in H^2(\Omega')\ \forall\ \Omega'\Subset\Omega$, so besitzt u in jedem Punkt $x\in\Omega$ zweite schwache Ableitungen, daher gilt die Differentialgleichung $Lu=f$ nun auch punktweise fast überall.*
- *Der Term $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ kann in vielen Fällen durch Daten bzw. Randwerte abgeschätzt werden.*

5.17 Lemma. *(i) Für zwei Funktionen v,w und $i\in\{1,\dots,d\}$ gilt*

$$\begin{aligned}D_i^h(vw) &= v^{h,i}\,D_i^h w+w\,D_i^h v\\ &= w^{h,i}\,D_i^h v+v\,D_i^h w\\ &= \left(D_i^h w\right)\left(\frac{v^{h,i}+v}{2}\right)+\left(D_i^h v\right)\left(\frac{w^{h,i}+w}{2}\right),\end{aligned}$$

wobei $v^{h,i}=v\circ\theta_{he_i}$, d.h. $v^h(x)=v(x+he_i)$.

(ii) Für $v,w\in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ und $v=w=0$ auf $\mathbb{R}^d\setminus\Omega$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d}v(x)\left(D_i^{-h}w\right)(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{\mathbb{R}^d}\left(D_i^h v\right)(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Zu (i):

$$v(x+he_i)\,w(x+he_i)-v(x)\,w(x)=v(x+he_i)\left(w(x+he_i)-w(x)\right)+w(x)\left(v(x+he_i)-v(x)\right).$$

Zu (ii):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}v(x)\left(D_i^{-h}w\right)(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d}v(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^d}v(x)\,w(x-he_i)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}v(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^d}v(y+he_i)\,w(y)\,\mathrm{d}y\\ &= -\int_{\mathbb{R}^d}\left(D_i^h v\right)(y)\,w(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□

Beweis von 5.16. Sei $\Omega' \Subset \Omega$, $W \subset \Omega$ offen mit $\Omega' \Subset W \Subset \Omega$ und $\tau \in C_c^\infty(W)$ mit $\tau \equiv 1$ auf Ω' und $0 \leq \tau \leq 1$. Damit gilt $|\nabla \tau| \leq c(\Omega', W)$. Nach Voraussetzung gilt

$$a(u, \varphi) = \langle f, \varphi \rangle \quad \text{für } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Wähle $\varphi = -D_k^{-h}\left(\tau^2 D_k^h u\right)$. Dann gibt es $h_0 > 0$ mit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, falls $h < h_0$.

Beachte, dass

$$a(u, \varphi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_\Omega a_{i,j}\, \partial_j u\, \partial_i \left(-D_k^{-h}\left(\tau^2 D_k^h u\right)\right) = \int_\Omega (f - c - b_i\, \partial_i u)\, \varphi.$$

Ziel ist es, links den „guten Term”

$$A = \int_\Omega a_{i,j}\, \partial_j \left(D_k^h u\right)\, \partial_i \left(D_k^h u\right) \cdot \tau^2$$

zu separieren, weil für diesen gilt:

$$A \geq \lambda \int_\Omega |\nabla D_k^h u|^2 \tau^2$$

und somit die Größe $\lambda \int_\Omega |\nabla D_k^h u|^2$ von oben abgeschätzt ist.

Definiere

$$\tilde{f}(x) = f(x) - c(x)u(x) - b_i(x)\, \partial_i u(x),$$

dann ist $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$. Beachte, dass $\tilde{f}$ von der Lösung u abhängt. Diese ist jedoch durch die Voraussetzungen des Satzes gegeben. Achtung: $\|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)}$ hängt aber u.a. von $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ ab, was nicht vergessen werden darf.

Die Ausgangssituation ist also (nach Wahl von $\varphi = -\left(D_k^{-h}\left(\tau^2 D_k^h u\right)\right)$)

$$(LS) \quad := \quad -\int_\Omega a_{i,j}\, \partial_j u \partial_i \left(D_k^{-h}\left(\tau^2 D_k^h u\right)\right) = \int_\Omega \tilde{f} \varphi =: (RS)$$

und es folgt für die Linke Seite (LS)

$$\begin{aligned}
(LS) &= \int_\Omega D_k^h \left(a_{i,j}\, \partial_j u\right) \partial_i \left(\tau^2 D_k^h u\right) \\
&= \int_\Omega \left(D_k^h a_{i,j}\right) \partial_j u \left[2\tau \partial_i \tau \cdot D_k^h u + \tau^2 D_k^h \partial_i u\right] \\
&\quad + \int_\Omega \left(a_{i,j}^{h,i}\right) \left(D_k^h \partial_j u\right) \left[2\tau \partial_i \tau D_k^h u + \tau^2 D_k^h \partial_i u\right] \\
&\geq \lambda \int_\Omega \tau^2 |D_k^h \nabla u|^2 - c_1 \int_\Omega \left(|\nabla u| \tau |D_k^h u| + |D_k^h \nabla u||\nabla u|\tau + |D_k^h \nabla u| \tau |D_k^h u|\right) \\
&\geq \frac{\lambda}{2} \int_\Omega \tau^2 |D_k^h \nabla u|^2 - c_2(c_1, \lambda) \int_\Omega \tau |\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

Wäre $\tilde{f} \equiv 0$ (was es nicht ist!), so würde - wie gewünscht - folgen:

$$\int_\Omega \tau^2 |D_k^h \nabla u|^2 \leq \frac{2c_2}{\lambda} \int_\Omega \tau |\nabla u|^2.$$

Um die rechte Seite abzuschätzen, notieren wir, dass

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\varphi|^2 &= \int_\Omega |D_k^{-h} \left(\tau^2 D_k^h u\right)|^2 \\
&\leq \int_\Omega |\nabla \left(\tau^2 D_k^h\right)|^2 \leq c_3 \left(\int_\Omega \tau^2 |\nabla D_k^h u|^2 + \int_\Omega \tau |D_k^h u|^2\right).
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f\varphi &\leq \frac{\lambda}{4} \int_\Omega \tau^2 |\nabla D_k^h u|^2 + \frac{\lambda}{4} \int_\Omega \tau |D_k^h u|^2 + c_4(c_3, \lambda) \int_\Omega |\tilde{f}|^2 \\
&\leq \frac{\lambda}{4} \int_\Omega \tau^2 |\nabla D_k^h u|^2 + c_5 \int_\Omega \left(|f|^2 + |u|^2 + |\nabla u|^2\right)
\end{aligned}$$

und wir erhalten mit diesen beiden Abschätzungen der linken und rechten Seite

$$\int_\Omega \tau^2 |D_k^h \nabla u|^2 \leq c_6 \int \left(|f|^2 + |u|^2 + |\nabla u|^2\right).$$

Es folgt zunächst, da $\tau = 1$ auf Ω' ist,

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq c_7 \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(W)}\right).$$

Durch Wahl einer Testfunktion $\varphi = \eta u$ mit $\eta = 1$ auf W, $\mathrm{supp}(\eta) \subset \Omega$ und $0 \leq \eta \leq 1$

folgt aber (Übung)

$$\|u\|_{H^1(W)} \leq c_8 \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

und somit

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq c_9 \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

□

5.18 Satz (Höhere innere Regularität). *Sei L wie in Satz 5.16, aber es gelte zusätzlich für ein $m \in \mathbb{N}$, dass $a_{i,j}, b_i, c \in C^{m+1}(\Omega)$ und $f \in H^m(\Omega)$. Dann gilt für jede schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ und $\Omega' \Subset \Omega$ sowohl $u \in H^{m+2}(\Omega')$ als auch*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega')} \leq c \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

5.19 Folgerung. *Gilt $a_{i,j}, b_i, c, f \in C^\infty(\Omega)$ in der Situation des vorigen Satzes, so folgt natürlich $u \in C^\infty(\Omega)$.*

5.20 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und seien für $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ $a_{i,j}, b_i, c\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Dann heißt der Differentialoperator

$$L = -\partial_i (a_{i,j} \partial_j) + b_i + c$$

strikt elliptisch (oder *gleichmäßig elliptisch*) in Ω, falls es ein $\lambda > 0$ derart gibt, dass für alle $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2.$$

Bemerkung. *Das Minuszeichen vor $\partial_i (a_{i,j} \partial_j)$ ist eine Frage des Geschmacks und von keiner mathematisch wichtigen Bedeutung.*

5.21 Definition. Der Differentialoperator

$$L = -\partial_i (a_{i,j} \partial_j) + b_i + c$$

heißt *Differentialoperator in Divergenzform*, wenn es eine Funktion $A\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ derart gibt, dass für den Hauptterm (derjenige Term mit den Ableitungen der höchsten Ordnung) gilt:

$$-\partial_i (a_{i,j} \partial_j u) = -\operatorname{div} (A(\cdot, u, \nabla u(\cdot))).$$

Bemerkung. *Hier ist*

$$A^i\left(x, s, \varrho\right) = \sum_{j=1}^{d} a_{i,j}(x)\varrho_j = \left(a_{i,j}\right)\left(\varrho\right).$$

Die Regularität von Lösungen im Inneren einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist ausreichend, um von der schwachen Formulierung auf eine punktweise Gültigkeit der Differentialgleichung zu schließen (Übung). Wenn der Rand des betrachteten Gebiets Ω regulär ist, so lässt sich zudem beweisen, dass Lösungen u bis zum Rand regulär sind. Dafür betrachten wir folgenden

5.22 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{m+2}$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Sei weiter L ein linearer, strikt elliptischer Differentialoperator in Divergenzform wie in Definition 5.21. Seien $f \in H^m\left(\Omega\right)$ und $g \in H^{m+2}\left(\Omega\right)$ und es gelte $a_{i,j} \in C^{m+1}\left(\overline{\Omega}\right)$ und $b_i, c \in C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ für $i, j \in \{1, \ldots, d\}$. Sei $u \in H^1\left(\Omega\right)$ eine schwache Lösung von $Lu = f$ in Ω, für welche gilt:*

$$u - g \in H_0^1\left(\Omega\right).$$

Dann gilt $u \in H^{m+2}\left(\Omega\right)$ und es gilt mit einer Konstante $c > 0$

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \le c\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{H^m(\Omega)} + \|g\|_{H^{m+2}(\Omega)}\right).$$

Bemerkung. *Die Forderung der stetigen Differenzierbarkeit der Funktionen $a_{i,j}, b_i, c$ bis zum Rand ist hier von entscheidender Bedeutung.*

5.23 Folgerung. *Unter geeigneten Voraussetzungen (alles $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$...) erhält man sogar $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ nach den bekannten Einbettungssätzen. Lösungen sind dann also glatt bis „in den Rand" hinein.*

5.3 Variationsrechnung und elliptische PDGL in Divergenzform

5.24 Satz (Einfache Version eines berühmten Resultats von E. DeGiorgi)**.** *Sei $F \in C^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$. Es gebe Konstanten $\lambda, \Lambda, K > 0$ derart, dass für alle $p \in \mathbb{R}^d$ gilt:*

$$\text{(i)} \quad \left|\frac{\partial F(p)}{\partial p_i}\right| \le K|p| \quad \text{für } i \in \{1, \ldots, d\},$$

$$\text{(ii)} \quad \lambda|\xi|^2 \le \frac{\partial F(p)}{\partial p_i \partial p_j}\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2 \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und sei $u \in H^1(\Omega)$ ein Minimum von

$$I(v) = \int_\Omega F(\nabla v(x))\, \mathrm{d}x,$$

bei festgelegten Randwerten, also in dem Sinne, dass $I(u) \leq I(u+\varphi)$ für jedes $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Dann gilt

$$u \in C^\infty(\Omega).$$

Bemerkung.

- *Im einfachsten Fall denke man sich $F(p) = |p|^2$. Dies ist jedoch trivial, da wir bereits wissen, dass harmonische Funktionen in C^∞ sind.*
- *Im allgemeinsten Fall ersetze man $F(p)$ durch $F(x,s,p)$ für eine Funktion $F\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.*
- *Bedingung (i) stellt sicher, dass es $c_1, c_2 > 0$ gibt mit*

  $$|F(p)| \leq c_1 + c_2|p|^2 \quad \text{für alle } p.$$

  Also ist $I(v)$ für $v \in H^1(\Omega)$ wohldefiniert.

5.25 Lemma. *Wenn man $\frac{\partial F}{\partial p_i}$ mit F_{p_i} bezeichnet, so gilt unter den Voraussetzungen des letzten Satzes für jedes $\varphi \in H_0^1(\Omega)$*

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^d F_{p_i}(\nabla u(x))\, \partial_{x_i}\varphi(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Beweis. u ist Minimum von $I(\cdot)$, also hat die Funktion $t \mapsto I(u+t\varphi)$ in $t=0$ ein Minimum, d.h.

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(u+t\varphi)\right)_{t=0} = 0 \quad \text{für } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Wir müssen also Differentiation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ und Integration $\int_\Omega$ vertauschen, was nach den üblichen Sätzen möglich ist, da

$$\left|\int_\Omega F_{p_i}(\nabla v)\partial_{x_i}\varphi\right| \leq dK\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

□

Grobe Beweis-Idee zu Satz 5.24. Letztendlich muss also gezeigt werden, dass Lösungen $u \in H^1(\Omega)$ von

$$\int_\Omega A^i(\nabla u)\, \partial_{x_i}\varphi = 0$$

auch $u \in C^{\infty}(\Omega)$ erfüllen. Hierbei werden Funktionen $A^i\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch $A^i(\nabla u) = F_{p_i}(\nabla u)$ definiert. Wenn man nun noch für $i, j \in \{1, \ldots, d\}$

$$a_{i,j}(x) = \frac{\partial A^i}{\partial p_j}(\nabla u(x))$$

definiert, so kann man zeigen, dass die Komponenten von ∇u Lösungen einer strikt elliptischen Differentialgleichung in Divergenzform sind. Wenn man dann C^{α}-Regularität für solche Gleichungen (schwierig, da man nur $a_{i,j} \in L^{\infty}(\Omega)$ weiß) beweisen kann, so folgt das Resultat durch Iteration bzw. Differentiation der Differentialgleichung.

$\square$

6 Nicht geeignete Übungsaufgaben

1.1, 1.2, 2.3, 3.3, 5.2, 5.4, 7.1, 8.3, 8.4

Wichtig: 6, 7.4, 9, 10

Literaturverzeichnis

[0] Foo Bar, QuuX (and B3y0nd), 2012