Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik

Skriptum zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen 2

Prof. Dr. Moritz Kaßmann

Sommersemester 2012

Mitschrift von Reidar Janssen

Stand vom 29. Juni 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Der Satz von De Giorgi über Minima von Variationsproblemen

Ziel dieses Kapitels ist es zu beweisen, dass Funktionen $u \in H^1(\Omega)$, welche auf einer beschränkten Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ das Funktional $I(u) = \int_\Omega F(\nabla u(x))\, \mathrm{d}x$ minimieren, glatt sind. Hierbei sind geeignete Voraussetzungen an $F \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zu stellen.

1.1 Ein Ausflug in die Variationsrechnung

Sei X ein Banachraum und $f \colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dann heißt f *unterhalbstetig*, falls für jedes $x \in X$ und jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x$ gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

Die Funktion f heißt *schwach unterhalbstetig*, falls für jedes $x \in X$ und jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \rightharpoonup x$ schwach gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

Bemerkung. *Im Folgenden sei an $X = H^1(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, $f \colon H^1(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $I(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, \mathrm{d}x$ gedacht.*

1.1 Satz. *Seien X ein reflexiver Banachraum, $I \colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ schwach unterhalbstetig und koerziv im folgenden Sinne: Es gibt $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ mit $I(u) \geq \alpha\|u\| + \beta$ für $x \in X$. Weiter gebe es ein $z \in X$ mit $I(z) < \infty$. Dann gibt es mindestens ein $u^* \in X$ mit*

$$I(u^*) = \inf\{I(u) \mid u \in X\},$$

d.h. das Problem „$\min_{v\in X} I(v)$!” ist lösbar.

Beweis. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $I(u_n) \to \inf\{I(v) \mid v \in X\}$. Die Folge (u_n) muss wegen der Koerzivität beschränkt sein, es gibt also $K \geq 1$ mit $\|u_n\| \leq K$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da X reflexiv ist, existieren Teilfolgen $(u_{n_k})_k$ und u^* mit $u_{n_k} \rightharpoonup u^*$. Da I schwach unterhalbstetig ist, folgt

$$I(u^*) \leq \inf\{I(v) \mid v \in X\}$$

und damit

$$I(u^*) = \inf\{I(v) \mid v \in X\}.$$

$\square$

Wie erkennt man, dass ein Funktional $I\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ schwach unterhalbstetig ist? Dazu betrachten wir die folgende

1.2 Proposition. *Seien X ein Banachraum, $I\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konvex und unterhalbstetig. Dann ist I schwach unterhalbstetig.*

Der Beweis dieses Satzes verwendet die Tatsache (Satz von Mazur), dass in einem normierten Vektorraum für jede schwach konvergente Folge (x_n) mit $x_n \rightharpoonup x$ gilt, dass eine Konvexkombination von (x_n) bereits stark, d.h. in der Norm, gegen x konvergiert.

1.3 Satz (vgl. Satz 6.8 im FA-Skript)**.** *Seien X ein reflexiver Banachraum und $A \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen. Sei $I\colon A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konvex, unterhalbstetig und koerziv. Dann nimmt I auf A sein Infimum an, d.h. es existiert $u^* \in A$ mit*

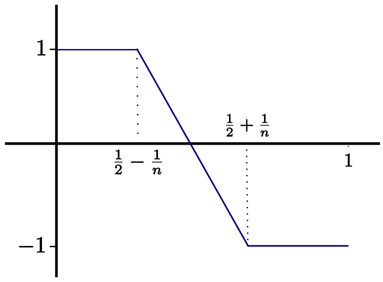
$$I(u^*) = \inf_{v \in A} I(v).$$

Beispiel (Auf Reflexivität von X kann nicht o.W. verzichtet werden)**.** Sei $X = C([0,1])$ mit $\|v\| = \sup_{t \in [0,1]} |v(t)|$ und sei $A = \left\{ v \in X \mid \int_0^{\frac{1}{2}} v(t)\ \mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^1 v(t)\ \mathrm{d}t = 1 \right\}$. Wir definieren

$$I(v) = \sup_{t \in [0,1]} |v(t)|.$$

Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes 1.3 bis auf die Reflexivität von X erfüllt. Wir betrachten $w_n(t)$ gegeben durch

$$w_n(t) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ \frac{n}{2} - nx & \text{für } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ -1 & \text{für } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Sei $a_n \geq 1$ derart, dass $u_n = a_n w_n \in A$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir bemerken, dass $a_n \to 1$ gilt. Dann gilt

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} I(u_n) = 1.$$

Eine stetige Funktion $u^* \in A$ mit $I(u^*) = 1$ kann es nicht geben, da dann

$$1 = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} u^* - \int_{\frac{1}{2}}^1 u^* \right| \leq \int_0^1 |u^*| \leq \sup_{t\in[0,1]} u^*(t) = 1$$

gelten würde.

1.2 Die Lösung des neunten Hilbertschen Problems nach De Giorgi

1.4 Satz (De Giorgi, 1957)**.** *Sei $F \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Es gebe $K, \Lambda \geq 1$ und $\lambda > 0$ derart, dass für alle $p \in \mathbb{R}^d$ gilt:*

(i) $\left|\frac{\partial F}{\partial p_i}(p)\right| \leq K|p|$ *für* $i = 1, \ldots, d$.

(ii) $\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 F(p)}{\partial p_i \partial p_j} \xi_i \xi_j \leq \Lambda|\xi|^2$ *für alle* $\xi \in \mathbb{R}^d$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sei ein beschränktes Gebiet. Die Funktion $u \in H^1(\Omega)$ sei Minimierer des Funktionals

$$I(v) = \int_\Omega F(\nabla v(x))\, \mathrm{d}x,$$

d.h. es gelte für $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$I(u) \leq I(u+\varphi).$$

Dann gilt bereits

$$u \in C^\infty(\Omega).$$

Bemerkung.
- *Geschichte: 1900 Hilbert, 1903 Bernstein u.a., 1957 De Giorgi, 1958 Nash, 1961 Moser.*

- *Allgemeine Funktionale* $I(v) = \int_\Omega F\left(x, v(x), \nabla v(x)\right)\ \mathrm{d}x$ *sind möglich, wobei man geeignete Bedingungen an* $F\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *stellen muss.*

- *Nach (i) gilt*

$$|F(p)| \leq c_1 + c_2|p|^2 \quad \textit{für } c_1, c_2 \geq 1 \textit{ geeignet.}$$

  Deswegen folgt

$$F\left(\nabla v(x)\right) \leq c_1 + c_2|\nabla v(x)|^2$$

  und $I(v)$ *endlich für* $v \in H^1(\Omega)$.

Von grundlegender Bedeutung ist die Beobachtung, dass jedes Minimum $u \in H^1(\Omega)$ des obigen Problems eine *Euler-Gleichung* erfüllt: Für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ gilt nämlich

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial p_i}\left(\nabla u\right) \partial_i \varphi = 0. \tag{1.1}$$

Beweis der Euler-Gleichung. Sei $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Zunächst gilt für $v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial p_i}\left(\nabla v(x)\right) \partial_i \varphi(x)\ \mathrm{d}x &\leq d\,K \int_\Omega |\nabla v(x)|\,|\nabla \varphi(x)|\ \mathrm{d}x \\ &\leq d\,K\,\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} < \infty. \end{aligned}$$

Sei $u \in H^1(\Omega)$ ein Minimierer. Dann ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto I\left(u + t\varphi\right)$ differenzierbar mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I\left(u + t\varphi\right) = \int_\Omega \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial p_i}\left(\nabla\left(u + t\varphi\right)\right) \partial_i \varphi\ \mathrm{d}x.$$

Da u ein Minimierer ist, folgt notwendigerweise

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I\left(u + t\varphi\right)\right]_{t=0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Es gilt (1.1).}$$

$\square$

1.5 Folgerung. *Seien* $A^i \in C^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ *für* $i = 1, \ldots, d$. *Es gebe* $K, \Lambda \geq 0$, $\lambda > 0$ *derart, dass für alle* $p \in \mathbb{R}^d$ *gilt:*

(i) $|A^i(p)| \leq K\,|p|$ *für* $i = 1, \ldots, d$.

(ii) $\lambda\,|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial A^i(p)}{\partial p_j}\,\xi_i \xi_j$ *für* $\xi \in \mathbb{R}^d$.

(iii) $\left|\frac{\partial A^i(p)}{\partial p_j}\right| \leq \Lambda$ *für* $i, j \in \{1, \ldots, d\}$.

$u \in H^1(\Omega)$ erfülle für jedes $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{d} A^i(\nabla u)\, \partial_i \varphi = 0 \tag{1.2}$$

Dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$.

Bemerkung. *Gleichung (1.2) ist die schwache Formulierung von*

$$\partial_i A^i(\nabla u) = 0. \tag{1.3}$$

Wenn (1.3) im klassischen Sinne, d.h. auch punktweise, sinnvoll bzw. korrekt ist, so würde gelten:

$$\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial A^i(\nabla u)}{\partial p_j}\, \partial_i \partial_j u = 0.$$

Wir setzen $a_{i,j}(x) = \frac{\partial A^i(\nabla u(x))}{\partial p_j}$. Die Funktion $u \in H^1(\Omega)$ wäre damit Lösung einer (herkömmlichen) elliptischen, partiellen Differentialgleichung der Form

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x)\, \partial_i \partial_j u(x) = 0.$$

Es ergeben sich folgende Fragen und Probleme:

- *Zunächst ist unklar, ob zweite Ableitungen von u überhaupt existieren.*
- *Die Koeffizienten hängen selbst von der uns unbekannten Funktion $u \in H^1(\Omega)$ ab.*
- *I.A. gilt für $v \in H^1(\Omega)$* nicht, *dass*

  $$x \mapsto \frac{\partial A^i(\nabla v)}{\partial p_j}$$

  stetig ist. Hoffentlich hilft uns hier die Eigenschaft, dass u nicht irgendeine Funktion ist, sondern ein Minimierer bzw. die Lösung der Euler-Gleichung (1.2).

Lösungsansatz Setze $v = \partial_k u$ für $k \in \{1, \dots, k\}$. Wenn $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ ist, so folgt aus (1.3)

$$\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \frac{\partial A^i}{\partial p_j}\, \partial_j \underbrace{\partial_k u}_{=v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \left(a_{i,j}(x)\, \partial_j v(x)\right) = 0. \tag{1.4}$$

Der Beweis von Korollar 1.5 bzw. von Satz 1.4 beruht nun auf drei Teilschritten:

(I) Nachweis, dass $v = \partial_k u$ tatsächlich Lösung im schwachen Sinne von (1.4) ist. Hierzu muss $\partial_j \partial_k u$ als Element aus $L^2_{loc}(\Omega)$ existieren. Hinreichend: $u \in H^2_{loc}(\Omega)$.

(II) Falls $a_{i,j} \colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, beschränkt und die Matrix $(a_{i,j})_{i,j}$ gleichmäßig positiv definit ist (und keine weiteren Annahmen), so gilt für jede Lösung $v \in H^1_{loc}(\Omega)$ der Gleichung (1.4) bereits $v \in C^\alpha(\Omega)$ mit $\alpha \in (0,1)$. (De Giorgi, 1957)

Mit (II) wüssten wir, dass $\partial_k u = v \in C^\alpha(\Omega)$ für jeden Index $k \in \{1, \ldots, d\}$ gilt, d.h.

$$\nabla u \in C^\alpha(\Omega) \quad \Rightarrow \quad u \in C^{1,\alpha}(\Omega).$$

Demnach wären die Koeffizienten $a_{i,j}$ bereits hölderstetig, also $a_{i,j} \in C^\alpha(\Omega)$.

(III) Seien $a_{i,j} \colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, beschränkt und $(a_{i,j})_{i,j}$ gleichmäßig, positiv definit mit $a_{i,j} \in C^\alpha(\Omega)$. Seien $f, f^1, \ldots, f^d \colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f \in L^\infty(\Omega)$ und $f^i \in C^\alpha(\Omega)$ für $i = 1, \ldots, d$. Sei $v \in H^1_{loc}(\Omega)$ eine Lösung im schwachen Sinne von

$$\partial_i (a_{i,j}\, \partial_j v) = f + \partial_i f^i \quad \text{in } \Omega.$$

Dann gilt $v \in C^{1,\alpha}(\Omega)$.

Beweis von Korollar 1.5. Wie oben erläutert folgt $a_{i,j} \in C^\alpha(\Omega)$ wegen (II). Mit (III) folgt

$$\partial_k u \in C^{1,\alpha}(\Omega) \quad \text{für jedes } k \in \{1, \ldots, d\}.$$

Differentiation von (1.4) mittels ∂_l für $l \in \{1, \ldots, d\}$ liefert

$$\partial_i (a_{i,j}\, \partial_j \partial_l v) = -\partial_i (\partial_l a_{i,j}\, \partial_j v).$$

Für die Funktion $w = \partial_l v$ erfüllt also dann

$$\partial_i (a_{i,j}\, \partial_j w) = -\partial_i f^i \quad \text{mit } f^i = \sum_{j=1}^d \partial_l a_{i,j}\, \partial_j v.$$

Beachte, dass $a_{i,j} \in C^{1,\alpha} \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ und $\partial_j v \in C^\alpha$

$$f^i \in C^\alpha(\Omega)$$

impliziert. Schritt (III) liefert

$$\partial_l \partial_k u = w \in C^{1,\alpha}(\Omega) \quad \Rightarrow \quad u \in C^{2,\alpha}(\Omega).$$

$\square$

Bemerkung. • *Schritt (I) ist nicht schwierig.*

- *Schritt (II) (Satz von De Giorgi) ist das Herzstück. Beachte, dass ein ursprünglich nichtlineares Problem wie in Korollar 1.5 erfolgreich studiert wird, indem Regularität von Lösungen für eine* lineare*, partielle Differentialgleichung mit* allgemeinen, *nur beschränkten und messbaren Koeffizientenfunktionen gezeigt wird.*

- *Schritt (III) ist bekannt als* Schauder Theorie. *Beim Beweis werden die Koeffizientenfunktioen $a_{i,j}(x)$ an Stellen $x_o \in \Omega$ „eingefroren" und die Termine mit*

$$|a_{i,j}(x) - a_{i,j}(x_0)|$$

als Störung behandelt.

1.6 Proposition. *Unter den Voraussetzungen von Korollar 1.5 gilt*

$$u \in H^2_{loc}(\Omega).$$

Genauer gilt: Für jedes $\Omega_0 \Subset \Omega$ gibt es $c \geq 1$ derart, dass für jede Lösung $u \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\|u\|_{H^2(\Omega_0)} \leq c\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Beweis. Wähle $\tau \in C^1_c(\Omega)$ mit $\Omega_0 \Subset \Omega'$ für $\Omega' \Subset \Omega$, $\tau = 1$ auf Ω_0, $\tau = 0$ auf $\Omega \setminus \Omega'$ und $|\nabla\tau| \leq C(\Omega_0, \Omega') := A$. Der Beweis folgt durch Wahl von

$$\varphi = D_k^{-h}\left(\tau^2 D_k^h u\right)$$

für $|h| \leq \frac{1}{2}\inf\left\{\operatorname{dist}(\Omega_0, \Omega \setminus \Omega'), \operatorname{dist}\left(\Omega', \mathbb{R}^d \setminus \Omega\right)\right\}$, wobei für $w \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, $k \in \{1, \dots, d\}$,

$$\left(D_k^h w\right)(x) = \frac{w(x + he_k) - w(x)}{h}$$

gesetzt wird. Setze $\tilde{\varphi} = \tau^2 D_k^h u$, sodass $\varphi = D_k^{-h}\tilde{\varphi}$ für $\tilde{\varphi}, \varphi \in H^1_0(\Omega)$, da $|h|$ klein und τ entsprechend lokalisiert. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_\Omega \sum_{i=1}^d A^i(\nabla u)\, \partial_i D_k^{-h}\tilde{\varphi} = \int_\Omega \sum_{i=1}^d A^i(\nabla u(x))\, \partial_i\tilde{\varphi}(x - he_k) - \int_\Omega \sum_{i=1}^d A^i(\nabla u(x))\, \partial_i\tilde{\varphi}(x) \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^d \underbrace{\left[A^i\left(\nabla u(x + he_k) - A^i(\nabla u(x))\right)\right]}\, \partial_i\tilde{\varphi}(x) \end{aligned}$$

und auch

$$A^i\left(\nabla u\left(x+he_k\right)\right)-A^i\left(\nabla u(x)\right)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}A^i\left(s\nabla u\left(x+he_k\right)+(1-s)\nabla u(x)\right)\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^1\left(\sum_{i=1}^d\frac{\partial A^i}{\partial p_j}\left(s\nabla u\left(x+he_k\right)-(1-s)\nabla u(x)\right)\underbrace{\partial_j\left(u\left(x+he_k\right)-u(x)\right)}_{\text{unabh. von }s}\right)\,\mathrm{d}s.$$

Setze

$$a_{i\,j}^{h,k}(x)=\int_0^1\frac{\partial A^i}{\partial p_j}\left(s\nabla u\left(x+he_k\right)+(1-s)\nabla u\left(x\right)\right)\,\mathrm{d}s.$$

Beachte, dass $\left(a_{i\,j}^{h,k}(x)\right)$ gleichmäßig positiv definit und beschränkt ist. Also gilt, da $\operatorname{supp}\tilde{\varphi}\subset\Omega$,

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^d a_{i\,j}^{h,k}(x)\,\partial_j\left(D_k^h u\right)\underbrace{\partial_i\tilde{\varphi}}_{=\partial_i\left(\tau^2D_k^hu\right)}\,\mathrm{d}x=0$$

genau dann, wenn

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^d a_{i\,j}^{h,k}(x)\,\partial_j\left(D_k^hu(x)\right)\,\partial_i\left(D_k^hu(x)\right)\,\tau^2\,\mathrm{d}x \tag{1.5}$$

$$=-\int_\Omega\sum_{i,j}^d a_{i\,j}^{h,k}(x)\,\partial_j\left(D_k^hu(x)\right)\cdot 2\cdot\tau\,\left(\partial_i\tau\right)\,D_k^hu(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\underset{\text{Young}}{\leq}\ \varepsilon\int_\Omega\tau^2(x)\left|\nabla D_k^hu(x)\right|^2\,\mathrm{d}x+\frac{C_1}{\varepsilon}\int_\Omega\left|\nabla\tau(x)\right|^2\left(D_k^hu(x)\right)^2\,\mathrm{d}x.$$

Da

$$(1.5)\geq\lambda\int_\Omega\tau^2(x)\left|\nabla D_k^hu(x)\right|^2\,\mathrm{d}x,$$

folgt nach Wahl von $\varepsilon=\frac{\lambda}{2}$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0}\left|D_k^h\nabla u(x)\right|^2\,\mathrm{d}x &\leq \int_\Omega\tau^2(x)\left|D_k^h\nabla u(x)\right|^2\,\mathrm{d}x\\ &\leq \frac{4C_1}{\lambda^2}\int_\Omega\left|\nabla\tau\right|^2\left(D_k^hu(x)\right)^2\,\mathrm{d}x\\ &\leq C\left(\lambda,A\right)\int_\Omega\left|D_k^hu(x)\right|^2\,\mathrm{d}x\\ &\overset{\text{Übung XII.4}}{\leq} C_2\int_\Omega\left|\nabla u(x)\right|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Aus $\int_{\Omega_0} |D_k^h \nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq M$ für alle $k \in \{1, \dots, d\}$ und alle $|h| < h_0$ folgt (siehe Übung XII.4 der PDE 1) $\int_{\Omega_0} |\nabla^2 u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq M$. Also folgt

$$\int_{\Omega_0} |\nabla^2 u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq C_2 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

$\square$

1.3 Die Theorie von Morrey und Campanato

Wir beweisen hier Schritt (III) im Beweis des Satzes von De Giorgi. Dazu studieren wir elliptische Differentialgleichungen in Divergenzform mit stetigen bzw. hölderstetigen Koeffizienten. Die Theorie ist auch als Störungstheorie von Schauder bekannt.

Zur Wiederholung erinnern wir an folgenden

1.7 Satz (Morrey)**.** *Sei $d < p \leq \infty$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$ derart, dass für alle $u \in C^1\left(\mathbb{R}^d\right)$*

$$\|u\|_{C^\alpha\left(\mathbb{R}^d\right)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)}$$

mit $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$ gilt.

Beweis. Wir forumulieren folgende Behauptungen:

(1) Für alle Kugeln $B_r(x) \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$\fint_{B_r(x)} |u(x) - u(y)| \, \mathrm{d}y \leq c_1 \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{d-1}} \, \mathrm{d}z.$$

(2) Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$|u(x)| \leq c\|u\|_{W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)}.$$

(3) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $x \neq y$ gilt

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x-y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)}$$

mit $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$.

Mithilfe von (1) und (2) können wir (3) beweisen: Wähle $x, y \in \mathbb{R}^d$ und setze $r = |x-y|$

und $W = B_r(x) \cap B_r(y)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
⨍_W |u(x) - u(z)| \,\mathrm{d}z &\leq \frac{|B_r(x)|}{|W|} ⨍_{B_r(x)} |u(x) - u(z)| \,\mathrm{d}z \\
&\overset{(1)}{\leq} c \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|z-x|^{d-1}} \,\mathrm{d}z \qquad (1.6) \\
&\leq c \left(\int_{B_r(x)} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_r(x)} |x-z|^{-(d-1)\frac{p}{p-1}} \,\mathrm{d}z \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq c \left(r^{d-(d-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \|\nabla u\|_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)} = c_2\, r^{1-\frac{d}{p}} \|\nabla u\|_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)}.
\end{aligned}$$

Ebenso gilt natürlich

$$⨍_W |u(y) - u(z)| \,\mathrm{d}z \leq c_2\, r^{1-\frac{d}{p}} \|\nabla u\|_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)}.$$

Also erhalten wir

$$|u(x) - u(y)| = ⨍_W |u(x) - u(y)| \,\mathrm{d}z \leq 2c_2 \underbrace{r^{1-\frac{d}{p}}}_{=|x-y|^\alpha} \|\nabla u\|_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)}.$$

$\square$

Bemerkung. *Im Wesentlichen verwendet der Beweis Aussage (1) und für $x \in \mathbb{R}^d$*

$$⨍_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|z-x|^{d-1}} \,\mathrm{d}z \leq c\, r^{1-\frac{d}{p}}.$$

(Siehe (1.6).)

1.8 Lemma. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $\mu \in \mathbb{R}$, $f \in L^1(\Omega)$ und $K \geq 1$ derart, dass für alle Kugeln $B_r(x) \subset \mathbb{R}^d$*

$$\int_{\Omega \cap B_r(x)} |f(y)| \,\mathrm{d}y \leq K\, r^{d\left(1-\frac{1}{p}\right)}$$

mit $p > 1$ und $p > \frac{1}{\mu}$ gilt. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}^d$

$$\int_\Omega \frac{|f(y)|}{|x-y|^{d(1-\mu)}} \,\mathrm{d}y \leq \frac{p-1}{\mu p - 1} (\operatorname{diam} \Omega)^{d\left(\mu - \frac{1}{p}\right)} K.$$

Bemerkung. $\mu = \frac{1}{d}$ *führt zu* $\int_\Omega \frac{|f(y)|}{|x-y|^{d-1}} \leq c \ldots.$

Beweis. Setze $r = |x-y|$, $f \equiv 0$ auf Ω^{C}, $A = \operatorname{diam}(\Omega)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|f(y)|}{|x-y|^{d(1-\mu)}}\, \mathrm{d}y &\leq \int_\Omega r^{d(\mu-1)} |f(y)|\, \mathrm{d}y \leq \int_0^\infty r^{d(\mu-1)} \int_{\partial B_r(x)} |f(z)|\, \mathrm{d}\mathcal{O}(z)\, \mathrm{d}r. \\
&= \int_0^A r^{d(\mu-1)} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \int_{B_r(x)} |f(z)|\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \\
&\overset{\text{part.}}{\underset{\text{Int.}}{=}} A^{d(\mu-1)} \int_{B_A(x)} |f(z)|\, \mathrm{d}z \\
&\quad - d(\mu-1) \int_0^A r^{d(\mu-1)-1} \left(\int_{B_r(x)} |f(y)|\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}r \\
&\overset{\text{Vorauss.}}{\leq} K A^{d(\mu-1)+d\left(1-\frac{1}{p}\right)} + K d(1-\mu) \int_0^A r^{d(\mu-1)-1+d\left(1-\frac{1}{p}\right)}\, \mathrm{d}r \\
&= K \frac{1-\frac{1}{p}}{\mu-\frac{1}{p}} A^{d\left(\mu-\frac{1}{p}\right)}.
\end{aligned}
$$

□

1.9 Satz. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Es gebe $K \geq 1$, $0 < \alpha < 1$ derart, dass für alle Kugeln $B_r(x) \subset \mathbb{R}^d$*

$$
\int_{\Omega \cap B_r(x)} |\nabla u(y)|\, \mathrm{d}y \leq K r^{d-1+\alpha} \tag{1.7}
$$

gilt. Dann gilt $u \in C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$ und es gibt $C = C(d,\alpha) \geq 1$ derart, dass für jede Kugel $B_r(z) \subset \mathbb{R}^d$ gilt:

$$
\sup_{x,y \in \Omega \cap B_r(z)} |u(x) - u(y)| \leq C K r^\alpha.
$$

Bemerkung. *Bedingung (1.7) folgt aus*

$$
\int_{\Omega \cap B(x,r)} |\nabla u(y)|^2\, \mathrm{d}y \leq K' r^{d-2+2\alpha}, \tag{1.8}
$$

denn es ist

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega \cap B(x,r)} |\nabla u(x)|\, \mathrm{d}y &\overset{\textit{Hölder}}{\leq} \left(\int_{\Omega \cap B(x,r)} |\nabla u(y)|^2\, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega \cap B(x,r)} 1\, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{(1.8)}{\leq} \left(K' r^{d-2+2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} C_0 r^{\frac{d}{2}} = \underbrace{C_0 \sqrt{K'}}_{=:K} r^{d-1+\alpha}.
\end{aligned}
$$

1.10 Definition. Seien $1 \leq p < \infty$, $\lambda \geq 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Dann bezeichnet $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ den Banachraum aller Funktionen $u \in L^p(\Omega)$, für welche mit einem $K \geq 1$ gilt:

$$\int_{B(x_0,\varrho)} |u(x) - u_{B(x_0,\varrho)}|^p \, \mathrm{d}x \leq K\,\varrho^\lambda \quad \text{für alle } x_0 \in \mathbb{R}^d, \varrho \in (0,1)\,.$$

(Hierbei bezeichnet $u_A = \fint_A u$.) Als Norm betrachtet man

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)}$$

mit

$$[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = \sup_{\substack{x_0\in\Omega,\\ \varrho>0}} \left(\varrho^{-\lambda} \int_{\Omega\cap B(x_0,\varrho)} |u(x) - u_{B(x_0,\varrho)}|^p \, \mathrm{d}x \right).$$

1.11 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Man sagt Ω *ist von außen regulär*, falls es $\delta > 0$ derart gibt, dass für alle $x_0 \in \overline{\Omega}$ und $0 < \varrho < \operatorname{diam}(\Omega)$ gilt:

$$|\,\Omega \cap B\,(x_0, \varrho)| \geq \delta \varrho^d.$$

1.12 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und regulär von außen und es gelte $d < \lambda < d + p$. Dann ist $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ isomorph zu $C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$ für $\alpha = \frac{\lambda-d}{p}$.*

Beweis. Seien $u \in C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$, $x_0 \in \overline{\Omega}$, $x \in \Omega \cap B\,(x_0, r)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left|u(x) - u_{B(x_0,r)}\right| &= \left| \fint_{B(x_0,r)} u(x) - u_{B(x_0,r)} \right| \leq \fint_{B(x_0,r)} |u(x) - u(y)| \, \mathrm{d}y \\ &\leq \fint_{B(x_0,r)} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} |x-y|^\alpha \, \mathrm{d}y \leq (2r)^\alpha \, [u]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\,. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\cap B(x_0,r)} |u(x) - u_{B(x_0,r)}|^p &\leq C\,(2r)^{\alpha p} \,[u]^p_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\, r^d \\ &\leq C r^{\alpha p + d}\, [u]^p_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\,, \end{aligned}$$

d.h. $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ mit $\lambda = \alpha p + d$, also $\alpha = \frac{\lambda-d}{p}$ und $\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \leq C\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$.

Sei nun $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$. Wähle $0 < r < R$, $x_0, x \in \overline{\Omega}$

$$\left|u_{B(x_0,R)} - u_{B(x_0,r)}\right|^p \leq 2^{p-1} \left(|u(x) - u_{B(x_0,R)}|^p + |u(x) - u_{B(x_0,r)}|^p\right).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
|u_{B(x_0,R)} - u_{B(x_0,r)}|^p &= \fint_{\Omega\cap B(x_0,r)} |u_{B(x_0,R)} - u_{B(x_0,r)}|^p \,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{2^{p-1}}{\delta r^d}\left(\int_{B(x_0,r)\cap\Omega} |u(x) - u_{B(x_0,R)}|^p + \int_{B(x_0,r)\cap\Omega} |u(x) - u_{B(x_0,r)}|^p\right) \\
&\overset{\text{Vor.}}{\leq} C_1 K \frac{R^\lambda}{r^d}.
\end{aligned}$$

Also

$$|u_{B(x_0,R)} - u_{B(x_0,r)}| \leq C_2 K^{\frac{1}{p}} \frac{R^{\frac{\lambda}{p}}}{r^{\frac{d}{p}}}. \tag{1.9}$$

Ziel ist nun, aus (1.9)

$$|u_{B(x_0,R)} - u\,(x_0)\,| \leq C' K^{\frac{1}{p}} R^{\frac{\lambda-d}{p}} \tag{1.10}$$

zu folgern und schließlich $u \in C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$ mit $\alpha = \frac{\lambda-d}{p}$ und geeigneter Abschätzung zu erhalten.

Wir zeigen nun, dass (1.9) die Gleichung (1.10) impliziert: Wir wählen eine Folge (R_k) mit $R_k = 2^{-k}R$. Dann folgt (mit $R := R_k$ und $r := R_{k+1}$)

$$|u_{B(x_0,R_k)} - u_{B(x_0,R_{k+1})}| \leq C_3 K^{\frac{1}{p}} 2^{k\left(\frac{d-\lambda}{p}\right)} R^{\frac{\lambda-d}{p}}.$$

Für $k < j$ folgt dann

$$|B_{(x_0,R_k)} - u_{B(x_0,R_j)}| \leq C_4 K^{\frac{1}{p}} \left(R_k\right)^{\frac{\lambda-d}{p}}.$$

Hieraus folgt nach $k \to \infty$, dass die Folge von Mittelwerten $\left(u_{B(x_0,R_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Zunächst könnte der Grenzwert von dem Startradius R abhängen. Aus (1.9) folgt aber auch durch Wahl von (r_k) über $r_k = 2^{-k}r$ und (R_k) wie eben

$$|u_{B(x_0,R_k)} - u_{B(x_0,r_K)}| \leq C_5 K^{\frac{1}{p}} \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{\lambda}{p}} \left(r_k\right)^{\frac{\lambda-d}{p}} \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Damit ist der Grenzwert der Cauchyfolge $\left(u_{B(x_0,R_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhägig von $R > 0$. Somit folgt, da $u_{B(x,r)} \to u(x)$ in L^1, Behauptung (1.10) aus (1.9),

Wir zeigen nun $u \in C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$: Seien $x, y \in \Omega$. Setze $R = |x-y|$. Dann folgt

$$|u(x) - u(y)| \leq |u_{B(x,2R)} - u(x)| + |u_{B(x,2R)} - u_{B(y,2R)}| + |u_{B(y,2R)} - u(y)|.$$

Es gilt

$$|u_{B(x,2R)} - u_{B(y,2R)}| \leq |u_{B(x,2R)} - u(z)| + |u(z) - u_{B(y,2R)}|$$

und

$$\begin{aligned} |u_{B(x,2R)} - u_{B(y,2R)}| &\leq \fint_{B(x,2R)\cap B(y,2R)\cap\Omega} (\dots) \\ &\overset{\text{äuß. Reg.}}{\underset{\text{\& Vor.}}{\leq}} C_7 K^{\frac{1}{p}} R^{\frac{\lambda-d}{p}} \end{aligned}$$

□

Bemerkung. *In Kurzform besagt der Satz also*

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \cong C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$$

mit $\alpha = \frac{\lambda-d}{p}$ *und* $d < \lambda < d+p$.

1.4 Anwendung der Theorie Morrey und Campanato

1.13 Lemma (Caccioppoli-Ungleichung)**.** *Seien* $0 < \lambda < \Lambda$ *und* $a_{ij}\colon B(1) \to \mathbb{R}$ *für* $i, j \in \{1, \dots, d\}$ *mit*

$$\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2 \quad \textit{für alle } x \in B(1), \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Sei $u \in H^1(B(1))$ *eine Lösung von* $\partial_i(a_{ij}\,\partial_j u) = 0$ *in* $B(1)$ *im schwachen Sinne. Dann gilt für jede Funktion* $\eta \in C_c^1(B(1))$

$$\int_{B(1)} \eta^2|\nabla u|^2 \leq c\int_{B(1)} |\nabla\eta|^2 u^2, \tag{1.11}$$

wobei $c = c(\lambda, \Lambda, d) > 0$. *Insbesondere gilt für* $0 \leq r < R$ *und alle* $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{B(r)} |\nabla u|^2 \leq \frac{c}{(R-r)^2}\int_{B(R)\setminus B(r)} (u-a)^2. \tag{1.12}$$

Beweis. Dass u schwache Lösung in $B(1)$ ist, bedeutet

$$\int_{B(1)} a_{ij}\,\partial_i u\,\partial_j\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(B(1)).$$

Wähle $\varphi = \eta^2 u$ für ein $\eta \in C_c^1(B(1))$. Dann erhalten wir

$$\int_{B(1)} a_{ij}\, \partial_i u \left(2\eta\, \partial_j \eta \cdot u + \eta^2\, \partial_j u\right) = 0$$

und somit gilt

$$\begin{aligned} \lambda \int_{B(1)} \eta^2 |\nabla u|^2 &\leq 2 \int_{B(1)} |a_{ij}||\partial_i u||\eta||\partial_j \eta||u| \\ &\leq \frac{\lambda}{2} \int_{B(1)} \eta^2 |\nabla u|^2 + c(\lambda, \Lambda, d) \int_{B(1)} |\nabla \eta|^2 u^2. \end{aligned}$$

Anstelle von $\varphi = \eta^2 u$ kann man auch $\varphi = \eta^2 (u-a)$ wählen und erhält rechts $\int_{B(1)} |\nabla \eta|^2 (u-a)^2$. Wähle nun $\eta \in C_c^1(B(1))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B(r)$, $\eta = 0$ auf $B(1) \setminus B(R)$ und $|\nabla \eta| \leq \frac{4}{R-r}$.

□

1.14 Folgerung. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 1.13 gibt es $\theta = \theta(d, \lambda, \Lambda) \in (0,1)$ derart, dass für $r > 0$ gilt:*

$$\int_{B\left(\frac{r}{2}\right)} u^2 \leq \theta \quad \textit{und} \quad \int_{B\left(\frac{r}{2}\right)} |\nabla u|^2 \leq \theta \int_{B(r)} |\nabla u|^2. \tag{1.13}$$

Weiterhin gibt es $c = c(d, \lambda, \Lambda) \geq 1$ und $\mu = \mu(d, \lambda, \Lambda) \geq 1$ derart, dass für $0 < \varrho < r$ gilt:

$$\int_{B(\varrho)} u^2 \leq c \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{\mu} \int_{B(r)} u^2 \quad \textit{und} \quad \int_{B\left(\frac{\varrho}{2}\right)} |\nabla u|^2 \leq c \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{\mu} \int_{B(r)} |\nabla u|^2. \tag{1.14}$$

Der Beweis dieses Satzes ist eine Übung. (Anwenden der Caccioppoli-Ungleichung und der Poincaré-Ungleichung.)

Bemerkung.

- *(1.13) bedeutet, dass die L^2-Normen von u bzw. ∇u in kontrollierter Art und Weise fallen bzw. wachsen auf Kugeln mit variablem Radius.*
- *Außer der Nullfunktion gibt es also keine harmonische Funktionen bzw. Lösungen von*

  $$\partial_i (a_{ij} \partial_j u) = 0 \quad \textit{in } \mathbb{R}^d$$

  mit $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, denn: Sei $A = \|u\|_{L^2(B(1))}$, so folgt $\|u\|_{L^2(B(2))} \geq \frac{A}{\theta}$ und somit $\|u\|_{L^2(B(2^k))} \geq \frac{A}{\theta^k}$. Also kann nicht $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ gelten.
- *Jede harmonische Funktion (bzw. Lösung von $\partial_j (a_{ij} \partial_j u) = 0$ in $\mathbb{R}^d$ mit $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^d)$) ist zwangsläufig konstant.*

- *(1.14) folgt unmittelbar aus (1.13), liefert allerdings nicht den optimalen bzw. für doe weotere Theorie notwendigen Exponenten μ. Man kann auch $\mu = d$ beweisen, falls die Koeffizienten a_{ij} konstant sind.*

1.15 Proposition. *Seien (a_{ij}) eine (konstante) Matrix und $0 < \lambda < \Lambda$ mit*

$$\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Sei $u \in H^1_{loc}(B(1))$ eine Lösung von

$$a_{ij}\partial_i\partial_j u = \partial_i(a_{ij}\partial_j u) = 0 \quad \text{in } B(1)$$

im schwachen Sinne (und damit unmittelbar auch im klassischen Sinne). Dann gilt für $0 < \varrho \leq r$

$$\int_{B(\varrho)} u^2 \leq c\left(\frac{\varrho}{r}\right)^d \int_{B(r)} u^2,$$

$$\int_{B(\varrho)} |u - u_{B(\varrho)}|^2 \leq c\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{d+2} \int_{B(r)} \left(u - u_{B(r)}\right)^2$$

mit einer Konstanten $c = c(d, \lambda, \Lambda) \geq 1$.

Bemerkung. *Da mit u auch jede Ableitung von u eine Lösung ist, gelten die entsprechenden Aussagen auch für die Ableitungen. Beachte, dass $u \in C^\infty(B(1))$, da a_{ij} konstant aufgrund der bekannten Einbettungssätze.*

Beweis. Wir beweisen nur den Fall $r = 1$, $0 < \varrho \leq \frac{1}{2}$, da die anderen Fälle durch Skalierung bzw. Anpassen der Konstanten folgen. Wir beweisen zunächst

$$\sup_{B(\frac{1}{2})} |u| + \sup_{B(\frac{1}{2})} |\nabla u| \leq c\int_{B(1)} u^2. \tag{1.15}$$

Nach Lemma 1.13 gilt, falls $0 < r < R$,

$$\int_{B(r)} |\nabla u|^2 \leq \frac{c}{(R-r)^2}\int_{B(R)} u^2.$$

Da dies auch für alle Ableitungen gilt, können wir $\int_{B(r)} |D^\gamma u|^2$ nach Iteration durch $\int_{B(1)} |u|^2$ abschätzen für jede Ordnung $|\gamma| \in \mathbb{N}$. Also gilt für jede Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit einer Konstanten $c = c(m, \lambda, \Lambda)$

$$\|u\|_{H^m(B(\frac{1}{2}))} \leq c\|u\|_{L^2(B(1))}.$$

Wähle nun m in Abhängigkeit von d groß genug, sodass gilt:

$$H^m\left(B\left(\frac{1}{2}\right)\right) \hookrightarrow C^1\left(\overline{B\left(\frac{1}{2}\right)}\right).$$

Aus (1.15) folgt nun

$$\int_{B(\varrho)} u^2 \le c\varrho^d \sup_{B(\varrho)} u^2 \le c\varrho^d \int_{B(1)} u^2$$

und

$$\begin{aligned}\int_{B(\varrho)} \left(u - u_{B(\varrho)}\right)^2 &\le \int_{B(\varrho)} (u(x) - u(0))^2 \ \mathrm{d}x \le c\varrho^{d+2} \sup_{B(\varrho)} |\nabla u| \\ &\le c\varrho^{d+2} \int_{B(1)} u^2.\end{aligned}$$

Ersetzen von u durch $u - u_{B(1)}$ liefert die gewünschte Aussage.

$\square$

1.16 Folgerung. *Da mit u auch alle Ableitungen $\partial_j u$ die Gleichung lösen, folgt unmittelbar*

$$\int_{B(\varrho)} |\nabla u|^2 \le c\left(\frac{\varrho}{r}\right)^d \int_{B(r)} |\nabla u|^2, \tag{1.16}$$

sowie

$$\int_{B(\varrho)} \left|\nabla u - (\nabla u)_{B(\varrho)}\right|^2 \le c\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{d+2} \int_{B(r)} \left|\nabla u - (\nabla u)_{B(r)}\right|^2. \tag{1.17}$$

1.17 Folgerung. *Sei (a_{ij}) eine positiv definite Matrix wie in 1.15. Sei $w \in H^1(B(x_0, r))$ eine Lösung von*

$$a_{ij}\partial_i\partial_j u = \partial_i\left(a_{ij}\partial_j u\right) = 0$$

im schwachen (und damit sofort im klassischen) Sinne. Sei $u \in H^1(B(x_0, r))$ beliebig. Dann gilt für $0 < \varrho < r$

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 \le c\left(\left(\frac{\varrho}{r}\right)^d \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 + \int_{B(x_0,r)} |\nabla(u-w)|^2\right)$$

und

$$\int_{B(x_0,\varrho)} \left|\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,\varrho)}\right|^2 \le c\left(\left(\frac{\varrho}{d}\right)^{d+2} \int_{B(x_0,r)} \left|\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,r)}\right|^2 + \int_{B(x_0,r)} \left|\nabla(u-w)^2\right|\right)$$

Beweis. Setze $v = u - w$, dann

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,\varrho)} |\nabla u|^2 &\leq 2\int_{B(x_0,\varrho)} |\nabla w|^2 + 2\int_{B(x_0,\varrho)} |\nabla v|^2 \\
&\overset{1.16}{\leq} c_1 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^d \int_{B(x_0,r)} |\nabla w|^2 + 2\int_{B(x_0,\varrho)} |\nabla v|^2 \\
&\leq 2c_1 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^d \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 + \left(2c_1\left(\frac{\varrho}{r}\right)^d + 2\right) \int_{B(x_0,r)} |\nabla v|^2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,\varrho)} \left|\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,\varrho)}\right|^2 &\leq 2\int_{B(x_0,\varrho)} \left|\nabla u - (\nabla w)_{B(x_0,\varrho)}\right|^2 \\
&\quad +2\int_{B(x_0,\varrho)} |\underbrace{(\nabla u)_{B(x_0,\varrho)} - (\nabla w)_{B(x_0,\varrho)}}_{f(\nabla u - \nabla w)}|^2 \\
&\leq 2\int_{B(x_0,\varrho)} \left|\nabla u - (\nabla w)_{B(x_0,\varrho)}\right|^2 + 2\int_{B(x_0,\varrho)} |\nabla(u-w)|^2 \\
&\leq 4\int_{B(x_0,\varrho)} \left|\nabla w - (\nabla w)_{B(x_0,\varrho)}\right|^2 + 6\int_{B(x_0,\varrho)} |\nabla(u-w)|^2,
\end{aligned}$$

wobei hier das Ergebnis mit 1.16 und Rücksubstitution folgt.

□

1.18 Lemma. *Seien $\alpha, \beta, A, B \geq 0$ mit $\beta < \alpha$. Sei φ: $[0, R] \to [0, \infty)$ nichtfallend und es gelte*

$$\varphi(\varrho) \leq A\left(\left(\frac{\varrho}{r}\right)^\alpha + \varepsilon\right)\varphi(r) + Br^\beta$$

für $0 < \varrho \leq r \leq R$. Dann existieren für jedes $\gamma \in (0, \alpha)$ Konstanten $c = c(A, \alpha, \beta, \gamma)$ und $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(A, \alpha, \beta, \gamma)$ derart, dass für $\varepsilon < \varepsilon_0$ und $0 < \varrho \leq r \leq R$ folgt:

$$\varphi(\varrho) \leq c\left(\left(\frac{\varrho}{r}\right)^\gamma \varphi(r) + B\varrho^\beta\right).$$

Insbesondere (durch Vertauschung der Rollen $\varphi \leftrightarrow r$ und $r \leftrightarrow R$) gilt für $0 < r \leq R$

$$\varphi(r) \leq c\left(\left(\frac{r}{R}\right)^\gamma \varphi(R) + Br^\beta\right).$$

Beweis. Wir beweisen nur den Fall $\beta < \gamma < \alpha$, $\gamma \leq \beta$ ist dann sowieso möglich. Wähle

$\tau \in (0,1)$ mit $2A\tau^\alpha = \tau^\gamma$ und $\varepsilon_0 < \tau^\alpha$. Nach Voraussetzung gilt für $r < R$

$$\varphi(\tau r) \leq \underbrace{A\tau^\alpha \underbrace{\left(1 + \underbrace{\varepsilon\tau^{-\alpha}}_{<1}\right)}_{<2}}_{\leq \tau^\gamma} \varphi(r) + Br^\beta,$$

also

$$\varphi(\tau r) \leq \tau^\gamma \varphi(r) + Br^\beta. \tag{1.18}$$

Also gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \varphi\left(\tau^{k+1} r\right) &\leq \tau^\gamma \varphi\left(\tau^k r\right) + B\tau^{k\beta} r^\beta \qquad \left(r \leftrightarrow \tau^k r\right) \\ &\leq \tau^{(k+1)\gamma} \varphi(r) + Br^\beta \tau^{k\beta} \sum_{j=0}^{k} \tau^{j(\gamma-\beta)} \\ &= \tau^{(k+1)\gamma} \varphi(r) + Br^\beta \tau^{k\beta} \frac{\tau^{(\gamma-\beta)^{k+1}} - 1}{\tau^{\gamma-\beta} - 1} \\ &\leq \tau^{(k+1)\gamma} \varphi(r) + \frac{B\tau^{k\beta} r^\beta}{1 - \tau^{\gamma-\beta}}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Wähle nun $k \in \mathbb{N}$ mit $\tau^{k+2} r < \varrho \leq \tau^{k+1} r$ und es folgt

$$\begin{aligned} \varphi(\varrho) &\leq \varphi\left(\tau^{k+1} r\right) \overset{(1.19)}{\leq} \tau^{-\gamma} \tau^{(k+2)\gamma} \varphi(r) + \frac{B\tau^{k\beta} r^\beta}{1 - \tau^{\gamma-\beta}} \\ &\leq \tau^{-\gamma} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^\gamma \varphi(r) + \frac{B\varrho^\beta}{1 - \tau^{\gamma-\beta}}. \end{aligned}$$

□

1.19 Satz. *Seien $a_{ij} \in C(B(1))$ mit*

$$\lambda |\xi|^2 \leq a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$, $x \in B(1)$. Es gebe eine nichtfallende Funktion $\omega\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $\lim_{t \searrow 0} \omega(t) = w(0) = 0$ und

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \omega(|x-y|) \quad \text{für alle } x, y \in B(1) \text{ und } i,j = 1, \ldots, d.$$

Seien $c \in L^d(B(1))$ und $f \in L^q(B(1))$ mit $q > \frac{d}{2}$. Sei $u \in H^1(B(1))$ eine Lösung von

$$-\partial_i (a_{ij}\, \partial_j u) + cu = f \quad \textit{in } B(1).$$

Dann gilt $u \in C^\alpha(B(1))$ mit $\alpha = 2 - \frac{d}{q} > 0$. Genauer: Es gibt $R_0 = R_0\left(\lambda, \Lambda, \omega, \|c\|_{L^d(B(1))}\right)$ derart, dass für alle $x_0 \in B\left(\frac{1}{2}\right)$ und $0 < r < R_0$ gilt:

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 \leq c r^{d-2+2\alpha} \left(\|f\|^2_{L^q(B(1))} + \|u\|^2_{H^1(B(1))}\right).$$

Beweis. O.B.d.A. sei $\frac{d}{2} < q$. Sei $x_0 \in B(1)$ und $r \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Wir betrachten eine Hilfsfunktion w in $B(x_0, r)$. Sei $w \in H^1(B(x_0, r))$ Lösung von

$$\begin{aligned} -\partial_i (a_{ij}(x_0)\, \partial_j w) &= 0 \quad \text{in } B(x_0, r), \\ w &= u \quad \text{auf } \partial B(x_0, r), \end{aligned}$$

d.h. $w - u \in H^1_0(B(x_0, r))$ und

$$\int_{B(x_0,r)} a_{ij}(x_0)\, \partial_j w\, \partial_i \varphi = 0 \quad \forall\, \varphi \in H^1_0(B(x_0, r)).$$

Eine solche Lösung existiert und ist eindeutig mithilfe des Lemmas von Lax-Milgram. Beachte, dass u folgende „künstliche" Gleichung erfüllt:

$$-\partial_i (a_{ij}(x_0)\, \partial_j u) = f - cu - \partial_i ((a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x))\, \partial_j u).$$

Daher erfüllt $v = u - w$ die Gleichung

$$-\partial_i (a_{ij}(x_0)\, \partial_j v) = f - cu - \partial_i ((a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x))\, \partial_j u)$$

im schwachen Sinne. Wähle als Testfunktion in der schwachen Formulierung

$$\varphi = v \in H^1_0(B(x_0, r)).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \lambda \int_{B(x_0,r)} |\nabla v|^2 \leq& \int_{B(x_0,r)} |f||v| \\ &+ \int_{B(x_0,r)} |c||u||v| + c_1(d) \max_{i,j=1,\dots,d} \int_{B(x_0,r)} |a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)|\,|\nabla u||\nabla v| \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,r)} |f||v| &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{B(x_0,r)} |f|^{\frac{2d}{d+2}}\right)^{\frac{d+2}{2d}} \left(\int_{B(x_0,r)} |v|^{\frac{2d}{d+2}}\right)^{\frac{d+2}{2d}} \\
&\overset{\text{Poincaré}}{\leq} \left(\int_{B(x_0,r)} |f|^{\frac{2d}{d+2}}\right)^{\frac{d+2}{2d}} c_2(d) \left(\int_{B(x_0,r)} |\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_3(d,\lambda) \left(\int_{B(x_0,r)} |f|^{\frac{2d}{d+2}}\right)^{\frac{d+2}{2d}} + \frac{\lambda}{4}\int_{B(x_0,r)} |\nabla v|^2.
\end{aligned}$$

Des Weiteren gilt wegen $\left(\frac{q(d+2)}{2d}\right)' = \frac{q(d+2)}{q(d+2)-2d}$

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B(x_0,r)} |f|^{\frac{2d}{d+2}} \cdot 1\right)^{\frac{d+2}{2d}} &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{B(x_0,r)} |f|^q\right)^{\frac{2}{q}} \cdot |B(x_0,r)|^{\frac{d+2}{d}\cdot\frac{qd+2q-2d}{d+2}} \\
&\leq c_4 \|f\|^2_{L^q(B(1))} \cdot r^{\left(d+2-2\frac{d}{q}\right)} \\
&= c_4 \|f\|^2_{L^q(B(1))} \cdot r^{d-2+2\left(2-\frac{d}{q}\right)}.
\end{aligned}$$

Zur Behandlung des Terms $\int_{B(x_0,r)} |c||u||v|$ verwendet man wieder die Höldersche Ungleichung mit $\frac{d}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{2d}{d-2}$ (es gilt offensichtlich $\frac{1}{d}+\frac{1}{2}+\frac{d-2}{2d}=1$) sowie den Satz von Poincaré und die Youngsche Ungleichung. Wir betrachten im Folgenden nur den Fall $c \equiv 0$, da das Erzielen von $r^{d-2+2\alpha}$ im allgemeinen Fall recht kompliziert ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
&c_1(d) \max_{i,j=1,\dots,d} \int_{B(x_0,r)} |a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)||\nabla u||\nabla v| \\
&\qquad \leq c_1(d)\,\omega(r) \int_{B(x_0,r)} |\nabla u||\nabla v| \\
&\qquad\qquad \leq c_5(d)\,\omega^2(r) \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{4}\int_{B(x_0,r)} |\nabla v|^2.
\end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla v|^2 \leq c_6(\lambda,\Lambda,d) \cdot \left(\omega^2(r) \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 + r^{d-2+2\alpha} \|f\|^2_{L^q(B(1))}\right).$$

Mit Korollar 1.17 folgt für $0 < \varrho \leq r$

$$\underbrace{\int_{B(x_0,\varrho)} |\nabla u|^2}_{=\varphi(\varrho)} \leq c_7 \left(\underbrace{\left(\left(\frac{\varrho}{r}\right)^d + \omega^2(r) \right)}_{\overset{!}{=}\varepsilon} \underbrace{\int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2}_{=\varphi(r)} + \underbrace{r^{d-2+2\alpha}}_{=r^\beta} \underbrace{\|f\|^2_{L^q(B(1))}}_{=B} \right).$$

Wir wollen nun Lemma 1.18 anwenden. Sei $\varphi(\varrho) = \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2$, $\beta = d - 2 + 2\alpha$ (wobei an dieser Stelle α *nicht* desjenige aus Lemma 1.18 ist). Sei ε_0 wie durch Lemma 1.18 gegeben. Da $\lim_{t \searrow 0} \omega(t) = \omega(0) = 0$, existiert $R_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ mit

$$\omega(r) \leq \varepsilon_0 \quad \text{für alle } r \in (0, R_0)\,.$$

Fixiere ein solches R_0. Dann folgt mit Lemma 1.18

$$\int_{B(x_0,\varrho)} |\nabla u|^2 \leq c_8 \left(\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{d-2+2\alpha} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 + \varrho^{d-2+2\alpha} \|f\|^2_{L^q(B(1))} \right)$$

und insbesondere für $\varrho < R_0$

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 \leq c_9 \varrho^{d-2+2\alpha} \left(\int_{B(1)} |\nabla u|^2 + \|f\|^2_{L^q(B(1))} \right).$$

□

Wir zeigen nun, dass Lösungen von elliptischen Differentialgleichungen in Divergenzform mit hölderstetigen Koeffizienten hölderstetige Gradienten besitzen, also $\nabla u \in C^\alpha$ bzw. $u \in C^{1,\alpha}$ erfüllen. Man darf aber keine Wunder erwarten. Zum Beispiel gibt es $f \in C\left(\overline{B}\right)$ deart, dass die eindeutige Lösung von $\partial_i\left(a_{ij}\,\partial_j u\right) = f$ in B (im schwachen Sinne) zwar $u \in C^{1,\alpha}(B)$, aber *nicht* $u \in C^2(B)$ erfüllt.

1.20 Satz. *Seien $q > d$ und $\alpha = 1 - \frac{d}{q}$. Seien $a_{ij} \in C^\alpha(B(1))$ mit $\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$, $x \in B(1)$. Seien $c, f \in L^q(B(1))$ und sei $u \in H^1(B(1))$ eine Lösung von*

$$-\partial_i\left(a_{ij}\,\partial_j u\right) + cu = f \quad \textit{in } B(1)$$

im schwachen Sinne. Dann gilt $\nabla u \in C^\alpha(B(1))$. Genauer gilt: Es gibt Konstanten $R_0 = R_0\left(\lambda, \|a_{ij}\|_{C^\alpha}, \|c\|_{L^q}\right)$ und $c_0 = c_0\left(\lambda, \|a_{ij}\|_{C^\alpha}, \|c\|_{L^q}\right)$ derart, dass für alle $x_0 \in B\left(\frac{1}{2}\right)$

und $r \leq R_0$ gilt:

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,r)}|^2 \leq c_0 r^{d+2\alpha} \left(\|f\|^2_{L^q(B(1))} + \|u\|^2_{H^1(B(1))} \right),$$

d.h. $\nabla u \in \mathcal{L}^{2,\lambda}$ *mit* $\lambda = d + 2\alpha$.

Beweis. Seien $x_0 \in B(1)$ und $r \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Wie im Beweis von Satz 1.19 sei $w \in H^1(B(x_0,r))$ eine Hilfsfunktion, für welche $w - u \in H^1_0(B(x_0,r))$ und

$$\int_{B(x_0,r)} a_{ij}(x_0)\, \partial_j w\, \partial_i \varphi = 0 \quad \forall\, \varphi \in H^1_0(B(x_0,r))$$

gilt. Sei $v = u - w$, dann gilt für jedes $\varphi \in H^1_0(B(x_0,r))$

$$\int_{B(x_0,r)} a_{ij}(x_0)\, \partial_j v\, \partial_i \varphi = \int_{B(x_0,r)} (f\varphi - cu\varphi) + \int_{B(x_0,r)} (a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x))\, \partial_j u\, \partial_i \varphi.$$

Wähle $\varphi = v$. Mit Hilfe der Ungleichungen von Poincaré, Young und Hölder, sowie der gleichmäßigen positiven Definitheit von (a_{ij}), folgt

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,r)} |\nabla v|^2 \quad &\leq \quad c_1(\lambda, d) \Bigg(\omega^2(r) \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 + \cdots \\ &\qquad \cdots + \|c\|^2_{L^d(B(x_0,r))} \int_{B(x_0,r)} u^2 + \|f\|^2_{L^{\frac{2d}{d+2}}(B(x_0,r))} \Bigg). \end{aligned}$$

Die beiden Aussagen von Korollar 1.17 führen zu

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,\varrho)} |\nabla u|^2 \leq c_2 \Bigg(\left(\left(\frac{\varrho}{r}\right)^d + r^{2\alpha} \right) \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 + \cdots \\ \cdots + \|c\|^2_{L^d(B(x_0,r))} \int_{B(x_0,r)} u^2 + \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(B(x_0,r))} \Bigg), \quad \text{(A)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,\varrho)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,\varrho)}|^2 \leq c_2 \Bigg(\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{d+2} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,r)}|^2 + \cdots \\ \cdots + r^{2\alpha} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 + \|c\|^2_{L^d(B(x_0,r))} \int_{B(x_0,r)} u^2 + \|f\|^2_{L^{\frac{2d}{d+2}}(B(x_0,r))} \Bigg). \quad \text{(B)} \end{aligned}$$

Mit der Hölder Ungleichung folgt

$$\left(\int_{B(x_0,r)} |f|^{\frac{2d}{d+2}}\right)^{\frac{d+2}{d}} \leq c_3\|f\|^2_{L^q(B(x_0,r))} r^{d-2+2\left(2-\frac{d}{q}\right)} = c_3\|f\|_{L^q(B(x_0,r))} r^{d+2\alpha}$$

und

$$\|c\|^2_{L^d(B(x_0,r))} \leq c_3 r^{2\alpha}\|c\|^2_{L^q(B(x_0,r))}.$$

Wir betrachten (leider) nur den Fall $c \equiv 0$, d.h. es gelten nun für $x_0 \in B(1)$ und $0 < \varrho \leq r \leq \frac{1}{4}$

$$\int_{B(x_0,\varrho)} |\nabla u|^2 \leq c_2 \left(\left(\left(\frac{\varrho}{r}\right)^d + r^{2\alpha}\right) \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 + r^{d+2\alpha}[F]\right), \tag{A'}$$

$$\int_{B(x_0,\varrho)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,\varrho)}|^2 \leq c_2 \left(\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{d+2} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,r)}|^2 + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + r^{2\alpha} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 + r^{d+2\alpha}[F]\right). \tag{B'}$$

Hierbei bezeichnet $[F] = \|f\|^2_{L^q(B(1))}$. Wir werden Lemma 1.18 auf (A') an, müssen allerdings hierfür $r^{d+2\alpha}$ durch $r^{d-2\delta}$ für ein beliebiges $\delta > 0$ ersetzen. Es gibt demnach $r_1 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ derart, dass für $x_0 \in B\left(\frac{3}{4}\right)$ und $0 < r < r_1$ gilt:

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 \leq c_4 r^{d-2\delta}\left([F] + \|\nabla u\|^2_{L^2(B(1))}\right).$$

Dies in (B') eingesetzt ergibt für $0 < \varrho \leq r < r_1$

$$\int_{B(x_0,\varrho)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,\varrho)}|^2 \leq c_5 \left(\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{d+2} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,r)}|^2 + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + r^{2+2\alpha-2\delta}\left([F] + \|\nabla u\|^2_{L^2(B(1))}\right)\right).$$

Da $x_0 \in B\left(\frac{3}{4}\right)$ beliebig war, folgt wiederrum mit Lemma 1.18 für $0 < r < r_1$

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,r)}|^2 \leq c_6 r^{d+2(\alpha-\delta)}\left([F] + \|\nabla u\|^2_{L^2(B(1))}\right)$$

also, da damit $\nabla u \in \mathcal{L}^{2,\lambda}\left(B\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ mit $\lambda = d+2(\alpha-\delta)$ $\nabla u \in C^{\alpha-\delta}\left(B\left(\frac{3}{4}\right)\right)$. Insbesondere folgt

$$\sup_{B\left(\frac{3}{4}\right)} |\nabla u|^2 \leq c\Big([F] + \|\nabla u\|^2_{L^2(B(1))}\Big) .$$

Mit dieser Information (siehe den Problemterm $r^{2\alpha} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2$) folgt nun aus (B') für jedes $x_0 \in B\left(\frac{3}{4}\right)$, $0 < \varrho < r \leq r_1$,

$$\int_{B(x_0,\varrho)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,\varrho)}|^2 \leq c_7 \left(\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{d+2} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,r)}|^2 + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + r^{d+2\alpha}\Big([F] + \|\nabla u\|^2_{L^2(B(1))}\Big)\right) .$$

Lemma 1.18 liefert

$$\int_{B(x_0,\varrho)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,\varrho)}|^2 \leq c_8 \left(\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{d+2} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,r)} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \varrho^{d+2\alpha}\Big([F] + \|\nabla u\|^2_{L^2(B(1))}\Big)\right) .$$

Also gilt für $x_0 \in B\left(\frac{1}{2}\right)$ und $0 < r \leq r_1$

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,r)}|^2 \leq c_9 r^{d+2\alpha}\Big([F] + \|\nabla u\|^2_{L^2(B(1))}\Big) .$$

□

1.5 Gleichungen mit nur messbaren und beschränkten Koeffizienten a_{ij}

Wie bisher betrachten wir für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und Funktionen $a_{ij}\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $i, j = 1, \ldots, d$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und $c\colon \Omega \to \mathbb{R}$ den Differentialoperator

$$Lu = -\partial_i \left(a_{ij} \partial_j u\right) + cu.$$

Wir erinnern an folgende Definition:

1.21 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ heißt *Sublösung* (bzw. *Superlösung*) der Gleichung $Lu = f$, falls für alle $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ mit $\varphi \geq 0$

fast überall in Ω gilt:

$$\int_\Omega a_{ij}\partial_i u \partial_j \varphi + \int_\Omega cu\varphi \overset{(\geq)}{\leq} \int_\Omega f\varphi.$$

In diesem Fall schreibt man häufig $Lu \leq f$ (bzw. $Lu \geq f$).

1.22 Satz. *Sei $B(x_0,R) \subset \mathbb{R}^d$ eine Kugel mit Radius $R>0$. Seien $a_{ij}\colon B(x_0,R) \to \mathbb{R}^d$, $i,j = 1,\ldots,d$, mit*

$$\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2 \quad \textit{für alle } x \in B(x_0,R), \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Seien $q>d$ und $f,c \in L^{\frac{q}{2}}(B(x_0,R))$. Dann gilt mit einer positiven Kosntanten $c_0 = c_0\left(d,\lambda,\Lambda,q,\|c\|_{L^{\frac{q}{2}}(B(x_0,R))},\theta,p_0\right)$ für jedes $\theta \in (0,1)$ und $p_0 > 0$ und jede Sublösung $u \in H_0^1(B(x_0,R))$ der Gleichung $Lu = f$

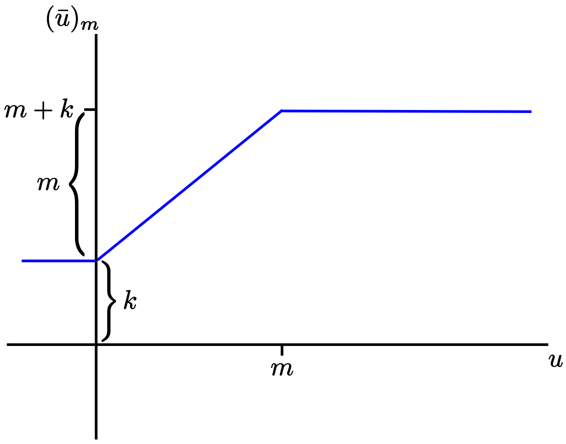
$$\sup_{B(x_0,\theta R)} u \leq c_0 \left[(1-\theta)^{-\frac{d}{p}} \left(\fint_{B(x_0,R)} |u^+(x)|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} + R^{2-\frac{2d}{q}}\|f\|_{L^{\frac{q}{2}}(B(x_0,R))}\right].$$

Bemerkung. *Man merkt sich den Satz am besten im einfachsten Fall: Setze dazu $c \equiv 0$, $f \equiv 0$, $\theta = \frac{1}{2}$, $p_0 = 2$, $R = 1$, $x_0 = 0$. Dann sagt dieser Satz in Kurzform: „Es gibt $c_0 = c_0(d,\lambda,\Lambda) > 0$ derart, dass für jede Funktion $u \in H^1(B(1))$ mit $Lu \leq 0$ in $B(1)$ gilt:*

$$\sup_{B\left(\frac{1}{2}\right)} u \leq c_0 \left(\fint_{B(1)} \left(u^+\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.\text{"}$$

Beweis (analog zu Han/Lin „Elliptic Partial Diff. Eq's", Theorem 4.1). O.B.d.A. können wir annehmen: $x_0 = 0$, $R = 1$. Wir beweisen hier nur den Fall $\theta = \frac{1}{2}$ und $p_0 = 2$. Der allgemeine Fall folgt dann mittels Verschiebung und Skalierung, siehe Projekt 4. Für $k>0$ und $m>0$, setze $\bar{u} = u^+ + k$ und

$$(\bar{u})_m = \begin{cases} \bar{u}, & \text{falls } u < m, \\ m+k, & \text{falls } u \geq m. \end{cases}$$



(Falls u beschränkt ist, so kann man anstelle von $(\bar{u})_m$ auch $\bar{u}$ betrachten.) Es gilt $\nabla(\bar{u})_m = 0$ auf $\{u < 0\} \cup \{u > m\}$. Immer gilt natürlich $(\bar{u})_m \leq \bar{u}$. Seien $\tau \in C_0^1(B(1))$ und $p \geq 0$. Wähle als Testfunktion $\varphi = \tau^2\left((\bar{u})_m^p \cdot \bar{u} - k^{p+1}\right)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\nabla\varphi &= 2\tau\nabla\tau\left((\bar{u})_m^p \cdot \bar{u} - k^{p+1}\right) + \tau^2\left(p(\bar{u})_m^{p-1}\nabla(\bar{u})_m \cdot \bar{u} + (\bar{u})_m^p \nabla u\right) \\
&= \tau^2(\bar{u})_m^p\left(p\nabla(\bar{u})_m + \nabla u\right) + 2\tau\nabla\tau\left((\bar{u})_m^p \cdot u - k^{p+1}\right).
\end{aligned}$$

Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\int a_{ij}\partial_j u \partial_i \varphi &= \int a_{ij}\partial_j \bar{u}\left(p\partial_i(\bar{u})_m + \partial_i \bar{u}\right)\tau^2(\bar{u})_m^p + \cdots \\
&\quad \cdots + 2\int a_{ij}\partial_j\bar{u}\partial_i\tau\left((\bar{u})_m^p\bar{u} - k^{p+1}\right)\tau \\
&\geq \lambda p\int \tau^2(\bar{u})_m^p|\nabla(\bar{u})_m|^2 + \lambda\int\tau^2(\bar{u})_m^p|\nabla\bar{u}|^2 - \cdots \\
&\quad \cdots - c_1(d,\Lambda)\int|\nabla\bar{u}||\nabla\tau|(\bar{u})_m^p\,\bar{u}\cdot\tau.
\end{aligned}$$

Es folgt nun aus $Lu \leq f$

$$\begin{aligned}
p\int\tau^2(\bar{u})_m^p|\nabla(\bar{u})_m|^2 + \int\tau^2(\bar{u})_m^p|\nabla\bar{u}|^2 \leq c_2(d,\lambda)\Big\{\int|\nabla\tau|^2(\bar{u})_m^p(\bar{u})^2 + \cdots \\
\cdots + \int|c|\tau^2(\bar{u})_m^p(\bar{u})^2 + |f|\tau^2(\bar{u})_m^p\,\bar{u}\Big\}. \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

Es gilt

$$|f| = \frac{|f|}{\bar{u}}\cdot\bar{u} \leq \frac{|f|}{R}\bar{u}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\int\left(|c|\tau^2\left(\bar u\right)_m^p\left(\bar u\right)^2+|f|\tau^2\left(\bar u\right)_m^p\bar u\right) &\le \int\left(|c|+\frac{|f|}{k}\right)\tau^2\left(\bar u\right)_m^p\left(\bar u\right)^2\\ &= \int|\tilde d|\tau^2\left(\bar u\right)_m^p\left(\bar u\right)^2,\end{aligned}$$

wobei $\tilde d(x)=|c(x)|+\frac{|f(x)|}{k}$. Wir wissen, dass $\|\tilde d\|_{L^{\frac q2}(B(1))}\le\|c\|_{L^{\frac d2}(B(1))}+1$, falls $k=\|f\|_{L^{\frac q2}(B(1))}$ und wählen k ebenso. Wir setzen $w(x)=\left(\bar u\right)_m^{\frac p2}\cdot\bar u$. Hieraus folgt mit der Produktregel

$$\begin{aligned}|\nabla w|^2 &= \left|\frac p2\left(\bar u\right)_m^{\frac{p-2}{2}}\cdot\nabla\left(\bar u\right)_m\cdot\bar u+\left(\bar u\right)_m^{\frac p2}\cdot\nabla\bar u\right|^2\\ &\le (2+p)\left(p\left(\bar u\right)_m^p\cdot\left|\nabla\left(\bar u\right)_m\right|^2+\left(\bar u\right)_m^p|\nabla\bar u|^2\right).\end{aligned}$$

Aus (1.19) folgt

$$\int\tau^2|\nabla w|^2\le c_3\left((1+p)\int|\nabla\tau|^2\left(\bar u\right)_m^p\left(\bar u\right)^2+(1+p)\int\tau^2\tilde d\left(\bar u\right)_m^p\left(\bar u\right)^2\right)$$

und es gilt

$$\int\left|\nabla\left(\tau w\right)\right|^2\le c_4\left((1+p)\int|\nabla\tau|^2w^2+(1+p)\int\tau^2\tilde dw^2\right). \tag{1.21}$$

Wenn die Funktion $\tilde d$ beschränkt wäre, könnten wir den nächsten Schritt überspringen. Wegen $\left(\frac q2\right)'=\frac{q}{q-2}$ gilt mit der Hölderschen Ungleichung

$$\int\tau^2\tilde dw^2\le\left(\int\tilde d^{\frac q2}\right)^{\frac 2q}\left(\int\left(\tau w\right)^{\frac{2q}{q-2}}\right)^{\frac{q-2}{q}}=\|\tilde d\|_{L^{\frac q2}(B(1))}\|\tau w\|^2_{L^{\frac{2q}{q-2}}(B(1))}.$$

Wegen $q>d$ gilt $2<\frac{2q}{q-2}<\frac{2d}{q-2}$. Mit der üblichen Interpolation in L^p-Räumen folgt, dass eine Konstante $c_5\left(d,q\right)$ derart existiert, dass für alle $\varepsilon>0$ gilt:

$$\|\tau w\|^2_{L^{\frac{2q}{q-2}}(B(1))}\le\varepsilon\|\tau w\|^2_{L^{\frac{2d}{q-2}}(B(1))}+c_5\varepsilon^{\frac{-d}{q-d}}\|\tau w\|^2_{L^2(B(1))}.$$

Mit der Poincaré-Ungleichung schließt man

$$\|\tau w\|^2_{L^{\frac{2d}{d-2}}(B(1))}\le c_6\left(d,q\right)\left\|\nabla\left(\tau w\right)\right\|^2_{L^2(B(1))}.$$

Wähle nun $\varepsilon = \left((1+p)\,\|\tilde{d}\|_{L^{\frac{q}{2}}(B(1))} c_4 c_6\right)^{-1} \cdot \frac{1}{2}$. Aus (1.21) folgt damit

$$\int |\nabla(\tau w)|^2 \leq c_4\,(1+p) \int |\nabla \tau|^2 w^2 + c_7\left(c_4, c_5, c_6, \|\tilde{d}\|_{L^{\frac{q}{2}}}\right)(1+p)^{\frac{q}{q-d}} \int \tau^2 w^2$$

und es gilt

$$\int |\nabla(\tau w)|^2 \leq c_8\,(1+p)^\beta \int \left(|\nabla\tau|^2 + \tau^2\right) w^2 \quad \text{mit einem } \beta(d,q) > 0. \tag{1.22}$$

Setze

$$\kappa \begin{cases} = \frac{d}{d-2}, & \text{falls } d \geq 3, \\ > 2, & \text{falls } d = 2. \end{cases}$$

Aus (1.22) folgt mit Hilfe der Einbettung

$$\left(\int |\tau w|^{2\kappa}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \leq c_9\,(1+p)^\beta \int \left(|\nabla\tau|^2 + \tau^2\right) w^2.$$

Erst jetzt wählen wir τ. Es gelte $0 < r_1 < r_0 < 1$ und sei $\tau \in C_0^1(B(r_0))$ mit $\tau \equiv 1$ auf $B(r_1)$ und $|\nabla\tau| \leq \frac{2}{r_0 - r_1}$. Mit dieser Setzung folgt

$$\left(\int_{B(r_1)} |w|^{2\kappa}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \leq c_{10} \frac{(1+p)^\beta}{(r_0 - r_1)^2} \int_{B(r_0)} w^2. \tag{1.23}$$

Wir erinnern uns an $w = \underbrace{(\bar{u})_m^{\frac{p}{2}} \cdot \bar{u}}_{\geq (\bar{u})_m^{\frac{p+2}{2}} \text{ bzw. } \leq \bar{u}^{\frac{p+2}{2}}}$. Setze $\gamma = p + 2$. Es folgt

$$\left(\int_{B(r_1)} (\bar{u})_m^{\gamma\kappa}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \leq c_{10} \frac{(1+p)^\beta}{(r_0 - r_1)^2} \left(\int_{B(r_0)} \bar{u}^\gamma\right).$$

Falls $\|\bar{u}\|_{L^\gamma(B(r_0))} < \infty$, so folgt durch $m \to \infty$

$$\|\bar{u}\|_{L^{\gamma\kappa}(B(r_1))} \leq \left(c_{10} \frac{(1+p)^\beta}{(r_0 - r_1)^2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \|\bar{u}\|_{L^\gamma(B(r_0))}. \tag{1.24}$$

Wir wenden nun (1.24) hintereinander auf verschiedene Radien und Exponenten an. Es sei für $i \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\gamma_i &= 2 \cdot \kappa^i \quad \text{mit } \gamma_0 = 2, \\
r_i &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{i+1}} \quad \text{mit } r_0 = 1, \\
(r_{i-1} - r_i)^{-2} &= \left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+1}} \right)^{-2} = 4 \cdot 4^i.
\end{aligned}$$

(1.24) impliziert nun für alle i

$$\|\bar{u}\|_{L^{\gamma_i}(B(r_i))} \leq c_{11}^{\frac{i}{\kappa^i}} \|\bar{u}\|_{L^{\gamma_{i-1}}(B(r_{i-1}))}.$$

Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|\bar{u}\|_{L^{\gamma_n}(B(r_n))} \leq c_{11}^{\sum_{i=1}^n \frac{i}{\kappa^i}} \|\bar{u}\|_{L^2(B(1))}$$

und es folgt, da $\|v\|_{L^p(B)} \xrightarrow{p \to \infty} \sup_B |v|$ für beschränkte Gebiete B,

$$\sup_{B(\frac{1}{2})} \bar{u} \leq c_{12} \|\bar{u}\|_{L^2(B(1))}$$

und

$$\sup_{B(\frac{1}{2})} u^+ \leq c_{12} \left(\|u^+\|_{L^2(B(1))} + \|f\|_{L^{\frac{q}{2}}(B(1))} \right).$$

$\square$

1.23 Satz. *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 1.22. Dann gilt mit einer positiven Konstanten $c_0 = c_0 \left(d, \lambda, \Lambda, q, \|c\|_{L^{\frac{q}{2}}(B(x_0,R))}, \theta, p_0 \right)$ für jedes $\theta \in (0,1)$ und $p_0 > 0$ und jede Superlösung $u \in H^1(B(x_0,R))$ der Gleichung $Lu = f$ mit $u \geq \varepsilon > 0$*

$$\inf_{B(x_0,\theta R)} u + R^{2-\frac{2d}{q}} \|f\|_{L^{\frac{q}{2}}(B(x_0,R))} \geq c_0 \left(\fint_{B(x_0,R)} u^{-p_0} \right)^{-\frac{1}{p_0}}.$$

Bemerkung. *Die Aussage ist unabhängig von $\varepsilon > 0$.*

Bemerkung. *Im Fall $f = 0$ würde man für Lösungen*

$$\sup_{B(x_0,\theta R)} u \leq c_1 \inf_{B(x_0,\theta R)} u$$

folgern können, vorausgesetzt man hätte die Voraussetzung

$$\left(\fint_{B(x_0,R)} u^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} \leq c\left(\fint_{B(x_0,R)} u^{-p_0}\right)^{-\frac{1}{p_0}}$$

zur Verfügung.

Beweis von Satz 1.23. Im allgemeinen Fall beweist man den Satz analog dem Beweis von Satz 1.22 mit dem einzig Unterschied, dass man negative statt positive Exponenten verwendet und nicht abschneidet, d.h. man beweist den Basisschritt mit Testfunktionen der Form

$$\varphi = \tau^2 \bar{u}^{-(p+1)} \quad \text{mit } p > 0, \bar{u} = u + k, k = \|f\|_{L^{\frac{q}{2}}(B(x_0,R))}.$$

Der Spezialfall $c = 0$ folgt leicht aus Satz 1.22: O.B.d.A. sei $x_0 = 0$, $R = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$. Nach Voraussetzung gilt für alle $\varphi \in H_0^1(B(1))$ mit $\varphi \geq 0$

$$\int a_{ij}\partial_i u \partial_j \varphi \geq \int f\varphi.$$

Sei $\tilde{\varphi} \in C_c^\infty(B(1))$ mit $\tilde{\varphi} \geq 0$ beliebig, aber fixiert. Wähle $\varphi = (\bar{u})^{-2}\tilde{\varphi}$, wobei $\bar{u} = u + k$ und $k = \|f\|_{L^{\frac{q}{2}}(B(1))}$. Sei weiter $\tilde{f} = \frac{f}{\bar{u}}$ und $v = \frac{1}{\bar{u}}$. Dann gilt

$$\int a_{ij}\partial_j u\,(-2)\,\bar{u}^{-3}\partial_i(\bar{u}) \cdot \tilde{\varphi} + \int a_{ij}\partial_j u\,(\bar{u})^{-2}\,\partial_i\tilde{\varphi} \quad \geq \quad \int f\,(\bar{u})^{-2}\,\tilde{\varphi}$$

und somit

$$\int a_{ij}\partial_j v \partial_i \tilde{\varphi} + \int \tilde{f} v \tilde{\varphi} \leq 0 \quad \forall\, \tilde{\varphi} \in H_0^1(B(1)). \tag{1.25}$$

Da $\tilde{\varphi} \in H_0^1(B(1))$, $\tilde{\varphi} \geq 0$, beliebig gewählt war, bedeutet (1.25) gerade, dass v eine Sublösung der Gleichung

$$-\partial_i(a_{ij}\partial_j v) + \tilde{f} v = 0$$

ist. Also folgt mit Satz 1.22 (beachte hierbei, dass $\|\tilde{f}\|_{L^{\frac{q}{2}}(B(1))} \leq 1$ ist)

$$\sup_{B(\theta)} (\bar{u})^{-1} = \sup_{B(\theta)} v \leq c_1 \left(\fint_{B(1)} \bar{u}^{-p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}}$$

und es folgt

$$\inf \bar{u} \geq c_2 \left(\fint_{B(1)} \bar{u}^{-p_0}\right)^{-\frac{1}{p_0}}.$$

$\square$

1.24 Lemma (Bombieri-Giusti, 1972). *Sei* $(U(r))_{\theta\leq r\leq 1}$ *eine nichtfallende Familie von offenen, zusammenhängenden Teilmengen des* $\mathbb{R}^d$*. Seien* m*,* c_0 *positive Konstanten,* $\theta \in \left[\frac{1}{2},1\right]$*,* $\eta \in (0,1)$ *und* $0 < p_0 \leq \infty$*. Sei* $w\colon U(1) \to (0,\infty)$ *messbar. Die Funktion* w *erfülle weiterhin:*

Für alle $r, R \in [\theta, 1]$ *mit* $r < R$ *und für alle* $p \in (0, \min\{1, \eta p_0\})$ *gilt:*

$$\|w\|_{L^{p_0}(U(r))} \leq \left(\frac{c_0}{(R-r)^m\,|U(1)|}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}} \|w\|_{L^p(U(R))} < \infty. \tag{BG1}$$

Des Weiteren gelte

$$\forall\ s > 0 \quad |U(1) \cap \{\log w > s\}| \leq \frac{c_0}{s}|U(1)|. \tag{BG2}$$

Dann existiert eine Konstante $C = C\left(\theta, m, c_0, p_0\right)$ *derart, dass*

$$\|w\|_{L^{p_0}(U(\theta))} \leq C|U(1)|^{\frac{1}{p_0}}.$$

Bemerkung.
- *Sei* u *Sublösung von* $Lu = f$ *in* $U(1)$*. Wähle* $p_0 = \infty$*. Dann gilt (BG1) nach Satz 1.22.*

Zunächst ein technisches Hilfsmittel:

1.25 Lemma. *Seien* $R > 0$ *und* $\omega, \sigma\colon (0,R) \to [0,\infty)$ *zwei nichtfallende Funktionen. Es gelte mit zwei Konstanten* $\gamma, \theta \in (0,1)$

$$\omega\left(\theta r\right) \leq \gamma\omega\left(r\right) + \sigma\left(r\right) \quad \textit{für } 0 < r \leq R.$$

Dann gibt es $c_0 = c_0\left(\theta, \gamma\right) > 0$ *derart, dass für jedes* $\mu \in (0,1)$ *und* $\alpha = (1-\mu)\frac{\ln(\gamma)}{\ln(\theta)} > 0$ *gilt:*

$$\omega\left(r\right) \leq c_0 \left(\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha} \omega\left(R\right) + \sigma\left(r^{\mu}R^{1-\mu}\right)\right) \quad \textit{für } 0 < r \leq R.$$

Bemerkung. *Man denke zunächst an den Fall* $\sigma \equiv 0$*, danach an* $\sigma(r) = r^{\beta}$ *für ein* $\beta > 0$*.*

Beweis. Sei $0 < s \leq R$. Dann gilt für $0 < r \leq s$

$$\begin{aligned}
\omega\left(\theta r\right) &\leq \gamma\omega\left(r\right) + \sigma\left(s\right), \\
\omega\left(\theta^2 r\right) &\leq \gamma\omega\left(\theta r\right) + \sigma\left(s\right) \leq \gamma^2\omega\left(r\right) + \gamma\sigma\left(s\right) + \sigma\left(s\right)
\end{aligned}$$

und entsprechend für $k \in \mathbb{N}$

$$\omega\left(\theta^k r\right) \le \gamma^k \omega(r) + \sigma(s) \sum_{i=0}^{k-1} \gamma^i \le \gamma^k \omega(r) + \frac{\sigma(s)}{1-\gamma}. \tag{1.26}$$

Gegeben $0 < s \le R$ und $0 < r \le s$, wähle nun $k = k(s, \theta) \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\theta^k s < r \le \theta^{k-1} s \qquad \left(\Rightarrow k > \frac{\ln\left(\frac{r}{s}\right)}{\ln(\theta)} \ge k-1\right). \tag{1.27}$$

Also gilt wegen (1.26) und (1.27)

$$\begin{aligned} \omega(r) &\le \omega\left(\theta^{k-1} s\right) \le \gamma^{k-1} \omega(R) + \frac{\sigma(s)}{1-\gamma} \\ &\le \frac{1}{\gamma} \underbrace{\gamma^{\left(\frac{\ln\left(\frac{r}{s}\right)}{\ln(\theta)}\right)}}_{=\left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{\ln(\gamma)}{\ln(\theta)}}} \omega(R) + \frac{\sigma(s)}{1-\gamma}. \end{aligned}$$

Betrachte $s = \left(\frac{r}{R}\right)^\mu R > r$. Dann folgt

$$\omega(r) \le \frac{1}{\gamma} \left(\frac{r}{R}\right)^{\left(\frac{\ln(\gamma)}{\ln(\theta)}\right)(1-\mu)} \omega(R) + \frac{\sigma\left(r^\mu R^{1-\mu}\right)}{1-\gamma}.$$

$\square$

1.26 Satz. *Unter den obigen Voraussetzungen gilt für jede Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von $Lu = f$ in Ω bereits $u \in C^\alpha(\Omega)$ für ein $\alpha \in (0,1)$. Genauer gilt: Es gibt $c_0 = c_0(d, q, \lambda, \Lambda) > 0$ derart, dass für jede Kugel $B(x_0, R) \subset \Omega$ und fast alle $x, y \in B\left(x_0, \frac{R}{2}\right)$ gilt:*

$$|u(x) - u(y)| \le c_0 \left(\frac{|x-y|}{R}\right)^\alpha \left[\left(⨍_{B(x_0,R)} u^2\right) + R^{2\left(1-\frac{d}{q}\right)} \|f\|_{L^{\frac{q}{2}}(B(x_0,R))}\right].$$

Bemerkung. *„$u \in C^\alpha(\Omega)$" bedeutet, dass $u \in H^1(\Omega)$ als Äquivalenzklasse ein Element aus $C^\alpha(\Omega)$ enthält, bzw. u nach Abänderung auf einer Nullmenge in $C^\alpha(\Omega)$ ist.*

Beweis. Wir beweisen (wie üblich) nur den Fall $R = 1$. Im Beweis schreiben wir $B(r)$ anstelle von $B(x_0, r)$ und $\|f\|$ anstelle von $\|f\|_{L^{\frac{q}{2}}(B(x_0,R))} = \|f\|_{L^{\frac{q}{2}}(B(1))}$. Setze für $0 < r \le 1$

$$M(r) = \sup_{B(r)} u, \quad m(r) = \inf_{B(r)} u, \quad \omega(r) = M(r) - m(r),$$

d.h. $\omega(r)$ ist die Oszillation der Funktion u auf $B(r)$. Wir wissen bereits, dass u^+ und $(-u)^+$ lokal beschränkt sind, also gilt

$$M(r) < \infty \quad \text{und} \quad m(r) > -\infty \quad \text{für } 0 < r \leq 1.$$

Ziel:

$$\omega(r) \leq c' r^\alpha = c_0 r^\alpha \left[\left(\fint_{B(1)} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|f\| \right].$$

Setze $\delta = 2\left(1 - \frac{d}{q}\right)$.

(A) Die Funktion $v_1(x) = M(r) - u$ ist nichtnegativ in $B(r)$ und erfüllt $Lv_1 = -f$ in $B(r)$.

Satz 1.25 (???) impliziert daher

$$\sup_{B\left(\frac{r}{2}\right)} (M(r) - u) \quad \leq \quad c_1 \left(\inf_{B\left(\frac{r}{2}\right)} (M(r) - u) + r^\delta \|f\| \right), \text{ d.h.}$$

$$M(r) - m\left(\frac{r}{2}\right) \leq c_1 \left(M(r) - M\left(\frac{r}{2}\right) + r^\delta \|f\| \right). \tag{1.28}$$

(B) Die Funktion $v_2(x) = u - m(r)$ ist nichtnegativ in $B(r)$ und erfüllt $Lv_2 = f$ in $B(r)$. Erneut impliziert Satz 1.25 (???)

$$M\left(\frac{r}{2}\right) - m(r) \leq c_1 \left(m\left(\frac{r}{2}\right) - m(r) + r^\delta \|f\| \right). \tag{1.29}$$

Addition von (1.28) und (1.29) liefert

$$\begin{aligned}
M(r) - m(r) + M\left(\frac{r}{2}\right) - m\left(\frac{r}{2}\right) &\leq c_1 \left(M(r) - m(r) - \left(M\left(\frac{r}{2}\right) - m\left(\frac{r}{2}\right) \right) + 2r^\delta \|f\| \right) \\
\Rightarrow \omega(r) + \omega\left(\frac{r}{2}\right) &\leq c_1 \left(\omega(r) - \omega\left(\frac{r}{2}\right) + 2r^\delta \|f\| \right) \\
\Rightarrow \omega\left(\frac{r}{2}\right)(c_1 + 1) &\leq \omega(r)(c_1 - 1) + 2c_1 r^\delta \|f\| \\
\Rightarrow \omega\left(\frac{r}{2}\right) &\leq \underbrace{\frac{c_1 - 1}{c_1 + 1}}_{=:\gamma} \omega(r) + \underbrace{c_2 r^\delta \|f\|_\infty}_{\sigma(r)}.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 1.25 folgt: Es gibt $\alpha \in (0, 1)$ derart, dass für $0 < \varrho < \frac{1}{2}$ gilt:

$$\omega(\varrho) \leq c_3 \varrho^\alpha \left(\omega\left(\frac{1}{2}\right) + \|f\| \right).$$

Beachte, dass mit Satz (???, Lokale Beschränktheit) gilt:

$$\omega\left(\frac{1}{2}\right) \leq c\left(\int_{B(1)} u^2 + \|f\|\right),$$

also folgt die Aussage.

$\square$

2 Maximumprinzipien

Im ganzen Kapitel sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, zusammenhängend und beschränkt.

Zur Erinnerung sei Satz 1.3 der PDE 1-Vorlesung wiederholt:

2.1 Satz (Starkes Maximumprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Sei $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Die Funktion u erfülle die Mittelwerteigenschaft in Ω. Dann ist die Funktion u konstant oder nimmt ihr Maximum auf $\partial\Omega$ an.*

Beweis. Sei $M = \max_{\overline{\Omega}} u$ und $A = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$. Wir zeigen, dass A abgeschlossen und offen in Ω ist, denn dann folgt $A \in \{\emptyset, \Omega\}$. A ist abgeschlosen nach Definition, da u stetig ist. Seien $x_0 \in A$ und $B(x_0, r) \Subset \Omega$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,r)} \underbrace{|M-u|}_{=v} &= \int_{B(x_0,r)} (M-u) = M|B(x_0,r)| - \fint_{B(x_0,r)} u \\ &\overset{\text{MWE}}{=} M|B(x_0,r)| - |B(x_0,r)|u(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass $u = M$ auf $B(x_0, r)$ und somit $B(x_0, r) \subset A$ gilt. Also ist A offen. $\square$

Im Allgemeinen steht die Mittelwerteigenschaft natürlich nicht zur Verfügung. Allerdings reicht die Harnack-Ungleichung für nichtnegative Lösungen aus, was man im obigen Beweis unmittelbar erkennt, setze $v = M - u \geq 0$.

2.2 Satz. *Seien $a_{ij} \colon \Omega \to \mathbb{R}$ für $i, j = 1, \ldots, d$ messbar und beschränkt. Die Matrix (a_{ij}) sei gleichmäßig positiv definit. Sei $u \in H^1(\Omega)$ und es gelte $-\partial_i(a_{ij}\partial_j u) \leq 0$ in Ω. Falls für eine Kugel $B \Subset \Omega$*

$$\sup_B u = \sup_\Omega u$$

gilt, so ist u bereits konstant.

Beweis. Harnack-Ungleichung aus Kapitel 1 und Methode wie im Beweis von Satz 2.1. $\square$

Wir nehmen in diesem Kapitel an, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und zusammenhängend ist. Wir betrachten Koeffizientenfunktionen a_{ij}, b_i, $c \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ für $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ und Differentialoperatoren der Form

$$Lu = \underbrace{-a_{ij} \overbrace{\partial_i \partial_j}^{\text{Hesse Matrix}} u}_{\text{Spur des Produktes}} + b_i \partial_i u + cu \quad \text{für } u \in C^2(\Omega).$$

Wir sagen, L sei *elliptisch*, falls die Matrix $(a_{ij}(x))_{ij}$ gleichmäßig bezüglich $x \in \overline{\Omega}$ positiv definit ist, d.h.

$$\exists\, \lambda > 0\ \forall\, x \in \overline{\Omega}\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d\colon \quad \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2.$$

2.3 Proposition. *Es gelte $c \geq 0$ in Ω. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$. Es gelte $Lu < 0$ in Ω. Falls das Maximum von u in $\overline{\Omega}$ nichtnegativ ist, so liegt es auf dem Rand $\partial\Omega$.*

Beweis. Wir nehmen an, $x_0 \in \Omega$ erfülle $u(x_0) \geq 0$ und $u(x_0) \geq u(x)$ für alle $x \in \Omega$. Dann gilt $\nabla u(x_0) = 0$ und $(\partial_i \partial_j u(x_0)) \leq 0$ (negativ semidefinit). Da wegen der positiven Definitheit $(a_{ij}(x_0)) > 0$ gilt, folgt

$$(a_{ij}(x_0))\,(\partial_i \partial_j u(x_0)) \leq 0$$

und

$$\mathrm{Spur}\left[(a_{ij}(x_0))\,(\partial_i \partial_j u(x_0))\right] \leq 0,$$

d.h. $\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x_0)\, \partial_i \partial_j u(x_0) \leq 0$. Es folgt

$$(Lu)(x_0) \geq 0$$

und somit ein Widerspruch.

$\square$

Bemerkung. *Im Fall $c \equiv 0$ kann auf die Annahme, dass das Maximum nichtnegativ ist, verzichtet werden.*

2.4 Satz (Schwaches Maximumprinzip). *Es gelte $c \geq 0$ in Ω. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$. Es gelte $Lu \leq 0$ in Ω. Falls das Maximum von u in $\overline{\Omega}$ nichtnegativ ist, so liegt es auf dem Rand $\partial\Omega$.*

Beweis. Seien $\varepsilon > 0$ und $\alpha > 0$. Sei $v(x) = u(x) + \varepsilon e^{\alpha x_1}$, dann folgt

$$Lv = Lu + \varepsilon e^{\alpha x_1} \left(-a_{11}\alpha^2 + b_1 \alpha + c \right).$$

Wähle $\alpha > 0$ groß genug, sodass

$$-a_{11}(x)\alpha^2 + b_1(x)\alpha + c(x) < 0 \quad \text{für jedes } x \in \Omega$$

gilt. Dies ist möglich, da $a_{11}(x) \geq \lambda > 0$ und b_1, c beschränkt sind. Also gilt für solches α und alle $\varepsilon > 0$

$$Lv < 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Proposition 2.3 impliziert nun

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\Omega} v \leq \sup_{\partial\Omega} v^+ \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + \varepsilon \sup_{x \in \partial\Omega} e^{\alpha x_1}.$$

Nach Grenzübergang $\varepsilon \searrow 0$ folgt die Aussage.

$\square$

Bemerkung. *Die Forderung $c \geq 0$ in Ω ist notwendig! Betrachte das Problem*

$$\begin{aligned} -\Delta u - 2u &= 0 \quad \textit{in } \Omega = \{(x,y) \mid 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}, \\ u &= 0 \quad \textit{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

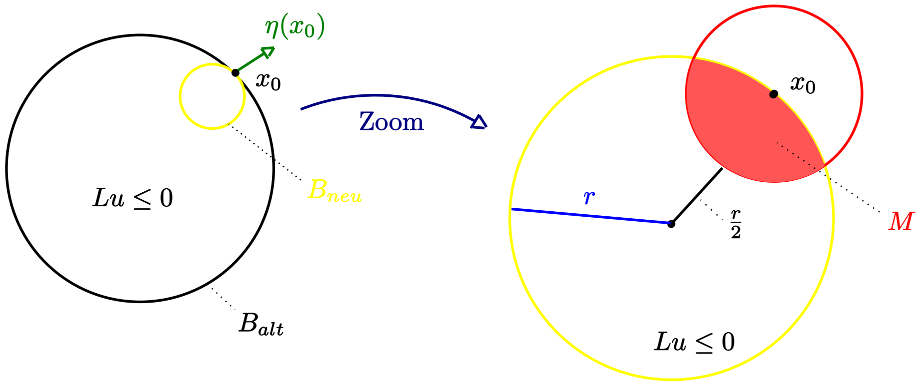
Die Funktion $u(x,y) = \sin(x)\sin(y)$ ist eine Lösung des obigen Dirichlet-Problems, nimmt aber ein Maximum in Ω an.

2.5 Proposition. *Seien $B \subset \mathbb{R}^d$ eine Kugel und $x_0 \in \partial B$. Es gelte $c \geq 0$ in B. Sei $u \in C^2(B) \cap C(B \cup \{x_0\})$. Es gelte $Lu \leq 0$ in B und $u(x_0) \geq 0$, $u(x) < u(x_0)$ für alle $x \in B$. Dann gilt für jeden Vektor ν mit $\langle \nu, \eta(x_0) \rangle > 0$*

$$\liminf_{t \to 0} \frac{u(x_0) - u(x_0 - t\nu)}{t} > 0,$$

wobei $\eta(x_0)$ die äußere Normale von B in x_0 ist.

Beweis. O.B.d.A. nehmen wir an: $B = B(0,r) = B(r)$ und $u \in C^2(B) \cap C\left(\overline{B}\right)$ und $u(x) < u(x_0)$ für alle $x \in \overline{B} \setminus \{x_0\}$. Sei $M = B \cap B\left(x_0, \frac{r}{2}\right)$.



Setze für $\alpha > 0$

$$h(x) = e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha r^2}$$

und für $\varepsilon > 0$

$$v\,(x) = u(x) + \varepsilon h(x).$$

Beachte, dass $u\,(x) \leq v\,(x)$ für alle $x \in \Omega$, $\alpha > 0$ und $\varepsilon > 0$ gilt.

(I) Wir zeigen durch Nachrechnen, dass für α genügend groß

$$Lh < 0 \quad \text{in } M$$

gilt. Hieraus folgt

$$Lv = Lu + \varepsilon Lh < 0 \quad \text{in } M \tag{2.1}$$

für alle $\varepsilon > 0$.

Beweis von (I).

$$Lh = e^{-\alpha|x|^2}\left\{-4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\,(x)\,x_i x_j + 2\alpha \sum_{i=1}^{d} a_{ii}\,(x) - 2\alpha \sum_{i=1}^{d} b_i\,(x)\,x_i + c\right\} - ce^{-\alpha r^2}.$$

□

Fixiere α, sodass (2.1) gilt.

(II) Wir zeigen nun, dass es ein $\varepsilon > 0$ derart gibt, dass die Funktion v ihr Maximum bezüglich $\overline{M}$ in x_0 annimmt.

Beweis von (II). Das Maximum kann nicht in M angenommen werden, da $Lv < 0$ in M gilt (schwaches Maximumprinzip, $v\,(x_0) = u\,(x_0) \geq 0$).

(i) $x \in \partial M \cap B$: Beachte $\max_{\partial M \cap \overline{B}} u(x) < u(x_0)$. Wähle $\delta > 0$ mit $u(x) < u(x_0) - \delta$ für alle $x \in \partial M \cap B$. Wähle $\varepsilon > 0$ genügend klein, sodass $\varepsilon h(x) < \delta$ für alle $x \in \partial M \cap B$ gilt. Es folgt

$$v(x) < u(x_0) = v(x_0) \quad \forall\, x \in \partial M \cap B. \tag{2.2}$$

(ii) $x \in \partial B \cap \overline{M}$, $h(x) = 0$.

$$v(x) = u(x) < u(x_0) = v(x_0) \quad \forall\, x \in \partial B \cap \overline{M}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass (2.2) gilt. Schritt (I) und (II) implizieren für alle $\nu \in \mathbb{R}^d$ mit $\langle \nu, \eta(x_0) \rangle > 0$ und $t \to 0$

$$\frac{v(x_0) - v(x_0 - t\nu)}{t} \geq 0$$

und es folgt

$$\liminf_{t \to 0} \frac{u(x_0) - u(x_0 - t\nu)}{t} \geq -\varepsilon \frac{\partial h}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

□

□

2.6 Satz (Starkes Maximumprinzip nach Hopf)**.** *Es gelte $c \geq 0$ in Ω. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Es gelte $Lu \leq 0$ in Ω. Falls u ein nichtnegatives Maximum in $\overline{\Omega}$ besitzt und dieses nicht am Rand annimmt, so ist u konstant.*

Beweis. Sei $M = \max_{\overline{\Omega}}(u^+)$ und $A = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$. Wir wollen zeigen, dass $A \in \{\emptyset, \Omega\}$. Wir nehmen an, dass $A \subsetneq \Omega$ gilt. Dann exisitert eine Kugel $B \subset \Omega \setminus A$ mit $\partial B \cap A \neq \emptyset$. Sei $x_0 \in \partial B \cap A$. Es gilt nach Voraussetzung $Lu \leq 0$ in B. Es gilt weiterhin

$$\begin{aligned} u(x) &< u(x_0) \quad \text{für alle } x \in B, \\ u(x_0) &= M \geq 0. \end{aligned}$$

Mit Proposition 2.5 folgt $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0$, da u stetig differenzierbar in einer Umgebung von x_0 ist. Hierbei beizeichnet η die äußere Normale von B in x_0. Es aber auch

$$\nabla u(x_0) = 0$$

gelten, denn $x_0 \in \Omega$. Dies ist ein Widerspruch zu $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0$!

$\square$

2.7 Folgerung (Vergleichssatz)**.** *Sei $c \geq 0$ in Ω. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ mit $Lu \leq 0$ in Ω und $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Dann folgt $u \leq 0$ in Ω. Genauer gilt: Es folgt $u < 0$ in Ω oder $u \equiv 0$ in $\overline{\Omega}$.*

2.8 Folgerung. *Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ mit $Lu \leq 0$ in Ω und $u \leq 0$ in Ω. Dann gilt $u < 0$ in Ω oder $u \equiv 0$ in $\overline{\Omega}$.*

Beweis. Sei $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = 0$. Für alle $x \in \Omega$ gilt

$$\tilde{L}u(x) = -a_{ij}(x)\,\partial_i\partial_j u(x_0) + b_i(x)\,\partial_i u(x) + \underbrace{c^+(x)}_{=\tilde{c}(x)}u(x) \leq c^-(x)\,u(x) \leq 0,$$

wobe $c = c^+ - c^-$. Mit Korollar 2.7 folgt die Behauptung.

$\square$

2.9 Satz. *Sei $\partial\Omega \in C^2$. Sei $w \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ mit $w > 0$ in $\overline{\Omega}$ und $Lw \geq 0$ in Ω. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ mit $Lu \leq 0$ in Ω. Dann gilt:*

1. *Die Funktion $\frac{u}{w}$ ist konstant oder nimmt in Ω kein nichtnegatives Maximum an.*
2. *Falls $\frac{u}{w}$ in $x_0 \in \partial\Omega$ ein nichtnegatives Maximum annimmt, so gilt für alle ν mit $\langle \nu, \eta(x_0)\rangle > 0$*
$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u}{w}\right)(x_0) > 0.$$

Bemerkung. *Es wird keine Vorzeichenbedinung an c gestellt.*

Beweis. Sei $v = \frac{u}{w}$. Dann erfüllt v

$$-a_{ij}\partial_i\partial_j v + \tilde{b_i}\partial_i v + \tilde{c}v \leq 0 \quad \text{in } \Omega$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{b_i} &= b_i + \frac{2}{w}a_{ij}\partial_i\partial_j w, \\ \tilde{c} &= \frac{Lw}{w}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus 2.5 und 2.6.

$\square$

Wir setzen

$$\Lambda = \max_{i,j} \max_{x \in \overline{\Omega}} |a_{ij}(x)| + \max_{i} \max_{x \in \overline{\Omega}} |b_i|.$$

2.10 Satz. *Es gelte $c \geq 0$ in Ω. Seien $f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$. Es gelte*

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dann folgt

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi| + c_0 \max_{\overline{\Omega}} |f| \tag{2.3}$$

mit einer positiven Konstanten $c_0 = c_0(\lambda, \Lambda, \operatorname{diam}(\Omega))$.

Beweis. Wir suchen eine Funktione $w \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit

$$-w \leq u \leq w \quad \text{in } \Omega.$$

Natürlich sollte w derart gewählt werden, dass am Ende die Abschätzung (2.3) folgt. Unser Ziel ist es,

$$\begin{aligned} u - w &\leq 0 \quad \text{in } \Omega \text{ und} \\ -u - w &\leq 0 \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$$

zu zeigen. Dies wird erreicht, wenn wir

$$\begin{aligned} u - w &\leq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, & -u - w &\leq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ L(u - w) &\leq 0 \quad \text{in } \Omega, & L(-u - w) &\leq 0 \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$$

zeigen können. w sollte am Rand größer als φ sein und negativ gekrümmt, wobei die Krümmung immer negativ wird, wenn wir einen Parameter gegen ∞ schicken. Ein Beispiel hierfür ist

$$f \colon (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -e^{\alpha x}.$$

O.B.d.A. können wir $l > 0$ derart wählen, dass

$$\Omega \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; 0 < x_1 < l \right\}.$$

Setze $\bar{f} = \max_{\overline{\Omega}} |f|$ und $\bar{\varphi} = \max_{\partial\Omega} |\varphi|$. Setze für $\alpha > 0$

$$v(x) = \bar{\varphi} + \left(e^{\alpha l} - e^{\alpha x_1}\right) \bar{f}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\partial_i \partial_j v &= \partial_i \left(-e^{\alpha x_1} \delta_{j1} \alpha \bar{f}\right) = -e^{\alpha x_1} \delta_{i1} \delta_{j1} \alpha^2 \bar{f}, \\
a_{ij} \partial_i \partial_j v &= -\alpha^2 \bar{f} e^{\alpha x_1} a_{11}, \\
(Lv)(x) &= \alpha^2 \bar{f} e^{\alpha x_1} a_{11}(x) - \alpha \bar{f} e^{\alpha x_1} b_1(x) + c(x) v(x) \\
&\geq e^{\alpha x_1} \bar{f} \left(\alpha^2 \lambda - \alpha b_1\right) \geq e^{\alpha x_1} \bar{f} \underbrace{\left(\alpha^2 \lambda - \alpha \Lambda\right)}_{\geq 1} \\
&\geq \bar{f} \quad \text{für } \alpha \geq \alpha_0(\lambda, \Lambda).
\end{aligned}$$

Wir halten fest:

$$\begin{aligned}
v &\geq \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega, \\
Lv \geq \bar{f} &\geq Lu \quad \text{in } \Omega
\end{aligned}$$

und mit Korollar 2.7 erhalten wir

$$u(x) \leq v(x) \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Analog erhalten wir

$$u(x) \geq -v \quad \text{für } x \in \Omega$$

und somit

$$|u(x)| \leq \bar{\varphi} + \left(e^{\alpha l} - \underbrace{e^{\alpha x_1}}_{\geq 1}\right) \bar{f} \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi| + c_0 \max_{\overline{\Omega}} |f|.$$

□

2.1 L^∞-Abschätzungen für den Gradienten von Lösungen

In diesem Abschnitt ist

$$Lu = -a_{ij} \partial_i \partial_j u + b_i \partial_i u,$$

wobei a_{ij}, $b_i \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Weiterhin sei $f \in C\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^d\right)$.

2.11 Satz. *Sei $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Es gelte*

$$Lu = f(\cdot, u) \quad \text{in } \Omega.$$

Dann folgt

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq \sup_{\partial\Omega} |\nabla u| + c_0,$$

wobei c_0 eine positive Konstante ist, welche nur von λ, $\operatorname{diam}(\Omega)$, $\|a_{ij}\|_{C^1(\overline{\Omega})}$, $\|b_i\|_{C^1(\overline{\Omega})}$, $M = \max_{\overline{\Omega}} |u|$ und $\|f\|_{C^1(\overline{\Omega} \times [-M,M])}$ abhängt.

Bemerkung. *Selbstredend ist $f(x, u(x)) = -c(x)\, u(x)$ möglich, d.h. wir betrachten hier allgemeinere Probleme.*

Bevor wir uns dem Beweis von 2.11 zuwenden, wollen wir zwei Formeln bemerken:

$$\partial_i \left(|\nabla u|^2\right) = 2|\nabla u| \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \partial_i \nabla u = 2\nabla u \partial_i \nabla u = 2\partial_k u \partial_k \partial_i u$$

und

$$\partial_i \partial_j \left(|\nabla u|^2\right) = 2\partial_k \partial_j u \partial_k \partial_i u + 2\partial_k u \partial_k \partial_i \partial_j u.$$

Beweis. Wir differenzieren die Gleichung $Lu = f(\cdot, u)$ mittels ∂_k:

$$-\partial_k (a_{ij})\, \partial_i \partial_j u - a_{ij} \partial_k \partial_i \partial_j u + \partial_k (b_i)\, \partial_i u + b_i \partial_i \partial_k u = \partial_k f(\cdot, u) + \partial_2 f(\cdot, u)\, \partial_k u. \quad (2.4)$$

Ziel ist es jetzt, die (Un-) Gleicung für $L\left(|\nabla u|^2\right)$ herzuleiten. Multiplikation von (2.4) mit $\partial_k u$ und Summation über k ergibt:

$$\begin{aligned} &- a_{ij} \partial_k \partial_i \partial_j u \cdot \partial_k u - a_{ij} \partial_k \partial_j u \partial_k \partial_i u + b_i \partial_i \partial_k u \partial_k u \\ &\qquad = \partial_k (a_{ij})\, \partial_i \partial_j u \partial_k u - \partial_k (b_i)\, \partial_i u \partial_k u + \partial_k f(\cdot, u)\, \partial_k u + \partial_2 f(\cdot, u)\, |\nabla u|^2 \\ &\qquad\qquad - a_{ij} \partial_k \partial_j u \partial_k \partial_i u =: \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$-\frac{a_{ij}}{2} \partial_i \partial_j \left(|\nabla u|^2\right) + \frac{b_i}{2} \partial_i \left(|\nabla u|^2\right) = \text{R.H.S.},$$

d.h.

$$L\left(|\nabla u|^2\right) = 2 \cdot \text{R.H.S.}$$

Beachte:

$$-a_{ij} \partial_k \partial_j u \partial_k \partial_i u \leq -\lambda |\nabla^2 u|^2.$$

Daher gilt nach Anwendung der Voraussetzungen und Youngschen Ungleichung

$$L\left(|\nabla u|^2\right) \leq -\lambda|\nabla^2 u|^2 + c_1|\nabla u|^2 + c_1,$$

wobei $c_1 > 0$ von den Daten der Gleichung abhängt wie c_0 in der Aussage.

Unser Ziel ist es nun, $v \approx |\nabla u|^2$ mit $Lv \leq 0$ in Ω zu finden.

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} L\left(u^2\right) &= -a_{ij}\partial_i\partial_j\left(u^2\right) + b_i\partial_i\left(u^2\right) = -a_{ij}\partial_i\left(2u\partial_j u\right) + b_i 2u\partial_i u \\ &= -2a_{ij}\partial_i u\partial_j u - 2u\cdot a_{ij}\partial_i\partial_j u + 2ub_i\partial_i u \\ &\leq -2\lambda|\nabla u|^2 + 2u\ Lu \leq -2\lambda|\nabla u|^2 + 2uf\left(\cdot, u\right). \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} L\left(|\nabla u|^2 + \alpha u^2\right) &\leq -\lambda|\nabla^2 u|^2 + \left(c_1 - 2\lambda\alpha\right)|\nabla u|^2 + c_2\alpha \\ &\leq -\lambda|\nabla^2 u|^2 - |\nabla u|^2 + c_2\alpha \quad \text{für } \alpha \geq \frac{c_1+1}{2\lambda}. \end{aligned}$$

$$L\left(|\nabla u|^2 + \alpha u^2 + e^{\beta x_1}\right) \leq -\lambda|\nabla^2 u|^2 - |\nabla u|^2 \quad \text{für } \beta > \beta_0\left(c_2, \alpha\right)$$

und $\Omega \subset \{x_1 > 0\}$. Setze $v(x) = |\nabla u|^2 + \alpha u^2 + e^{\beta x_1}$ mit α, β wie oben. Es folgt

$$Lv \leq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Somit

$$\sup_\Omega |\nabla u| \leq \sqrt{\sup_\Omega |\nabla u|^2} \leq \cdots \leq \sup_{\partial\Omega}|\nabla u| + c_0.$$

□

2.2 Das Maximumprinzip von Alexandrov-Backelmann

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ wie immer offen, beschränkt und zusammenhängend. Wir erinnern zunächst an eine Variante des Satzes 2.10:

2.12 Satz. *Sei $c \geq 0$ in Ω. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$. Es gelte $Lu \leq f$ in Ω. Dann gilt mit einer positiven Konstanten $c_0 = c_0\left(\lambda, \Lambda, \operatorname{diam}(\Omega)\right)$*

$$\max_\Omega u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ + c_0 \max_\Omega f^+.$$

Beweis. Analog zum Beweis des Satzes 2.10. $\square$

Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen und Definitionen.

2.13 Definition. Seien $u \in C(\Omega)$ und $y \in \Omega$. Dann definieren wir die *obere Kontaktmenge von u in Ω* als

$$G^+ := G^+(u,\Omega) := \left\{ y \in \Omega \;\middle|\; \exists\, p \in \mathbb{R}^d \;\forall\, x \in \Omega \colon u(x) \leq u(y) + \langle p, x-y \rangle \right\}.$$

$$\chi(y) := \chi(y; u, \Omega) := \left\{ p \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \forall\, x \in \Omega \colon u(x) \leq u(y) + \langle p, x-y \rangle \right\},$$
$$\chi(u,\Omega) := \cup_{y \in \Omega} \chi(y; u, \Omega).$$

Bemerkung.

- *Falls u in $x \in \Omega$ differenzierbar und $p \in \chi(x; u, \Omega)$, so folgt $p = \nabla u(x)$.*
- *Falls $u \in C^1(\Omega)$, so gilt*

$$\begin{aligned} \chi(u,\Omega) &= \chi\left(u, G^+(u,\Omega)\right) = \nabla u\left(G^+(u,\Omega)\right) \\ &= \textit{Bildmenge von } \nabla u \textit{ für } x \in G^+(u,\Omega). \end{aligned}$$

Beispiel. Seien $\Omega = B(x_0, R) \subset \mathbb{R}^d$, $a > 0$ und $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x) = a\left(1 - \frac{|x-x_0|}{R}\right) = a - a\frac{|x-x_0|}{R}.$$

Dann ist $G^+ = \Omega$ und

$$\chi(y) = \begin{cases} -\frac{a}{R}\frac{(y-x_0)}{|y-x_0|}, & \text{falls } y \neq x_0, \\ \overline{B\left(0, \frac{a}{R}\right)}, & \text{falls } y = x_0. \end{cases}$$

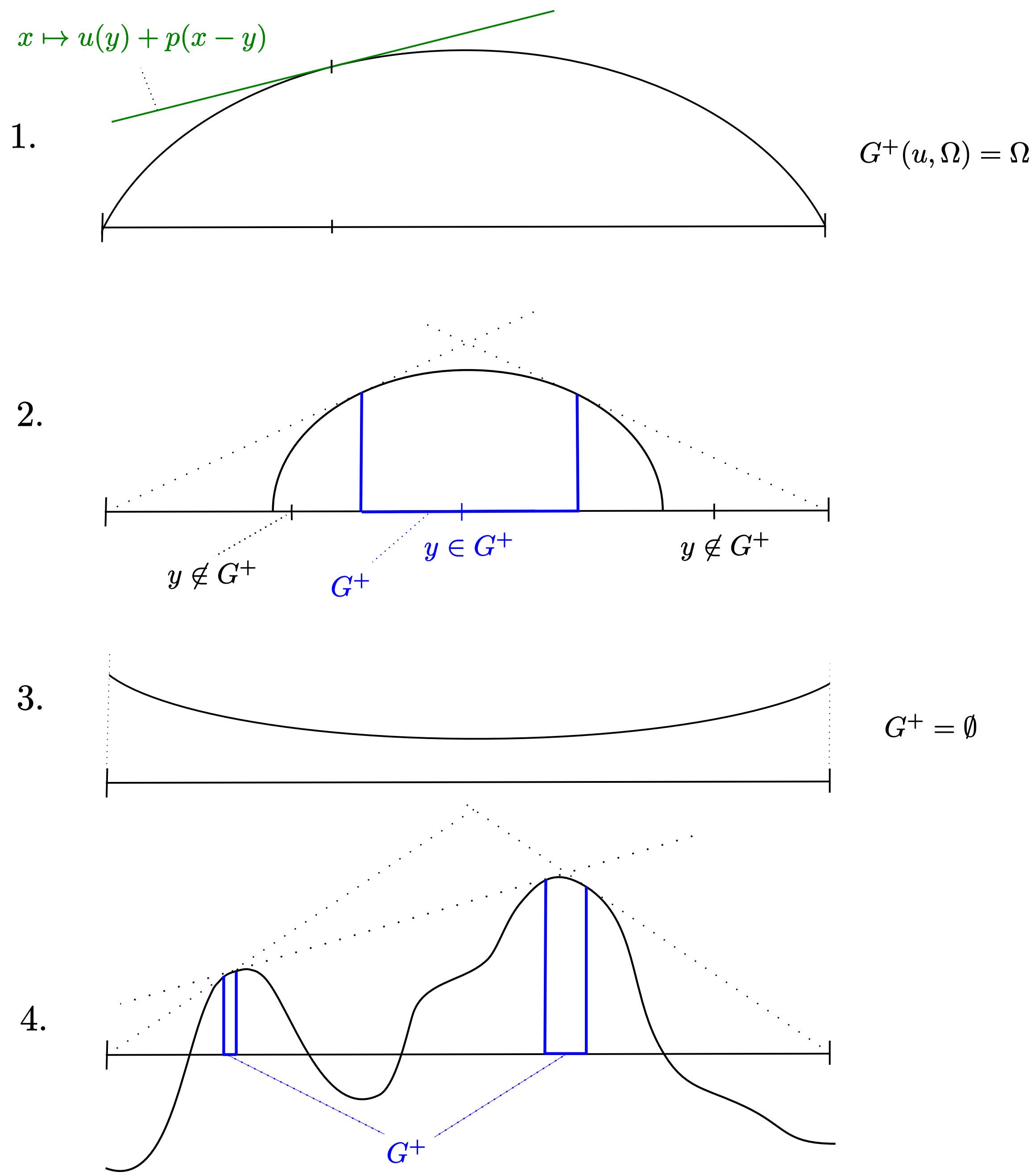
2.14 Lemma. *Sei $u \in C^2(\Omega)$. Dann ist die Hessesche Matrix $\left(D^2 u\right)(z)$ negativ semidefinit für $z \in G^+(u,\Omega)$.*

Beweis. Sei $z \in G^+(u,\Omega)$. Setze $w \colon \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$w(x) = u(x) - u(z) - \langle \nabla u(z), x - z \rangle.$$

Dann gilt $w(z) = 0$ und für $x \in \Omega$ ist $w(x) \leq 0$. Also hat w ein Maximum in z und somit folgt $\left(D^2 w\right)(z) \leq 0$.

$\square$


$x \mapsto u(y) + p(x-y)$
1.
$G^+(u,\Omega) = \Omega$
2.
$y \notin G^+$
G^+
$y \in G^+$
$y \notin G^+$
3.
$G^+ = \emptyset$
4.
G^+

Wir erinnern an den Transformationssatz:

Satz (Transformationssatz)**.** *Seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen,* $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ *derart, dass* $\varphi\colon \Omega \to \varphi(\Omega)$ *ein Diffeomorphismus ist. Sei* $f\colon \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}$ *nichtnegativ und messbar (oder* $f \in L^1(\varphi(\Omega))$*). Dann ist auch* $f \circ \varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *messbar und es gilt*

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega f(\varphi(x))\left|\det J_\varphi(x)\right|\ \mathrm{d}x.$$

2.15 Lemma. *Sei* $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$*. Dann gilt*

$$|\chi(u,\Omega)| \leq \int_{G^+(u,\Omega)} |\det D^2 u|.$$

Beweis. Natürlich gilt auch hier $\chi(u,\Omega) = \nabla u(G^+(u,\Omega))$. Für die Jacobi-Matrix der Abbildung $\nabla u\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ gilt

$$J_{\nabla u}(x) = D^2 u(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \text{ und}$$

$$J_{\nabla u}(x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in G^+(u,\Omega).$$

Sei $\varepsilon > 0$ und definiere $\chi_\varepsilon\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$, $\chi_\varepsilon(x) = \chi(x;u,\Omega) - \varepsilon x$. Dann gilt für $x \in G^+(u,\Omega)$

$$J_{\chi_\varepsilon} = \left(D^2 u - \varepsilon I_{d\times d}\right)(x) < 0.$$

Mit Hilfe des Transformationssatzes folgt

$$\begin{aligned} |\chi_\varepsilon(\Omega)| &= \int_{\chi_\varepsilon(\Omega)} 1 = \int_{(\nabla u - \varepsilon I_d)(G^+(u,\Omega))} 1 \\ &\overset{\text{Transf.-}}{\underset{\text{satz}}{=}} \int_{G^+(u,\Omega)} \left|\det\left(D^2 u - \varepsilon I_{d\times d}\right)(x)\right|\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

und somit erhalten wir mit $\varepsilon \to 0$ und dem Lemma von Fatou

$$|\chi(u,\Omega)| = \int_{\chi(u,\Omega)} 1 \leq \int_{G^+(u,\Omega)} \left|\det\left(D^2 u\right)\right|\ \mathrm{d}x.$$

□

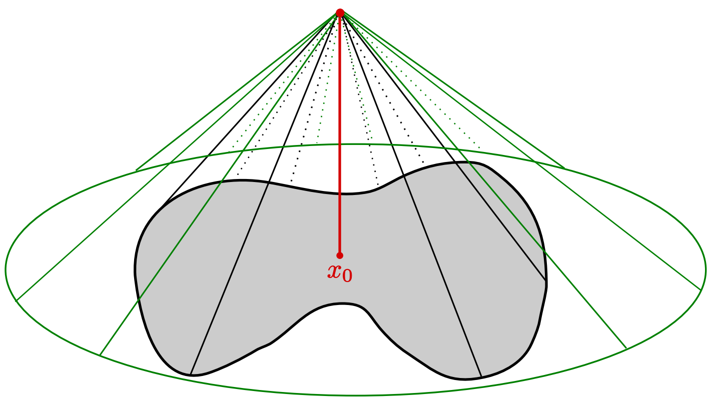
2.16 Proposition. *Sei* $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$*. Dann gilt*

$$\sup_\Omega u \leq \max_{\partial\Omega} u + \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{|B(1)|^{\frac{1}{d}}} \left(\int_{G^+(u,\Omega)} \left|\det D^2 u\right|\right)^{\frac{1}{d}}.$$

Beweis. Dank Lemma 2.15 wissen wir

$$|\chi(u,\Omega)| \leq \int_{G^+(u,\Omega)} \left|\det D^2 u\right|.$$

O.B.d.A. nehmen wir an: $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Anderenfalls würden wir $\tilde{u} = u - \max_{\partial\Omega} u$ betrachten. Sei $x_0 \in \Omega$ derart, dass u ein positives Maximum in x_0 annimmt. Betrachte die Funktion $k\colon \Omega \to \mathbb{R}$, deren Graph ein Hütchen ist mit SPitze in $(x_0, u(x_0))$ und Basis $\partial\Omega$. Betrachte weiterhin eine Funktion $\tilde{k}\colon B(x_0,R) \to \mathbb{R}$ mit $R = \operatorname{diam}(\Omega)$, deren Graph ein Hütchen ist mit Spitze in $(x_0, u(x_0))$ und Basis $\partial B(x_0,R)$.



Es gilt

$$\begin{aligned} \chi(k,\Omega) &\subset \chi(u,\Omega), \\ \chi\left(\tilde{k},\Omega\right) &\subset \chi(k,\Omega) \end{aligned}$$

und somit

$$\left|\chi\left(\tilde{k},\Omega\right)\right| \leq |\chi(u,\Omega)|.$$

Wie im obigen Beispiel gezeigt, gilt

$$\left(\frac{u(x_0)}{\operatorname{diam}(\Omega)}\right)^d |B(1)| = \left|\chi\left(\tilde{k},\Omega\right)\right| \overset{\text{Lem. 2.15}}{\leq} \int_{G^+(u,\Omega)} \left|\det D^2 u\right|$$

und somit

$$u(x_0) \leq \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{|B(1)|^{\frac{1}{d}}} \left(\int_{G^+(u,\Omega)} \left|\det D^2 u\right|\right)^{\frac{1}{d}}.$$

$\square$

Für die Formulierung des Maximumprinzips von Alexandrov-Backelmann ist die *gleich-*

mäßige Elliptizität von L nicht zwingend erforderlich. Seien $a_{ij} \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ mit

$$\begin{gathered} a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad \forall\, x \in \Omega \quad \text{und} \\ \forall\, x \in \Omega\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d\colon a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j > 0, \end{gathered}$$

d.h. die Matrix $A = (a_{ij})$ ist in jedem Punkt $x \in \Omega$ positiv definit, dies aber i. A. nicht gleichmäßig bezüglich $x \in \Omega$. Wir nehmen an, das es Funktionen λ, $\Lambda\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gibt derart, dass für $D(x) = \det A(x)$ und $D^*(x) = (\det A(x))^{\frac{1}{d}}$ gilt:

$$0 < \lambda \le D^* \le \Lambda \quad \text{auf } \Omega.$$

Bemerkung. *Falls A gleichmäßig positiv in Ω ist, so kann man natürlich λ und Λ konstant wählen.*

2.17 Lemma. *Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$. Unter den obigen Voraussetzungen folgt*

$$\sup_{\Omega} u \le \max_{\partial\Omega} u + \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{(B(1))^{\frac{1}{d}} \cdot d} \left\| \frac{a_{ij}\partial_i\partial_j u}{D^*} \right\|_{L^d(G^+(u,\Omega))}.$$

Bemerkung. *$u \in W^{2,d}_{loc}(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ ist ausreichend.*

Beweis. Vgl. Proposition 2.16. Sei $H(x) = -D^2u(x)$. Da A und H symmetrisch sind, gilt

$$((\det H)(\det A))^{\frac{1}{d}} \le \frac{\operatorname{Spur}(AH)}{d}.$$

Für $x \in G^+(u,\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} \left|\det D^2u(x)\right| &= \det(H(x)) \le \frac{1}{\det A(x)} \left(\frac{\operatorname{Spur}(H(x)\,A(x))}{d}\right)^d \\ &= \frac{1}{D(x)} \left(\frac{-a_{ij}(x)\,\partial_i\partial_j u(x)}{d}\right)^d. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.17 ist ein Spezialfall des Maximumprinzips von Alexandrov-Backelmann.

2.18 Satz. *Sei L ein Differentialoperator der Form in 2.12. Die Koeffizienten a_{ij} seien positiv definit wie oben. Es gelte $c \ge 0$ und $\frac{b}{D^*} \in L^d(\Omega)$. Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\frac{f}{D*} \in L^d(\Omega)$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$. Es gelte $Lu \le f$ in Ω. Dann gilt*

$$\sup_{\Omega} u \le \max_{\partial\Omega} u^+ + c_0 \left\| \frac{f}{D^*} \right\|_{L^d(\Omega)}$$

mit einer positiven Konstanten $c_0 = c_0 \left(d, \mathrm{diam}\,(\Omega)\,, \left\| \frac{b}{D^*} \right\|_{L^d(\Omega)} \right)$.

Beweis. Im Fall $b_i = c = 0$ folgt der Beweis unmittelbar aus Lemma 2.17, wenn man berücksichtigt, dass

$$-\partial_i \partial_j u \geq 0 \quad \text{auf } G^+\,(u, \Omega)$$

gilt. Der allgemeine Fall ist technisch aufwendiger, da eine Verallgemeinerung des Transformationssatzes (area-formula) benötigt wird.

□

Bemerkung. *Im Falle, dass* (a_{ij}) *gleichmäßig positiv definit ist, ist* D^* *durch Konstanten nach oben und unten beschränkt.*

3 Lokale Regularität für Differentialgleichungen in Nicht-Divergenzform

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ wieder offen, beschränkt und zusammenhängend. Wie in Kapitel 2 sei L ein Differentialoperator der Form

$$Lu = -a_{ij}\partial_i\partial_j u + b_i\partial_i u + cu$$

für $u \in C^2(\Omega)$ bzw. $u \in W^{2,d}_{loc}(\Omega)$. Die Koeffizienten a_{ij}, b_i und c seien stetig auf $\overline{\Omega}$. Wir nehmen an, dass L gleichmäßig elliptisch auf Ω ist, d.h. es gibt λ, $\Lambda > 0$ mit

$$\forall\, x \in \Omega\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d\colon \lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir an, dass für zwei positive Zahlen $\gamma, \nu > 0$

$$\frac{\Lambda}{\lambda} < \gamma \quad \text{und} \quad \left(\frac{|b(x)|}{\lambda}\right)^2 + \frac{|c(x)|}{\lambda}\ \forall\, x \in \Omega$$

gilt. Der folgende Satz ist ein Analogon zu Satz (??xy??).

3.1 Satz. *Sei $f \in L^d(\Omega)$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ mit $Lu \leq f$ in Ω. Dann gilt für jede Kugel $B(x_0, 2R) \subset \Omega$ und jedes $p > 0$*

$$\sup_{B(x_0,R)} u \leq c_o \left[\left(\fint_{B(x_0,2R)} (u^+)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{R}{\lambda}\|f\|_{L^d(B(x_0,R))}\right]$$

mit einer positiven Konstanten $c_0 = c_0\left(d, \gamma, \nu R^2, p\right) > 0$.

Bemerkung. *$u \in W^{2,d}(\Omega)$ ist ausreichend.*

Beweis. O.B.d.A. sei $x_0 = 0$, $R = 1$ (ansonsten Koordinatentransformation) und $u \leq 0$

auf $\partial B(1)$. Sei für $q \geq 0$ und $x \in B = B(1)$

$$\tau(x) = \left(1 - |x|^2\right)^q .$$

Ziel ist es, die Gleichung zu lokalisieren.

$$\partial_i \tau = q\left(1 - |x|^2\right)^{q-1}(-2)\,|x| \cdot \frac{x_i}{|x|} = -2qx_i\left(1 - |x|^2\right)^{q-1},$$

$$\begin{aligned} \partial_i\partial_j\tau &= -2q\delta_{ij}\left(1 - |x|^2\right)^{q-1} - 2qx_i\left(-2(q-1)\,x_j\left(1 - |x|^2\right)^{q-2}\right) \\ &= -2q\delta_{ij}\left(1 - |x|^2\right)^{q-1} + 4q(q-1)\,x_ix_j\left(1 - |x|^2\right)^{q-2}. \end{aligned}$$

Setze $v = \tau u$. Berechne, welche Gleichung bzw. welche Ungleichung nun für v gilt.

$$\begin{aligned} -a_{ij}\partial_i\partial_j v &= \tau\left(-a_{ij}\partial_i\partial_j u\right) - 2a_{ij}\partial_i\tau\partial_j u - ua_{ij}\partial_i\partial_j\tau \\ &\underset{Lu\leq f}{\leq} \tau\left(f - b_i\partial_i u - cu\right) - 2a_{ij}\partial_i\tau\partial_j u - ua_{ij}\partial_i\partial_j\tau. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Der Beweis folgt aus Lemma 2.17, wenn wir die rechte Seite von (3.1) nach oben durch Termine abschätzen können, die nur Daten der Gleichung und Werte von u, nicht aber Werte von Ableitungen von u enthalten. Zum Glück wird die rechte Seite nur auf $G^+(v, B)$ betrachtet.

Beachte, dass $v \in C^2(B) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ mit $v(\partial\Omega) = \{0\}$ gilt. v ist konkav auf $G^+ = G^+(v, B)$, also gilt

$$|\nabla v| \leq \frac{v}{1 - |x|} \quad \text{auf } G^+. \tag{3.2}$$

Für $x \in G^+$ gilt dann

$$\begin{aligned} |\nabla u(x)| &= \frac{1}{\tau(x)}|\nabla v(x) - u(x)\nabla\tau(x)| \leq \frac{1}{\tau(x)}\left(|\nabla v(x)| + |u(x)||\nabla\tau(x)|\right) \\ &\overset{(3.2)}{\leq} \frac{1}{\tau(x)}\left(\frac{v(x)}{1 - |x|} + |u(x)||\nabla\tau(x)|\right) \leq 2\left(\tau(x)\right)^{-\frac{1}{q}}|u(x)| + 2q\left(1 - |x|^2\right)^{-1}|u(x)| \\ &\leq 2(1 + q)\left(\tau(x)\right)^{-\frac{1}{q}}|u(x)| \end{aligned} \tag{3.3}$$

wegen $\frac{1}{1-|x|} \leq \frac{2}{1-|x|^2}$ für $x \in B(1)$. Mit (3.3) folgt dann aus (3.1)

$$-a_{ij}\partial_i\partial_j v \leq c_1\lambda\tau^{-\frac{2}{q}}v + f \quad \text{auf } G^+$$

mit einer positiven Konstanten $c_1 = c_1(d, q, \gamma, \nu)$. Wir wenden Lemma 2.17 an und erhalten

$$\begin{aligned} \sup_B v &\leq c_2 \left(\left\| \tau^{-\frac{2}{q}} v^+ \right\|_{L^d(B)} + \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^d(B)} \right) \\ &\leq c_2 \left(\sup_B v^+ \right)^{1-\frac{2}{q}} \left\| \left(u^+\right)^{\frac{2}{q}} \right\|_{L^d(B)} + \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^d(B)}. \end{aligned}$$

Wähle $q = \frac{2d}{p}$, falls $p \leq d$ (der andere Fall ist dann einfach). Mit Hilfe der Youngschen Ungleichung folgt dann

$$\sup_B v \leq c_3 \left(\left(\int_B \left(u^+\right)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^d(B)} \right).$$

□

Als Vorbereitung für die Harnack-Ungleichung geben wir hier ein sehr spezielles Lemma an. Im Folgenden bezeichnet $W(x_0, r)$ den Würfel in $\mathbb{R}^d$ mit Mittelpunkt in x_0 und Radius $r > 0$, d.h.

$$W(x_0, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; |x - x_0|_\infty < r \right\}.$$

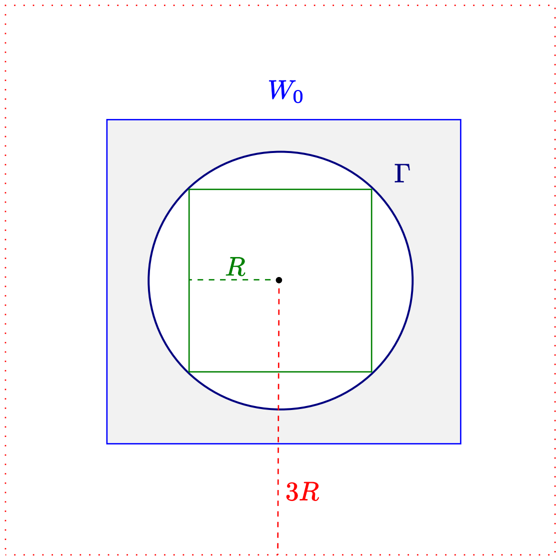
3.2 Lemma. *Seien $W_0 \subset \mathbb{R}^d$ ein offener Würfel und $\Gamma \subset W_0$ eine messbare Teilmenge. Setze für $0 < \delta < 1$*

$$\Gamma_\delta = \bigcup \left\{ W(y, 3R) \cap W_0 \mid W(y, R) \subset W_0,\ |\Gamma \cap W(y, R)| \geq \delta \, |W(y, R)| \right\}.$$

Dann gilt im Falle $\Gamma_\delta \neq W_0$

$$|\Gamma| \leq \delta \, |\Gamma_\delta| \qquad \left(\Leftrightarrow \quad |\Gamma_\delta| \geq \frac{1}{\delta} \, |\Gamma| \right).$$

Bemerkung. *Für $\delta \to 0$ wird das Ereignis $\Gamma_\delta = W_0$ immer wahrscheinlicher.*



$\delta = \frac{1}{3}$
$\Gamma_{\frac{1}{3}} = W_0$

Beweis. Wir beginnen auf einer groben Skala und verfeinern danach sukzessive. Es gilt

$$(|\Gamma \cap W_0| > \delta\, |W_0| \quad \Rightarrow \quad \Gamma_\delta = W_0)\,.$$

Also gilt im Fall $\Gamma_\delta \neq W_0$ die Aussage $|\Gamma \cap W_0| \leq \delta\, |W_0|$. Wir zerlegen W_0 in 2^d kongruente, disjunkte Unterwürfel $W\,(i_1)$, $i_1 \in \left\{1, \ldots, 2^d\right\}$. Sei nun $i_1 \in \left\{1, \ldots, 2^d\right\}$. Dann gibt es genau 2 Möglichkeiten:

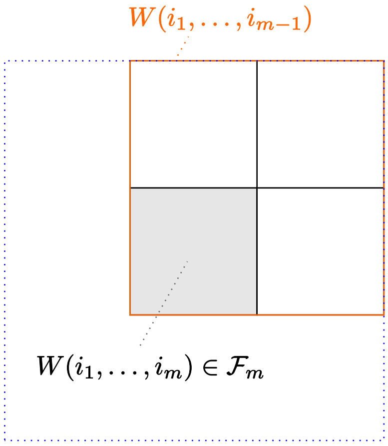
(1) $|\Gamma \cap W_0\,(i_1)| \leq \delta\, |W\,(i_1)|$ („schlechter Würfel").

(2) $|\gamma \cap W_0\,(i_1)| > \delta\, |W\,(i_1)|$ („guter Würfel").

Sei $\mathcal{F}_1$ die Menge aller „guten" Würfel, d.h. mit Eigenschaft (2). Diese Würfel bleiben fortan unangetastet. Die Würfel $W\,(i_1)$ mit Eigenschaft (1), d.h. „schlechte" Würfel, werden nun jeweils in 2^d Unterwürfel $W\,(i_1, i_2)$ mit $i_2 \in \left\{1, \ldots, 2^d\right\}$ zerlegt wie im ersten Schritt. Für jeden dieser Würfel gilt wiederum genau eine der beiden Eigenschaften analog zu (1) oder (2). Sei $\mathcal{F}_2$ die Menger aller $W\,(i_1, i_2)$-Würfel mit Eigenschaft (2). $\mathcal{F}_2$ enthält also genau diejenigen Würfel, die in der zweiten Vertiefungsebene gut sind. Auf diese Weise konstruieren wir $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \ldots$. Definiere

$$\mathcal{F} = \{W\,(i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}) \mid \exists\; i_m \colon W\,(i_1, \ldots, i_{m-1}, i_m) \in \mathcal{F}_m\}$$

als die Menge aller Würfel mit einem „guten" Unterwürfel. Beachte, dass Würfel $W \in \mathcal{F}$



selbst „schlecht" sind. Für $W(i_1,\ldots,i_m)\in\mathcal{F}_m$ gilt

$$\begin{aligned}|\Gamma\cap W(i_1,\ldots,i_m)| &> \delta\,|W(i_1,\ldots,i_m)| \quad \text{und}\\ |\Gamma\cap W(i_1,\ldots,i_{m-1})| &\le \delta\,|W(i_1,\ldots,i_{m-1})|\,.\end{aligned}$$

$W(i_1,\ldots,i_m)\in\mathcal{F}_m$ impliziert aber $W(i_1,\ldots,i_{m-1})\subset\Gamma_\delta$, da um den Faktor 3 aufgepumpte Unterwürfel ihren jeweiligen Oberwürfel enthalten.

Somit folgt

$$\bigcup_{W\in\mathcal{F}} W\subset\Gamma_\delta. \tag{3.4}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\left|\Gamma\cap\bigcup_{W\in\mathcal{F}} W\right| &= \left|\bigcup_{W\in\mathcal{F}}(\gamma\cap W)\right| = \sum_{W\in\mathcal{F}}|\Gamma\cap W|\\ &\le \delta\sum_{W\in\mathcal{F}}|W| = \delta\left|\bigcup_{W\in\mathcal{F}} W\right| \overset{(3.4)}{\le} \delta\,|\Gamma_\delta|\,.\end{aligned}$$

Es gilt damit

$$|\Gamma| = \left|\Gamma\cap\bigcup_{W\in\mathcal{F}} W\right| \le \delta\,|\Gamma_\delta|\,.$$

□

3.3 Satz. *Sei $f\in L^d$ und sei $u\in C^2(\Omega)\cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ mit $Lu\ge f$ in Ω. Es gelte $u\ge 0$ in $B(x_0,2R)\subset\Omega$. Dann existieren $p=p\left(d,\gamma,\nu R^2\right)>0$, $c_0=c_0\left(d,\gamma,\nu R^2\right)\ge 1$ derart,* *dass gilt:*

$$\left(\fint_{B(x_0,R)} u^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \leq c_0 \left(\inf_{B(x_0,R)} u + \frac{R}{\lambda} \|f\|_{L^d(B(x_0,2R))} \right). \tag{3.5}$$

Bemerkung. • *Für $\Delta u = 0$, $u \geq 0$ in $B(x_0, 2R)$, gilt die entsprechende Aussage mit $f = 0$ natürlich. Sie folgt aus der Harnack-Ungleichung. Abschätzung (3.5) heißt auch* schwache Harnack-Ungleichung.

- *Im Falle $b_i = c = 0$ gilt $\nu = 0$.*

Beweis. Wir beweisen nur den Fall $b_i = c = 0$. Der allgemeine Fall ist nicht viel schwieriger, wenn man das Maximumprinzip von Alexandrov-Bakelman für diesen Fall bewiesen hat. Wir können o.B.d.A. annehmen: $x_0 = 0$, $R = \frac{1}{2}$, sonst Koordinatentransformation.

Setze

$$\tilde{u} = u + \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^d(B(1))}, \qquad \varrho = \frac{1}{6\sqrt{d}},$$
$$\Gamma = \{x \in B(1) \mid \tilde{u}(x) \geq 1\}.$$

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten:

Schritt 1: Es gibt $K = K(d, \gamma) \geq 1$, $\delta = \delta(d, \gamma) > 0$ mit

$$\inf_{W(3\varrho)} \tilde{u} \geq K^{-1}, \quad \text{falls } |\Gamma \cap W(\varrho)| \geq \delta |W(\varrho)|,$$

wobei $W(\varrho)$ ein beliebiger Würfel mit Radius ϱ ist.

Schritt 2: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\inf_{W(\varrho)} \tilde{u} \geq K^{-m}, \quad \text{falls } |\Gamma \cap W(\varrho)| \geq \delta^m |W(\varrho)|. \tag{3.6}$$

Schritt 3: Setze für $t \geq 0$

$$\Gamma_t = \{x \in B(1) \mid \tilde{u}(x) > t\}.$$

Dann existieren $c_1 = c_1(d, \gamma) \geq 1$ und $\mu = \mu(d, \gamma) > 0$ derart, dass für alle $t > 0$ gilt:

$$|\Gamma_t \cap B(\varrho)| \leq c_1 |B(\varrho)| \left(\inf_{B(\varrho)} \tilde{u} \right)^{\mu} t^{-\mu}.$$

Schritt 4: Es gibt $p = p\,(d,\gamma) > 0$ mit

$$\left(\fint_{B(\varrho)} u^p \;\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_1 \left(\inf_{B(\varrho)} u + \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^d(B(1))}\right).$$

Schritt 5: Schließlich gilt mit $c_0 = c_0\,(d,\gamma)$ Abschätzung (3.5) mit $x_0 = 0$, $R = \frac{1}{2}$.

Wir zeigen zunächst, wie Schritt 2 aus Schritt 1 folgt. Für $m = 1$ ist dann die Aussage bereits bewiesen.

Wir nehmen an, (3.6) sei bewiesen für ein $m \in \mathbb{N}$. Wir zeigen (3.6) für $m+1$. Es gelte also

$$|\Gamma \cap W\,(\varrho)| \geq \delta^{m+1}\,|W\,(\varrho)|\,.$$

Es ist zu zeigen:

$$\inf_{W(\varrho)} \tilde{u} \geq K^{-(m+1)}.$$

Setze $\tilde{W}_0 = W\,(\varrho)$ und

$$\Gamma_\delta = \bigcup \left\{ W\,(x,3r) \cap \tilde{W}_0 \;\middle|\; W\,(x,r) \subset \tilde{W}_0 \text{ mit } |\Gamma \cap W\,(x,r)| \geq \delta\,|W\,(x,r)| \right\}.$$

Lemma 3.2 liefert nun: $\Gamma_\delta = \tilde{W}_0$ oder $\left|\Gamma \cap \tilde{W}_0\right| \leq \delta\,|\Gamma_\delta|$. Wegen Schritt 1 wissen wir, dass $\inf_{\Gamma_\delta} \tilde{u} \geq K^{-1}$ gilt. Im Fall $\Gamma_\delta = \tilde{W}_0 = W\,(\varrho)$ gilt dann

$$\inf_{W(\varrho)} \tilde{u} \geq K^{-1} \geq K^{-(m+1)}.$$

Im Fall $\left|\Gamma \cap \tilde{W}_0\right| \leq \delta\,|\Gamma_\delta|$ setzen wir $v = Ku$, $\tilde{v} = v + \frac{K}{\lambda}\|f\|_{L^d(B(1))}$ ($\Rightarrow \tilde{v} = K\tilde{u}$) und $\tilde{\Gamma} = \{x \in B\,(1) \mid \tilde{v} \geq 1\}$. Wegen $\inf_{\Gamma_\delta} \tilde{u} \geq K^{-1}$ gilt trivialerweise $\Gamma_\delta \subset \tilde{\Gamma}$ und es folgt

$$\begin{aligned} \left|\tilde{\Gamma} \cap \tilde{W}_0\right| &\geq |\Gamma_\delta| \geq \frac{1}{\delta}\left|\Gamma \cap \tilde{W}_0\right| = \frac{1}{\delta}\,|\Gamma \cap W\,(\varrho)| \\ &\overset{\text{Ind.vor.}}{\geq} \delta^m\,|W\,(\varrho)|\,. \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme gilt $\inf_{W(\varrho)} \tilde{v} \geq K^{-m}$ und es folgt

$$\inf_{W(\varrho)} \tilde{u} \geq K^{-(m+1)}.$$

$\square$

Literaturverzeichnis

[0] Foo Bar, QuuX (and B3y0nd), 2012