Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik

Skriptum zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen 3

Prof. Dr. Moritz Kaßmann

Wintersemester 2012/2013

Mitschrift von Reidar Janssen
Stand vom 29. Januar 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Symmetrische Dirichlet-Formen: Direkteinstieg und Beispiel **3**

1.1 Beispiele 7

2 Halbgruppen, Resolventen und Generatoren **33**

2.1 Abgeschlossene lineare Operatoren 33

2.2 Ein bisschen Spektraltheorie 36

2.3 Die Friedrich-Fortsetzung und der Laplace-Operator auf L^2 46

3 ? **51**

4 Koerzive Bilinearformen **56**

5 Dirichlet-Formen: Fortsetzung **67**

6 Markov-Übergangsfamilien und Dirichlet-Formen: Eine Einführung **75**

6.1 Der translationsinvariante Fall 85

6.2 Analysis und Wahrscheinlichkeitstheorie im Zusammenspiel: Transienz . . 88

Literaturverzeichnis **90**

1 Symmetrische Dirichlet-Formen: Direkteinstieg und Beispiel

Im Folgenden sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$.

1.1 Definition. Eine *symmetrische Form* $\mathcal{E}$ auf H ist ein Tupel $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$, wobei $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ ein linearer, dichter Unterraum von H ist und $\mathcal{E}\colon \mathcal{D}(\mathcal{E})\times\mathcal{D}(\mathcal{E})\to\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(u,u) &\geq 0 \quad \forall\, u\in\mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad \text{(positive Definitheit)},\\
\mathcal{E}(u,v) &= \mathcal{E}(v,u) \quad \forall\, u,v\in\mathcal{D}(\mathcal{E}),\\
\mathcal{E}(u+w,v) &= \mathcal{E}(u,v)+\mathcal{E}(w,v) \quad \forall\, u,v,w\in\mathcal{D}(\mathcal{E}).
\end{aligned}$$

$\mathcal{D}(\mathcal{E})$ wird „domain" der Form $\mathcal{E}$ genannt.

Beispiel. $H=L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, $\mathcal{D}(\mathcal{E})=C_c^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$, $\mathcal{E}(u,v)=\int_{\mathbb{R}^d}\nabla u\nabla v\ \mathrm{d}x$.

Gegeben eine symmetrische Form $\mathcal{E}$ auf H und eine Zahl $a>0$ definiert die Abbildung

$$\mathcal{E}_a\colon \mathcal{D}(\mathcal{E})\times\mathcal{D}(\mathcal{E})\to\mathbb{R}$$

über

$$\mathcal{E}_a(u,v)=\mathcal{E}(u,v)+a(u,v).$$

Natürlich ist $(\mathcal{E}_a,\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ selbst eine symmetrische Form. Der Raum $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ zusammen mit $\mathcal{E}_a$ ist nun ein Prä-Hilbertraum (d.h. Vollständigkeit fehlt im Allgemeinen).

Für $a,b>0$ definieren die Abbildungen

$$\mathcal{E}_a,\mathcal{E}_b\colon \mathcal{D}(\mathcal{E})\times\mathcal{D}(\mathcal{E})\to\mathbb{R}$$

zueinander äquivalente Metriken.

1.2 Definition. Eine symmetrische Form $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ auf H heißt *abgeschlossen*, falls $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ vollständig ist bzgl. der Metrik $\mathcal{E}_1$. $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ ist also abgeschlossen genau dann, wenn für jede Folge (u_n) in $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ mit

$$\mathcal{E}_1(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0 \quad \text{für } n, m \to \infty$$

folgt: Es existiert $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ mit $\mathcal{E}_1(u_n - u, u_n - n) \to 0$.

Falls $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ abgeschlossen ist, so ist $(\mathcal{D}(\mathcal{E}), \mathcal{E}_1)$ ein Hilbertraum.

1.3 Definition. (1) Eine symmetrische Form $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ ist *abschließbar*, falls für alle Folgen (u_n) in $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ mit

$$\mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0, \quad (u_n, u_n) \to 0,$$

gilt: $\mathcal{E}(u_n, u_n) \to 0$.

(2) Seien $\left(\mathcal{E}^1, \mathcal{D}\left(\mathcal{E}^1\right)\right)$ und $\left(\mathcal{E}^2, \mathcal{D}\left(\mathcal{E}^2\right)\right)$ zwei symmetrische Formen auf H. Dann heißt $\left(\mathcal{E}^2, \mathcal{D}(\mathcal{E})\right)$ *Fortsetzung von* $\left(\mathcal{E}^1, \mathcal{D}\left(\mathcal{E}^1\right)\right)$, falls

$$\mathcal{D}\left(\mathcal{E}^2\right) \supset \mathcal{D}\left(\mathcal{E}^1\right) \quad \text{und} \quad \mathcal{E}^2 = \mathcal{E}^1 \text{ auf } \mathcal{D}\left(\mathcal{E}^1\right) \times \mathcal{D}\left(\mathcal{E}^1\right).$$

1.4 Proposition. *Eine symmetrische Form $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ ist abschließbar genau dann, wenn sie eine abgeschlossene Fortsetzung besitzt.*

Beweis. Als Übung 1. Hinweis: Falls $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ abschließbar, nenne (u_n), (v_n) in $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ äquivalent, falls $\mathcal{E}_1(u_n - v_n, u_n - v_n) \to 0$. Setze $\mathcal{D}\left(\bar{\mathcal{E}}\right)$ als Menge der Äquivalenzklassen von Folgen, welche Cauchyfolgen bezüglich $\mathcal{E}_1$ sind. Definiere $\bar{\mathcal{E}}(u, v)$ über Polarisation.

Teil der Übung: $\left(\bar{\mathcal{E}}, \mathcal{D}\left(\bar{\mathcal{E}}\right)\right)$ ist die kleinste abgeschlossene Fortsetzung von $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$.

Übung 2: Zeige, dass eine symmetrische Form $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ abschließbar ist, wenn für jede Folge (u_n) in $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ mit $(u_n, u_n) \to 0$ und alle $v \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ gilt: $\mathcal{E}(u_n, v) \to 0$.

Im Folgenden Teil von Kapitel 1 (und auch später) betrachten wir als Hilbertraum H den Raum $L^2(X)$, wobei X im Allgemeinen ein lokal kompakter, separabler, metrischer Raum, versehen mit einem Borel-regulärem postiven Maß m mit

$$\operatorname{supp}(m) = X, \quad m(\mathcal{O}) > 0, \text{ falls } \mathcal{O} \neq \emptyset \text{offen}.$$

In den Beispielen konzentrieren wir uns auf $X = \mathbb{R}^d$ zusammen mit dem Lebesgue-Maß.

Wir setzen

$$\begin{aligned}
C(X) &= \{v\colon X \to \mathbb{R} \mid v \text{ stetig}\}\,,\\
C_b(X) &= \{v \in C(X) \mid v \text{ ist beschränkt}\}\,,\\
C_c(X) &= \{v \in C(X) \mid \operatorname{supp}(v) \text{ kompakt}\}\,,\\
C_\infty(X) &= \{v \in C(X) \mid \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, K \subset X \text{ kompakt s.d. } \forall\, x \in X \setminus K\colon |v(x)| < \varepsilon\}\,.
\end{aligned}$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine Kontraktionseigenschaft von Formen zu formulieren. Die einfachste ist die Folgende:

(K1) Für $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ und $v = (0 \vee u) \wedge 1 = \min(\max(0,u), 1)$ gilt

$$v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad \text{und} \quad \mathcal{E}(v,v) \le \mathcal{E}(u,u)\,.$$

1.5 Definition. Eine symmetrische Form $\mathcal{E}$ auf $L^2(X)$ heißt *Dirichlet-Form*, falls $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ abgeschlossen ist und (K1) gilt.

Varianten von (K1) sind folgende:

(K2) Für $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ und $v\colon X \to \mathbb{R}$ mit $|v(x) - v(y)| \le |u(x) - u(y)|$ und $|v(x)| \le |u(x)|$ für alle $x, y \in X$ gilt

$$v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad \text{und} \quad \mathcal{E}(v,v) \le \mathcal{E}(u,u)\,.$$

(K3) Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\varphi_\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \le \varphi_\varepsilon(t) \le 1 + \varepsilon, &\quad t \in \mathbb{R},\\
\varphi_\varepsilon(t) = t, &\quad 0 \le t \le 1,\\
0 \le \varphi_\varepsilon(s) - \varphi_\varepsilon(t) \le s - t, &\quad t < s,
\end{aligned}$$

sodass für $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ gilt:

$$\varphi_\varepsilon(u) \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad \text{und} \quad \mathcal{E}(\varphi_\varepsilon(u), \varphi_\varepsilon(u)) \le \mathcal{E}(u,u)\,.$$

1.6 Definition. Eine symmetrische Form $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$, welche eine der Eigenschaften (K1), (K2) oder (K3) erfüllt, wird *Markov-Form* genannt.

Bemerkung. *Wir sehen später, dass für abgeschlossene, symmetrische Formen die drei Bedingungen zueinander äquivalent sind.*

Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = H_0^1(\Omega),$$
$$\mathcal{E}(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) \, \mathrm{d}x.$$

Dann ist $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ eine Dirichletform auf $L^2(\Omega)$.

Behauptung (vgl. Übung 1)**.** Falls $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ eine abgeschlossene Fortsetzung $\left(\bar{\mathcal{E}}, \mathcal{D}\left(\bar{\mathcal{E}}\right)\right)$ besitzt, so ist $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ abschließbar.

Beweis. Sei (u_n) Folge in $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ mit $(u_n, u_n) \to 0$ und $\mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0$. Es gilt dann

$$\bar{\mathcal{E}}_1(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0.$$

Also existiert $u \in \mathcal{D}\left(\bar{\mathcal{E}}\right)$ mit $\bar{\mathcal{E}}_1(u_n - u, u_n - u) \to 0$. Insbesondere gilt $(u_n - u, u_n - u) \to 0$, also wegen $(u_n, u_n) \to 0$ folgt $u = 0$. Also gilt

$$\mathcal{E}(u_n, u_n) \to 0.$$

□

Behauptung (vgl. Übung 2)**.** $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ ist abschließbar, falls für jede Folge (u_n) in $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ mit $(u_n, u_n) \to 0$ und alle $v \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$

$$\mathcal{E}(v, u_n) \to 0$$

gilt.

Beweis. Sei (u_n) in $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ mit $(u_n, u_n) \to 0$ und $\mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0$ für $n, m \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $N_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass für $m, n \geq N_0$

$$|\mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m)| \leq \varepsilon^2$$

gilt. Sei $K \geq 1$ derart, dass $|\mathcal{E}(u_n, u_n)| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}(u_n, u_n)| &\leq |\mathcal{E}(u_n - u_m, u_n)| + |\mathcal{E}(u_m, u_n)| \\ &\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{K} \cdot \varepsilon + |\mathcal{E}(u_m, u_n)| \end{aligned}$$

und somit

$$\limsup_{n \to \infty} |\mathcal{E}(u_n, u_n)| \leq \sqrt{K} \cdot \varepsilon.$$

□

1.1 Beispiele

Beispiel (1)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und zusammenhängend. Seien $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = C_c^\infty(\Omega)$ und $\mathcal{E}(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) \, \mathrm{d}x$. Dann ist $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ eine abschließbare Markov-Form auf $L^2(\Omega, \mathrm{d}x)$.

Beweis.

- $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset L^2(\Omega, \mathrm{d}x)$ dicht.
- $\mathcal{E}(u,v) = \mathcal{E}(v,u)$ ist erfüllt.
- Abschließbarkeit: Sei (u_n) Folge in $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ mit $\|u_n\|_{L^2} \to 0$. Sei $v \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Es ist

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}(u_n, v)| &= \left| \int_\Omega \nabla u_n(x) \nabla v(x) \, \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| - \int_\Omega u_n(x) \Delta v(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\to 0 \quad \text{für } n \to \infty \text{ (vgl. Übung 2).}
\end{aligned}$$

- Markov-Eigenschaft: Wir nehmen an, φ_ε sei glatt und erfülle die Eigenschaften in (K3) (Existenz im Anschluss). Dann gilt für $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) = C_c^\infty(\Omega)$ sofort $\varphi_\varepsilon \circ u \in C_c^\infty(\Omega)$, aber auch

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\varphi_\varepsilon \circ u, \varphi_\varepsilon \circ u) &= \int_\Omega |\nabla(\varphi_\varepsilon \circ u)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \left| \varphi_\varepsilon'(u(x)) \right|^2 |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

weil $|\varphi_\varepsilon(s) - \varphi_\varepsilon(t)| \leq |s-t|$.

Natürlich existiert ein φ_ε wie eben behauptet: Setze

$$\varrho(x) = c \cdot \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

und für $\delta > 0$

$$\varphi_\delta(x) = \delta^{-1} \varrho\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

mit $c = \left(\int_{-1}^1 \varrho(x)\right)^{-1}$. Sei $\tilde{\varphi}_\varepsilon(t) = (-\varepsilon \vee t) \wedge (1+\varepsilon)$ und setze $\varphi_\varepsilon(t) = (\varphi_\delta * \tilde{\varphi}_\varepsilon)(t)$ für $\delta \in (0, \varepsilon)$.

$\square$

Beispiel (2)**.** (a) Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ die Form aus Beispiel 1. Diese Form besitzt *mehrere* Fortsetzungen. Die kleinste Fortsetzung ist $\left(\mathcal{E}, H_0^1(\Omega)\right)$, wobei

$$H_0^1(\Omega) = C_c^\infty(\Omega), \quad \text{wobei}$$
$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \;\middle|\; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ für } 1 \leq i \leq d \right\}$$

mit $\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$ ist.

Die Markov-Eigenschaft von $\left(\mathcal{E}, H_0^1(\Omega)\right)$ ist zunächst im Allgemeinen nicht offensichtlich, da für $u \in H_0^1(\Omega)$ auch $\varphi_\varepsilon \circ u \in H_0^1(\Omega)$, wie in (K3) gefordert, gelten muss. (Alternativ, da die Form ageschlossen ist) $(u \wedge 0) \vee 1 \in H_0^1(\Omega)$. Beachte, dass wir zunächst nichts über die Regularität des Randes wissen. Für $\partial\Omega$ Lipschitz-stetig kann man die Markov-Eigenschaft per Hand beweisen. Im Allgemeinen verwendet man die Tatsache (Beweis später), dass mit $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ als abschließbare Markov-Form auch die kleinste abgeschlossene Fortsetzung eine Markov-Form ist.

(b) Eine weitere abgeschlossene Fortsetzung von $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ ist $\left(\mathcal{E}, H^1(\Omega)\right)$. Diese Form ist eine Dirichlet-Form, da $H^1(\Omega)$ ein Banachraum bezüglich $\sqrt{\mathcal{E}_1(\cdot,\cdot)}$ ist. Die Markov-Eigenschaft beweist man z.B. wie in Beispiel 1.

Beispiel (3)**.** Sei wiederrum $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und zusammenhängend. Seien $a_{ij} \in L^1_{loc}(\Omega)$ für $1 \leq i,j \leq d$. Es gelte $a_{ij} = a_{ji}$ und für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ und fast alle $x \in \mathbb{R}^d$

$$a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geq 0.$$

Wir fragen uns, unter welchen zusätzlichen Bedingungen an a_{ij} die Form

$$\mathcal{E}(u,v) = \int_\Omega a_{ij}(x)\,\partial_i u(x)\,\partial_j v(x)\;\mathrm{d}x$$

mit $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = C_c^\infty(\Omega)$ eine abschließbare Form auf $L^2(\Omega, \mathrm{d}x)$ ist.

(Allgemeiner: Studiere $\mathcal{E}(u,v) = \int_\Omega \partial_i u(x)\,\partial_j v(x)\;\nu_{ij}(\mathrm{d}x)$ auf $L^2(\Omega, \mathrm{d}m)$, wobei ν_{ij} und m Maße sind.)

Wir stellen folgende Bedingungen auf:

(3a) $a_{ij} \in L^2_{loc}(\Omega)$ mit $\partial_i a_{ij} \in L^2_{loc}(\Omega)$ für $1 \leq i,j \leq d$.

(3b) $\exists\, \lambda > 0\; \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d\; \forall\, x \in \Omega$: $\sum a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$.

Beweis. Es gelte (3a). Dann ist der Operator L mit

$$Lu = -\partial_i \left(a_{ij} \partial_j u\right) \quad \text{für } u \in C_c^\infty \left(\Omega\right)$$

definiert und symmetrisch auf $L^2 \left(\Omega, \mathrm{d}x\right)$ mit

$$\mathcal{E} \left(u, v\right) = \left(u, Lv\right).$$

Also gilt für (u_n) in $C_c^\infty \left(\Omega\right)$ mit $\|u_n\|_{L^2} \to 0$

$$\left|\mathcal{E} \left(u_n, v\right)\right| = \left|\left(u_n, Lv\right)\right| \leq \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \|Lv\|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

für $n \to \infty$.

Nun gelte (3b). Sei (u_n) in $C_c^\infty \left(\Omega\right)$ mit $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ und

$$\underbrace{\mathcal{E} \left(u_n - u_m, u_n - u_m\right)}_{= \int a_{ij} \partial_i (u_n - u_m) \partial_j (u_n - u_m)} \to 0 \quad \text{für } n, m \to \infty.$$

Nach Voraussetzung gilt auch $\int_\Omega \left|\nabla \left(u_n - u_m\right)\right|^2 \, \mathrm{d}x \to 0$. Da die Form $\int \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x$ abschließbar ist, folgt:

$$\int_\Omega \left|\nabla u_n\right|^2 \to 0.$$

Also gilt für eine Teilfolge

$$\nabla u_{n_k} \to 0 \quad \text{für } k \to \infty \text{ punktweise fast überall.}$$

Mit Hilfe des Lemmas von Fatou folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left(u_n, u_n\right) &= \int_\Omega a_{ij} \left(x\right) \partial_i u_n \partial_j u_n = \int_\Omega a_{ij} \left[\lim_{k \to \infty} \partial_i \left(u_n - u_{n_k}\right) \partial_j \left(u_n - u_{n_k}\right)\right] \, \mathrm{d}x \\ &\leq \liminf_{k \to \infty} \mathcal{E} \left(u_n - u_{n_k}, u_n - u_{n_k}\right) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty. \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel (4, Übung 3)**.** Sei V eine abzählbare Menge, z.B. $V = \mathbb{Z}^2$. Sei $E \subset V \times V$ und $b \colon E \to [0, \infty)$ mit $b\left(x, y\right) = b\left(y, x\right)$, $b\left(x, x\right) = 0$ und

$$\forall\, x \in V \colon \sum_{y \in V} b\left(x, y\right) < \infty.$$

Dann beschreibt (V, b) einen gewichteten Graphen. Die Punkte x, y sind „verbunden" $(x \sim y)$, falls $b(x,y) = b(y,x) > 0$. Seien

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \left\{ f \in l^2(V) \;\middle|\; \mathcal{E}(f,f) < \infty \right\} \text{ und}$$
$$\mathcal{E}(f,y) = \frac{1}{2} \sum_{x,y} b(x,y)\,(f(x) - f(y))\,(g(x) - g(y))\,.$$

Frage: Ist $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ eine Dirichlet-Form auf $l^2(V)$?

Beispiel (Gewichtete Graphen)**.** Vorwort: Graphen sind diskrete Objekte, können jedoch eine reiche geometrische Struktur aufweisen. In gewisser Weise ist die Klasse der Graphen genauso reichhaltig wie die Klasse der Mannigfaltikgeiten.

Sei V eine abzählbare Menge. Sei $m\colon V \to (0,\infty)$. Dann ist

$$l^2(V,m) = \left\{ f\colon V \to \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{x \in V} |f(x)|^2\, m(x) \right\}$$

ein Hilbertraum. Sei $b\colon V \times V \to [0,\infty)$ symmetrisch mit $\sum_{y \in V} b(x,y) < \infty$ für jedes $x \in X$. (Vorstellung: $b(x,y)$ gibt die Leitfähigkeit von der Verbindung von x nach y oder umgekehrt an.) Natürlich ist V ein lokal kompakter, separabler, metrischer Raum und m induziert ein Radon-Maß mit $m(A) = \sum_{x \in A} m(x)$.

Seien

$$\mathcal{E}(f,g) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} b(x,y)\,(f(y) - f(x))\,(g(y) - g(x))$$

und

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \left\{ f \in l^2(V,m) \;\middle|\; \mathcal{E}(f,f) < \infty \right\}.$$

Behauptung. $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ ist eine Dirichlet-Form.

Beweis.
- $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset l^2(V,m)$ ist ein dichter Unterraum.
- $|\mathcal{E}(f,g)|^2 \leq |\mathcal{E}(f,f)|\,|\mathcal{E}(g,g)|$, also ist $\mathcal{E}$ wohldefiniert.
- Zum Nachweis von (K3) sei φ_ε für $\varepsilon > 0$ wie dort gefordert. O.B.d.A. sei $\varphi_\varepsilon \in C^1$, dann gilt für $a, b \in \mathbb{R}$

  $$|\varphi_\varepsilon(b) - \varphi_\varepsilon(a)|^2 \leq \left\| \varphi_\varepsilon' \right\|_\infty^2 (b-a)^2 \leq (b-a)^2\,,$$

  also auch

  $$|\varphi_\varepsilon(f(y)) - \varphi_\varepsilon(f(x))| \leq (f(y) - f(x))^2$$

und es folgt

$$\mathcal{E}\left(\varphi_\varepsilon \circ f, \varphi_\varepsilon \circ f\right) \leq \mathcal{E}\left(f, f\right).$$

- Zum Nachweis der Abgeschlossenheit betrachten wir für $x, y \in V$ die Teilform

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(x,y)} &\colon l^2\left(V, m\right) \times l^2\left(V, m\right) \to [0, \infty), \quad \text{gegeben durch} \\ \mathcal{E}_{(x,y)}\left(f, g\right) &= \frac{1}{2} b\left(x, y\right)\left(f\left(y\right) - f\left(x\right)\right)\left(g\left(y\right) - g\left(x\right)\right). \end{aligned}$$

  Es gilt

$$\mathcal{E}_{(x,y)}\left(f, g\right) \leq C\left(x, y\right) \|f\|_{l^2(V,m)} \|g\|_{l^2(V,m)}$$

  und damit ist $\left(\mathcal{E}_{(x,y)}, l^2\left(V, m\right)\right)$ abgeschlossen, also eine Dirichlet-Form.

- Offensichtlich gilt $\mathcal{E}\left(f, g\right) = \sum_{x,y \in V} \mathcal{E}_{(x,y)}\left(f, g\right)$. Wenn (abzählbare) Summen abgeschlossener Formen wieder abgeschlossen wären, wären wir fertig.

$\square$

Wir betrachten nun zwei Unterbeispiele. Sei dazu V wieder abzählbar. Sei

$$E \subset \left\{\{x, y\} \mid x, y \in V, x \neq y\right\}.$$

Wir definieren $x \sim y \Leftrightarrow \{x, y\} \in E$ und nennen $e = \{x, y\}$ die Kante (engl.: edge) zwischen x und y.

Achtung: Nach dieser Definition haben Kanten keine Richtung, der Graph ist ungerichtet. Automatisch gilt $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$.

Gerichtete Graphen / Kanten kann man mittels

$$E_{dir} \subset \left\{(x, y) \in V \times V \mid x \neq y\right\}$$

erhalten. Für $x \in V$ setzen wir $d\left(x\right) = \#\left\{e \in E \mid x \in e\right\}$, $d\left(x\right)$ heißt *Graph im Punkt* $x \in V$. Wir nehmen an, dass für jedes $x \in V$ $d\left(x\right) < \infty$ gilt, d.h. der Grad ist (lokal) endlich.

Bsp. 4a. Setze $m\left(x\right) = d\left(x\right)$, $b\left(x, y\right) = 1$ für $\{x, y\} \in E$. Dann gilt

$$l^2\left(V, m\right) = l^2\left(V, d\right) = \left\{f \colon V \to \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{x \in V} \left|f\left(x\right)\right|^2 d\left(x\right) < \infty\right\}.$$

Dann gilt für

$$\left(\tilde{\Delta} f\right)(x) = \frac{1}{d(x)} \sum_{y \in V, y \sim x} (f(y) - f(x))$$

zunächst

$$\left\|\tilde{\Delta} f\right\|_{l^2(V,d)} \leq 2 \|f\|_{l^2(V,d)} \quad \text{(checken!)},$$

d.h. $\tilde{\Delta}$ ist ein *beschränkter* Operator! Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(f,g) &= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V, x \sim y} (f(y) - f(x))(g(y) - g(x)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V, x \sim y} (f(y) - f(x)) g(y) - \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V, x \sim y} (f(y) - f(x)) g(x) \\
&= - \sum_{x,y \in V, x \sim y} (f(y) - f(x)) g(x) = \sum_{x \in V} g(x) \left(-\tilde{\Delta} f\right)(x)\, d(x) \\
&= \left\langle g, -\tilde{\Delta} f \right\rangle_{l^2(V,d)}.
\end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\left\langle \tilde{\Delta} f, g \right\rangle_{l^2(V,d)} = \left\langle f, \tilde{\Delta} g \right\rangle_{l^2(V,d)}.$$

Wenn man $D\colon l^2(V,d) \to l^2(E_{dir})$ mittels $(Df)(e) = f(y) - f(x)$ für $e = (x,y)$ setzt, so ergibt sich

$$-\tilde{\Delta} = D^* \circ D,$$

was eine weitere Analogie zum euklidischen Fall darstellt.

Bsp. 4b. Setze $m = 1$, $b(x,y) = 1$ für $\{x,y\} \in E$. Also ist $l^2(V,m) = l^2(V)$. Dann gilt für

$$\Delta f(x) = \sum_{y \in V, y \sim x} (f(y) - f(x))$$

auch hier

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(f,g) &= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V, x \sim y} (f(y) - f(x))(g(y) - g(x)) = (-\Delta f, g)_{l^2(V)} \\
&= (f, -\Delta g)_{l^2(V)},
\end{aligned}$$

wobei Δ ein unbeschränkter Operator auf $l^2(V)$ ist. Häufig nennt man Δ den Graph-Laplace und $\tilde{\Delta}$ den normierten Laplace-Operator.

1.7 Definition. Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ eine Familie von

Elementen in X. Die Familie heißt *summierbar*, falls $x \in X$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ mit $\#\mathcal{F} < \infty$ existiert derart, dass

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in \mathcal{G}} x_\alpha \right\| \leq \varepsilon \quad \text{für jede Menge } \mathcal{G} \subset \mathcal{A}, \#\mathcal{G} < \infty, \mathcal{G} \supset \mathcal{F}.$$

In diesem Fall schreibt man $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x_\alpha = x$. Die Familie heißt *absolut summierbar* (oder *normal summierbar*), falls die Familie $(\|x_\alpha\|)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ summierbar ist.

Bemerkung. *Eine Familie $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ nichtnegativer, reeller Zahlen $x_\alpha \geq 0$ ist summierbar genau dann, wenn*

$$S = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} x_\alpha \;\middle|\; \mathcal{F} \subset \mathcal{A}, \#\mathcal{F} < \infty \right\} < \infty$$

gilt. In diesem Fall gilt $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x_\alpha = S$.

1.8 Proposition. *Sei $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ summierbar. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, $\#\mathcal{F} < \infty$, mit der Eigenschaft, dass für alle $\mathcal{M} \subset \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}$, $\#\mathcal{M} < \infty$, gilt:*

$$\left\| \sum_{\alpha \in \mathcal{M}} x_\alpha \right\| \leq \varepsilon. \quad \textit{(Cauchy-Eigenschaft)}$$

Beweis. Sei $x = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x_\alpha$. Wähle zu $\varepsilon > 0$ die Menge $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, $\#\mathcal{F} < \infty$, mit $\left\| x - \sum_{\alpha \in \mathcal{G}} x_\alpha \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für jedes $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$, $\#\mathcal{G} < \infty$, $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$. Für $\mathcal{M} \subset \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}$ mit $\#\mathcal{M} < \infty$ gilt

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in \mathcal{M} \cup \mathcal{F}} x_\alpha \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left\| x - \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} x_\alpha \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es gilt auch

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} &\geq \left\| x - \sum_{\alpha \in \mathcal{M} \cup \mathcal{F}} x_\alpha \right\| = \left\| x - \sum_{\alpha \in \mathcal{M}} x_\alpha - \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} x_\alpha \right\| \\ &\geq \left\| \sum_{\alpha \in \mathcal{M}} x_\alpha \right\| - \left\| x - \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} x_\alpha \right\|. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\left\| \sum_{\alpha \in \mathcal{M}} x_\alpha \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left\| x - \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} x_\alpha \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

1.9 Folgerung. *Wenn $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x_\alpha$ summierbar ist, so gilt*

$$\sup_{\mathcal{F}\subset\mathcal{A},\#\mathcal{F}<\infty}\left\|\sum_{\alpha\in\mathcal{F}} x_\alpha\right\| < \infty.$$

Insbesondere ist die alternierende harmonische Reihe $\frac{(-1)^n}{n}$ nicht summierbar.

1.10 Satz. *Seien X ein Banachraum und $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ eine Familie in X. Die Familie ist summierbar genau dann, wenn sie folgende Cauchy-Eigenschaft hat:*

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \mathcal{F}_\varepsilon\in\mathcal{A}_\#\ \forall\ M\in\mathcal{A}_\#\colon M\subset\mathcal{A}\setminus\mathcal{F}_\varepsilon\ \Rightarrow\ \left\|\sum_{\alpha\in M} x_\alpha\right\|\le\varepsilon. \tag{CE}$$

Beweis. Bereits bewiesen ist die Notwendigkeit von (CE). Es gelte nun also (CE). Wir zeigen zunächst, dass der Träger

$$S=\{\alpha\in\mathcal{A}\mid x_\alpha\neq 0\}$$

endlich oder nicht abzählbar ist.

Sei $S_\varepsilon=\{\alpha\in\mathcal{A}\mid \|x_\alpha\|>\varepsilon\}$. Dann gilt $S_\varepsilon\subset\mathcal{F}_\varepsilon$, wobei $\mathcal{F}_\varepsilon$ wie in (CE): Für $\alpha\in S_\varepsilon$ würde sonst $\alpha\notin\mathcal{F}_\varepsilon$ und somit mit $M=\{\alpha\}$ der Widerspruch $\|x_\alpha\|\le\varepsilon$ folgen.

Da $S=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{\frac{1}{n}}$ ist, folgt, dass S höchstens abzählbar ist. Sei $\sigma\colon\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ mit $\sigma(\mathbb{N})=S$ eine Abzählung des Trägers. Für $m\in\mathbb{N}$ sei $S_m=\sum_{n=0}^{m}\sigma(n)$. Wir zeigen, dass $(S_m)_m$ eine Cauchy-Folge ist.

Seien $\varepsilon>0$ beliebig und $\mathcal{F}_\varepsilon$ wie in (CE). Setze $m_\varepsilon=\max\left(\sigma^{-1}(\mathcal{F}_\varepsilon)\right)$. Dann folgt für jedes $k\in\mathbb{N}$ und alle $m>m_\varepsilon$

$$\|S_{m+k}-S_m\|=\left\|\sum_{j=m+1}^{m+k} x_{\sigma(j)}\right\|=\left\|\sum_{\alpha\in\sigma(\{n+1,\ldots,m+k\})} x_\alpha\right\|\le\varepsilon.$$

Sei S der Grenzwert der Folge $(S_n)_n$. Wir zeigen nun $\sum_{x\in\mathcal{A}} x_\alpha=S$. Sei $\varepsilon>0$ beliebig. Sei $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ derart, dass $\|S_m-S\|\le\varepsilon$ für alle $m\ge n_\varepsilon$. Sei $\mathcal{F}_\varepsilon$ wie in (CE). O.B.d.A. gilt $\mathcal{F}_\varepsilon\supset\sigma(\{0,\ldots,n_\varepsilon\})$. Setze $m_\varepsilon=\max\left(\sigma^{-1}(\mathcal{F}_\varepsilon)\right)$ und $\mathcal{F}_\varepsilon'=\sigma(\{0,\ldots,m_\varepsilon\})$. Sei $G\in\mathcal{A}_\#$

mit $G \supset \mathcal{F}_\varepsilon^{'}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left\| S - \sum_{\alpha\in G} x_\alpha \right\| &= \left\| S - \sum_{\alpha\in\mathcal{F}_\varepsilon^{'}} x_\alpha - \sum_{x\in G\setminus\mathcal{F}_\varepsilon^{'}} x_\alpha \right\| \\ &\le \left\| S - \sum_{j=0}^{m_\varepsilon} x_{\sigma(j)} \right\| + \left\| \sum_{\alpha\in G\setminus\mathcal{F}_\varepsilon^{'}} x_\alpha \right\| \\ &\le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

$\mathcal{F}_\varepsilon^{'}$ kann also in der Definition der Summierbarkeit gewählt werden.

□

Bemerkung. *Man sieht leicht, dass in einem normierten Raum für jede Bijektion* $\sigma\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *Summierbarkeit von* $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *äquivalent ist zur Summierbarkeit von* $\left(x_{\sigma(\alpha)}\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$.

1.11 Folgerung. *(1) Seien* X *ein Banachraum und die Familie* $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *absolut (d.h. normal) summierbar. Dann ist* $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *summierbar mit*

$$\left\| \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x_\alpha \right\| \le \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|x_\alpha\| .$$

(2) Eine Familie reeller Zahlen ist summierbar genau dann, wenn sie absolut summierbar ist.

Beweis. (1) Falls $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ absolut summierbar ist, so existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\mathcal{F}_\varepsilon \in \mathcal{A}_\#$ mit $\sum_{\alpha\in\mathcal{M}} \|x_\alpha\| \le \varepsilon$ für jedes $\mathcal{M} \in \mathcal{A}_\#$, $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}\setminus\mathcal{F}_\varepsilon$. Wegen $\left\|\sum_{\alpha\in\mathcal{M}} x_\alpha\right\| \le \sum_{\alpha\in\mathcal{M}} \|x_\alpha\|$ folgt (CE) für die Familie (x_α).

(2) Sei $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ eine Familie reeller Zahlen, welche summierbar ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $\mathcal{F}_\varepsilon$ gemäß (CE) derart, dass für jedes $\mathcal{M} \in \mathcal{A}_\#$, $\mathcal{M} \subset \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}_\varepsilon$

$$\left| \sum_{\alpha\in\mathcal{M}} x_\alpha \right| \le \varepsilon$$

gilt. Sei $\mathcal{M}^{'} \in \mathcal{A}_\#$ beliebig mit $\mathcal{M}^{'} \subset \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}_\varepsilon$. Dann existiert ein $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}^{'}$ mit

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{M}^{'}} |x_\alpha| \le 2 \left| \sum_{\alpha\in\mathcal{N}} x_\alpha \right| ,$$

denn diese Ungleichung kann nicht sowohl für

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0 &= \left\{\alpha \in \mathcal{M}' \;\middle|\; x_\alpha \geq 0\right\} \quad \text{und} \\ \mathcal{N}_1 &= \left\{\alpha \in \mathcal{M}' \;\middle|\; x_\alpha < 0\right\} \end{aligned}$$

falsch sein. Also folgt die absolute Summierbarkeit von (x_α).

□

Eventuell interessant sind folgende Fälle:

(1) Ein Beispiel von X, (x_α) mit (x_α) summierbar, aber nicht absolut summierbar.

(2) Ein Beispiel eines nicht vollständigen, normierten Raumes X und (x_α) derart, dass (x_α) absolut summierbar, aber nicht summierbar ist.

1.12 Satz. *Seien $(\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{D}(\mathcal{E}_\alpha))$ eine Familie von nichtnegativen, bilinearen Folgen auf einem Hilbertraum X. Setze*

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \left\{ u \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{D}(\mathcal{E}_\alpha) \;\middle|\; (\mathcal{E}_\alpha(u,u))_{\alpha \in \mathcal{A}} \text{ ist summierbar} \right\}.$$

Dann definiert die Abbildung $\mathcal{E}\colon \mathcal{D}(\mathcal{E}) \times \mathcal{D}(\mathcal{E}) \to [0,\infty)$, $\mathcal{E}(u,v) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{E}_\alpha(u,v)$ eine nichtnegative, bilineare Form auf X. Wenn alle $(\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{D}(\mathcal{E}_\alpha))$ abgeschlossen sind, so ist auch $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ abgeschlossen.

Beweis. Seien $u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Es gilt

$$\sum |\mathcal{E}_\alpha(u,v)| \leq \sum \frac{1}{2}\left(\mathcal{E}_\alpha(u,u) + \mathcal{E}_\alpha(v,v)\right).$$

Wegen Korollar 1.9 folgt, dass $\mathcal{E}_\alpha(u,v)$ absolut summierbar ist. Die Bilinearität überträgt sich ebenfalls.

Wir nehmen nun an, dass alle $(\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{D}(\mathcal{E}_\alpha))$ abgeschlossen sind. Sei (u_n) eine Cauchy-Folge bezüglich $\mathcal{E}_\alpha$. Also existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m) \leq \varepsilon \quad \text{für } n, m \geq m_\varepsilon.$$

Wir wissen also

$$\sum \mathcal{E}_\alpha(u_n - u_m, u_n - u_m) \leq \varepsilon \quad \text{für } \mathcal{F} \in \mathcal{A}_{\#},\ m, n \geq m_\varepsilon. \tag{1.1}$$

Insbesondere folgt für jedes $\alpha \in \mathcal{A}$ und$\mathcal{F} = \{\alpha\}$

$$\mathcal{E}_\alpha (u_n - u_m, u_n - u_m) \leq \varepsilon, \quad \text{falls } n, m \geq m_\varepsilon.$$

Also existiert ein $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}_\alpha)$ (zunächst ist u abhängig von α, dann aber nicht wegen Konvergenz) mit $\|u_n - u\| \to 0$. Betrachte $m \to \infty$ in (1.1). Es folgt

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{F}} \mathcal{E}_\alpha (u_n - u, u_n - u) \leq \varepsilon \quad \text{für } \mathcal{F} \in \mathcal{A}_\#,\ n, m \geq m_\varepsilon. \tag{1.2}$$

Also ist $(\mathcal{E}_\alpha (u - u_n, u - u_n))_{\alpha \in \mathcal{A}}$ summierbar, daher gilt $u - u_n \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ und somit $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Die behauptete Konvergenz folgt aus (1.2).

□

1.13 Folgerung. *Sei $(\mathcal{E}_n, \mathcal{D}(\mathcal{E}_n))$ eine wachsende Folge abgeschlossener, symmetrischer, bilinearer Formen auf einem Hilbertraum X. Setze*

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \left\{ u \in X \;\middle|\; \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n (u, u) < \infty \right\}.$$

Dann definiert die Abbildung

$$\mathcal{E}(u, v) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{E}_n (u, v) \quad \textit{für } u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$$

eine abgeschlossene Form $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ auf X.

Übung 4: Finde eine nicht abschließbare Form.

Übung 5: $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{E}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u'(x)\, v'(x)\, a(x)\ \mathrm{d}x$, wobei $a \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ meßbar. Finde ein solches a derart, dass $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ nicht abschließbar ist.

Sei $k \colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{diag} \to [0, \infty)$. Wir werden sehen, dass für eine große Klasse solcher Funktionen k nd $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen durch

$$\mathcal{E}(u, v) = \int_\Omega \int_\Omega (u(y) - u(x))\,(v(y) - v(x))\, k(x, y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \tag{1.3}$$

eine abgeschlossene Markov-Form auf $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = C_c^1(\Omega)$ bzw. $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = C^1(\Omega)$ geben ist. Funktionen dieses Typs spielen ebenso wie „Gradienten-Typ Formen" eine wichtige Rolle bei der Darstellung (regulärer) symmetrischer Dirchilet-Formen auf $L^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}x)$. Um Formen $\mathcal{E}$ wie in (1.3) verstehen zu können, benötigen wir Sobolevräume fraktionaler Ordnung.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ bezeichnet den Schwartz-Raum schnell abfallender Funktionen.

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ bezeichnet den Dualraum von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Elemente aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ heißen *temperierte Distributionen.*

Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ bezeichnet $\mathcal{F}(\varphi)$ oder $\hat{\varphi}$ die Fouriertransformation

$$\hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} \varphi(x) \ \mathrm{d}x.$$

Es gilt

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(\xi) = \check{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \varphi(x) \ \mathrm{d}x.$$

Falls $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, so definieren wir für $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$

$$(\mathcal{F}T)(\varphi) = T(\hat{\varphi}) \quad \text{und} \quad (\mathcal{F}^{-1}T)(\varphi) = T(\check{\varphi}).$$

Für $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ ist der Sobolev-Raum $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ definiert über

$$W^{m,p}\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{ f \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \partial^\alpha f \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right) \text{ für } |\alpha| \leq m \right\}.$$

Zusammen mit

$$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ist $W^{m,p}$ ein Banachraum, und es gilt

(i) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

(ii) $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sind jeweils dicht in $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.

1.14 Satz. *Die Abbildungen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ sind unitäre / isometrische Abbildungen von $W^{m,2}(\mathbb{R}^d)$ nach $L^2\left(\mathbb{R}^d, \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} \ \mathrm{d}\xi\right)$ und umgekehrt.*

Beweis. Sei $f \in W^{m,2}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_{m,2}^2 &= \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha f\|_2^2 = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\mathcal{F}(\partial^\alpha f)\|_2^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{|\alpha|\leq m} |\xi^\alpha|^2 \right) \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \ \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Beachte, dass $\left(\sum_{|\alpha|\leq m} |\xi^\alpha|^2\right) \asymp \left(1+|\xi|^2\right)^m$. Also ist $\mathcal{F}$ eine isometrische Abbildung von $W^{m,2}(\mathbb{R}^d) \to L^2\left(\mathbb{R}^d, \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} \ \mathrm{d}\xi\right)$.

Sei $g \in L^2\left(\mathbb{R}^d, \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} \, \mathrm{d}\xi\right)$. Setze $f = \mathcal{F}^{-1}(g)$. Dann gilt

$$\partial^\alpha f = i^{|\alpha|} \mathcal{F}^{-1}(x^\alpha g) \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right) \quad \text{für } |\alpha| \le m.$$

$\square$

1.15 Definition. Sei $s \in \mathbb{R}$. Wir defnieren

$$H^s\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{ f \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \xi \mapsto \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi) \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right) \right\}.$$

1.16 Satz. *Sei $s \in \mathbb{R}$. Zusammen mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g \rangle_{H^s} = \int \hat{f}(\xi) \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \cdot \overline{\hat{g}(\xi) \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}} \, \mathrm{d}\xi$$

ist $H^s\left(\mathbb{R}^d\right)$ ein Hilbertraum mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right) \subset H^s\left(\mathbb{R}^d\right) \subset \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$.

(ii) $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ *ist dicht in* $H^s\left(\mathbb{R}^d\right)$.

(iii) Für $s \in \mathbb{N}_0$ gilt $H^s\left(\mathbb{R}^d\right) = W^{s,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Beispiel. (1) $f(x) = e^{-|x|}$ für $x \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$f \in H^s\left(\mathbb{R}^d\right) \quad \Leftrightarrow \quad s < \frac{3}{2}.$$

(2) $Q_d = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; |x|_\infty \le 1 \right\}$, $f(x) = \mathbb{I}_{Q_d}(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, dann $f \in H^s\left(\mathbb{R}^d\right) \;\Leftrightarrow\; s < \frac{1}{2}$. Insbesondere ist $f \notin H^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

(3) $\delta \in H^s\left(\mathbb{R}^d\right) \;\Leftrightarrow\; s < -\frac{d}{2}$.

Wir wollen uns nun eine Charakterisierung der Norm in $H^s\left(\mathbb{R}^d\right)$ erarbeiten, die etwas mit der in (1.3) betrachteten Form $\mathcal{E}(u, v)$ zu tun hat.

Für $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}^d$, setzen wir $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$ und für $m \in \mathbb{N}$

$$\Delta_h^m f(x) = \Delta_h\left(\Delta_h^{m-1} f\right)(x).$$

Zur Erinnerung: Für $s = m + \sigma$, $m \in \mathbb{N}_0$, $0 < \sigma < 1$, sind die Hölder-Räume definiert über

$$\begin{aligned}\|f\|_{C^s(\mathbb{R}^d)} &= \|f\|_{C^m(\mathbb{R}^d)} + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^d,\\ x\neq y}} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^\sigma} \\ &\asymp \|f\|_{C^m(\mathbb{R}^d)} + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{|h|\le 1} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{|\Delta_h \partial^\alpha f(x)|}{|h|^\sigma},\end{aligned}$$

wobei $A(f) \asymp B(f) \;:\Leftrightarrow\; \exists\, c > 0 \;\forall\, f\colon\; c \le \frac{A(f)}{B(f)} \le c^{-1}$.

1.17 Definition. Sei $s = m + \sigma$ mit $m \in \mathbb{N}_0$, $0 < \sigma < 1$. Dann definieren wir

$$W^{s,2}\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{ f \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \|f\|_{W^{s,2}} < \infty \right\},$$

wobei

$$\|f\|_{W^{s,2}}^2 = \|f\|_{m,2}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_{|h|\le 1} \frac{\|\Delta_h \partial^\alpha f\|_2^2}{|h|^{2\sigma}} \frac{\mathrm{d}h}{|h|^d}.$$

Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ fixiert. Dann ist

$$\int_{|h|\le 1} \frac{\|\Delta_h \partial^\alpha f\|_2^2}{|h|^{2\sigma}} \frac{\mathrm{d}h}{|h|^d} = \int_{|h|\le 1} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\partial^\alpha f(x+h) - \partial^\alpha f(x)|^2}{|h|^{d+2\sigma}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}h = (RS).$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\partial^\alpha f(y) - \partial^\alpha f(x)|^2}{|x-y|^{d+2\sigma}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\partial^\alpha f(x+h) - \partial^\alpha f(x)|^2}{|h|^{d+2\sigma}} \,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}x \\ &= (RS) + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{|h|>1} \frac{|\partial^\alpha f(x+h) - \partial^\alpha f(x)|^2}{|h|^{d+2\sigma}} \,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}x. \\ &\le (RS) + c(\sigma,d)\,\|\partial^\alpha f\|_2^2.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\|f\|_{W^{s,2}}^2 \asymp \|f\|_{m,2}^2 + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\partial^\alpha f(y) - \partial^\alpha f(x)|^2}{|x-y|^{d+2\sigma}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

1.18 Satz. *Sei $s = m + \sigma$ mit $m \in \mathbb{N}_0$, $0 < \sigma < 1$. Dann gilt*

$$H^s\left(\mathbb{R}^d\right) = W^{s,2}\left(\mathbb{R}^d\right).$$

Sowohl $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ als auch $C_c^\infty(\Omega)$ sind dicht in $W^{s,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Beweis. Mittels eines Faltungsarguments (Standard) beweist man, dass $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ und

$\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ dicht in $W^{s,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ sind. Zu zeigen bleibt noch die Äquivalenz der Normen

$$\|f\|_{W^{s,2}} \asymp \int_{\mathbb{R}^d} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \, \mathrm{d}\xi.$$

Wir betrachten zunächst den Fall $m=0$, d.h. $0<s<1$.

$$\begin{aligned}
\int |h|^{-2\sigma} \|f(\cdot+h)-f\|_2^2 \frac{\mathrm{d}h}{|h|^d} &= \int |h|^{-2\sigma} \| \underbrace{\mathcal{F}(f(\cdot+h)-f)}_{=\left(e^{i\langle\xi,h\rangle}-1\right)\hat{f}(\xi)} \|_2^2 \frac{\mathrm{d}h}{|h|^d} \\
&= \int \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \underbrace{\left(\int \left|e^{i\langle\xi,h\rangle}-1\right|^2 |h|^{-2\sigma} \frac{\mathrm{d}h}{|h|^d}\right)}_{\int \left|e^{i\left\langle\frac{\xi}{|\xi|},t\right\rangle}-1\right|^2 |t|^{-2\sigma}|\xi|^{2\sigma} \frac{\mathrm{d}t}{|t|^d}, \quad h=\frac{t}{|\xi|}} \mathrm{d}\xi \\
&= c(\sigma,d) \int |\xi|^{2\sigma} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Damit ist der Fall $m=0$ bewiesen. Im Fall $s=m+\sigma$, $m\in\mathbb{N}$, wenden wir die eben durchgeführte Rechnung an auf die Ableitungen $\partial^\alpha f$ für $|\alpha|=m$.

□

$$\begin{aligned}
A(\xi) &= \int \left|e^{i\langle\xi,h\rangle}-1\right|^2 |h|^{-2\sigma} \frac{\mathrm{d}h}{|h|^d} \\
&= |\xi|^{2\sigma} \int \frac{\left|e^{i\left\langle\frac{\xi}{|\xi|},h\right\rangle}-1\right|^2}{|h|^{d+2\sigma}} \mathrm{d}h \\
&= 2|\xi|^{2\sigma} \int \frac{\left(1-\cos\left(\left\langle\frac{\xi}{|\xi|},h\right\rangle\right)\right)}{|h|^{d+2\sigma}} \mathrm{d}h \\
&= 2|\xi|^{2\sigma} \underbrace{\int \frac{1-\cos h_1}{|h|^{d+2\sigma}} \mathrm{d}h}_{=:\left(\mathcal{A}_{d,-\sigma}\right)^{-1}} \quad \text{für } 0<\sigma<1
\end{aligned}$$

$$A_{d,-s} := \left(\int \frac{1-\cos(h_1)}{|h|^{d+2s}} \mathrm{d}s\right)^{-1}$$

1.19 Definition. Für $0<s<1$ und $u\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ definieren wir

$$(-\Delta)^s : \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$$

über

$$(-\Delta)^2 u(x) = -\mathcal{A}_{d,-s} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{u(y)-u(x)}{|y-x|^{d\varepsilon+s}} \, \mathrm{d}y$$

Offene Fragen:

- Warum diese Bezeichnung?
- Wohldefiniertheit?
- Zusammenhang?

Bemerkung. *Für $\frac{1}{2} < s < 1$ und $u \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ oder $u \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ ist im Allgemeinen*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(y)-u(x)}{|y-x|^{d+s}} \, \mathrm{d}y$$

nicht definiert. Betrachte $x \in \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon > 0$ fixiert.

$$\begin{aligned}
\int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{u(y)-u(x)}{|y-x|^{d+\varepsilon s}} \, \mathrm{d}y &= \int_{|h|>\varepsilon} \frac{u(x+h)-u(x)}{|h|^{d+s}} \, \mathrm{d}h \\
&= \frac{1}{2}\int_{|h|>\varepsilon} \frac{u(x+h)-u(x)}{|h|^{d+s}} \, \mathrm{d}h - \frac{1}{2}\int_{|h|>\varepsilon} \frac{u(x)-u(x-h)}{|h|^{d+2s}} \, \mathrm{d}h \\
&= \frac{1}{2}\int_{|h|>\varepsilon} \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{|h|^{d+2s}} \, \mathrm{dh} \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\varepsilon<|h|\leq 1} \frac{\|D^2u\|_\infty |h|^2}{|h|^{d+2s}} \, \mathrm{d}h + \frac{1}{2}\int_{|h|>1} \frac{4\|u\|_\infty}{|h|^{d+2s}} \, \mathrm{d}h \\
&\leq c\left(\|u\|_\infty, \|D^2u\|_\infty, d, s\right).
\end{aligned}$$

1.20 Proposition. *Für $u \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$, $0 < s < 1$, $x \in \mathbb{R}^d$ gilt*

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^s u(x) &= -\mathcal{A}_{d,-s} \quad p.v. \int \frac{u(y)-u(x)}{|y-x|^{d+2s}} \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{-\mathcal{A}_{d,-s}}{2} \int \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{|h|^{d+2s}} \, \mathrm{d}h \\
&= -\mathcal{A}_{d,-s} \int \left[u(x+h)-u(x)-\langle h, \nabla u(x)\rangle \mathbb{I}_{\{\|u\|\leq 1\}}\right] |h|^{-d-2} \, \mathrm{d}h.
\end{aligned}$$

1.21 Satz. *Sei $0 < s < 1$ und $(-\Delta)^s$ definiert wie oben. Dann gilt für $u \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$*

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}\left(|\cdot|^{2s} \mathcal{F}u\right). \tag{1.4}$$

Bemerkung. • *Vergleiche hierzu den Fall $s = 1$:*

$$(-\Delta) u = \mathcal{F}^{-1}\left(|\cdot|^2 \mathcal{F}u\right).$$

- *Die Konstante $\mathcal{A}_{d,-s}$ ist also genau die richtige.*
- *Aufgrund von (1.4) nennt man $\xi \mapsto |\xi|^{2s}$* Symbol des Operators $(-\Delta)^s$.

Beweis. Es gilt

$$(x,y) \mapsto \frac{u(x+y) - 2u(x) + u(x-y)}{|y|^{d+2s}} \in L^1\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d\right).$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left((-\Delta)^s u\right)(\xi) &= \frac{-\mathcal{A}_{d,-s}}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathcal{F}(u(\cdot + y))(\xi) - 2\mathcal{F}(u)(\xi) + \mathcal{F}(u(\cdot - y))(\xi)}{|y|^{d+2s}} \, \mathrm{d}y \\
&= -\frac{\mathcal{A}_{d,-s}}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{F}u)(\xi) \left[e^{i\langle \xi, y\rangle} - 2 + e^{-i\langle \xi, y\rangle}\right] |y|^{-d-2s} \, \mathrm{d}y\right) \\
&= -\mathcal{A}_{d,-s}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - \cos(\langle \xi, y\rangle)}{|y|^{d+2s}} \, \mathrm{d}y\right)(\mathcal{F}u)(\xi).
\end{aligned}$$

Also gilt $(-\Delta)^s : H^s\left(\mathbb{R}^d\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$.

□

1.22 Folgerung. *Für $0 < s < 1$ und $u \in H^s\left(\mathbb{R}^d\right)$ gilt*

$$\left\|(-\Delta)^s u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{\mathcal{A}_{d,-s}}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(y) - u(x)|}{|y-x|^{d+2s}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\left\|(-\Delta)^s u\right\|_{L^2}^2 &= \left\|\mathcal{F}\left((-\Delta)^s u\right)\right\|_{L^2}^2 = \left\||\cdot|^{2s} \mathcal{F}u\right\|_{L^2}^2 \\
&= \frac{\mathcal{A}_{d,-s}}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(y) - u(x)|^2}{|y-x|^{d+2s}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. *Bei der Definition der Seminorm in $W^{s,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ sollte man, wenn man sich für $s \searrow 0$ bzw $s \nearrow 1$ interessiert, den Faktor $\frac{\mathcal{A}_{d,-s}}{1}$ „mitnehmen".*

Wir studieren nun $\mathcal{A}_{d,-s}$ in diesen Fällen, wobei $d \geq 2$ ist.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1-\cos(h_1)}{|h|^{d+2s}}\,\mathrm{d}h &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{1-\cos(h_1)}{|h_1|^{d+2s}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{|h'|^2}{|h_1|}\right)^{\frac{d+2s}{2}}}\,\mathrm{d}h'\,\mathrm{d}h \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\frac{1-\cos(h_1)}{|h_1|^{1+2s}}\right) \cdot \frac{1}{\left(1+|\eta|^2\right)^{\frac{d+2s}{2}}}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}h \\
&= s^{-1}(1-s)^{-1} A(d,s)\, B(s),
\end{aligned}
$$

wobei

$$
A(d,s) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{\left(1+|\eta|^2\right)^{\frac{d+2s}{2}}}\,\mathrm{d}\eta \quad \text{und}
$$

$$
B(s) = s(1-s)\int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos(t)}{|t|^{1+2s}}\,\mathrm{d}t.
$$

Die Funktion $s \mapsto A(d,s)$ ist stetig in $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$, für $s \in [0,1]$ ergeben sich keine Probleme.

$$
\begin{aligned}
A(d,s) \quad &= \quad \left|s^{d-2}\right| \int_0^\infty \frac{r^{d-2}}{(1+r^2)^{\frac{d+2s}{2}}}\,\mathrm{d}s \\
&\xrightarrow{s \nearrow 1} \quad \omega_{d-2}\int_0^\infty \frac{r^{d-2}}{(1+r^2)^{\frac{d+2}{2}}}\,\mathrm{d}r \\
\text{bzw.} \quad &\to \quad \omega_{d-2}\int_0^\infty \frac{r^{d-2}}{(1+r^2)^{\frac{d}{2}}}\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

1.23 Lemma. *(i)* $\lim_{s\nearrow 1} B(s) = \frac{1}{2}$.

(ii) $\lim_{s\searrow 0} B(s) = 1$.

Beweis.

$$
\int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos(t)}{|t|^{1+2s}}\,\mathrm{d}t = \int_{|t|\geq 1} \frac{1-\cos(t)}{|t|^{1+2s}}\,\mathrm{d}t + \int_{|t|<1} \frac{1-\cos(t)}{|t|^{1+2s}}\,\mathrm{d}t.
$$

$$
0 \leq \int_{|t|\geq 1} \frac{1-\cos(t)}{|t|+2s}\,\mathrm{d}t \leq 4\int_1^\infty \frac{1}{t^{1+2s}}\,\mathrm{d}t \leq 4\left[\cdot\frac{1}{2s}\left(t^{-2s}\right)\right]_1^\infty \leq \frac{2}{s}.
$$

Also $\lim_{s\nearrow 1} s(1-s)\int_{|t|\geq 1} \frac{1-\cos(t)}{|t|^{1+2s}}\,\mathrm{d}t = 0$.

(i)

$$
\begin{aligned}
0 \le \int_{|t|\ge 1} \frac{1-\cos(t)}{|t|^{1+2s}} \le 4\int_1^\infty \frac{1}{t^{1+2s}} = \frac{2}{s} \\
\Rightarrow \lim_{s\nearrow 1} s(1-s)\int_{|t|\ge 1} \frac{1-\cos(t)}{|t|^{1+2s}}\,\mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{|t|\le 1} \frac{1-\cos(t)}{|t|^{1+2s}}\,\mathrm{d}t - \int_{|t|\le 1} \frac{\frac{t^2}{2}}{|t|^{1+2s}}\,\mathrm{d}t\right| &\le c_1 \int_{|t|\le 1} \frac{|t|^3}{|t|^{1+2s}}\,\mathrm{d}t \\
&\le c_2 \int_0^1 t^{2-2s}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{c_2}{3-2s} t^{3-2s}\right]_0^1 \\
&= \frac{c_2}{3-2s}
\end{aligned}
$$

und somit folgt

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\nearrow 1} s(1-s)\int_{|t|\le 1} \frac{1-\cos(t)}{|t|^{1+2s}}\,\mathrm{d}t &= \lim_{s\nearrow 1} s(1-s)\int_{|t|\le 1} \frac{\frac{t^2}{2}}{|t|^{1+2s}}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{s\nearrow 1} s(1-s)\int_0^1 t^{1-2s}\,\mathrm{d}t = \lim_{s\nearrow 1} \frac{s(1-s)}{2-2s} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
0 \le \int_{|t|\le 1} \frac{1-\cos(t)}{|t|^{1+2s}}\,\mathrm{d}t \le c_3 \int_0^1 t^{1-2s}\,\mathrm{d}t = \frac{c_3}{2-2s} \\
\Rightarrow \lim_{s\searrow 0} s(1-s)\int_{|t|\le 1} \frac{1-\cos(t)}{|t|^{1+2s}}\,\mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}
$$

Tatsache (vgl. Analysis 1):

$$
\exists\ c_4 \ge 0\ \forall\ s \in (0,1):\ \left|\int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t^{1+2s}}\,\mathrm{d}t\right| \le c_4.
$$

Beweis davon pber $\int_{2k\pi} \frac{\cos(t)}{t^{1+2s}}\,\mathrm{d}t \le \frac{c}{k^2}$. Deswegen gilt

$$
\left|\int_{|t|\ge 1} \frac{1-\cos(t)}{|t|^{1+2s}}\,\mathrm{d}t - \int_{|t|\ge 1} \frac{1}{|t|^{1+2s}}\,\mathrm{d}t\right| \le c_4.
$$

Also folgt

$$\begin{aligned}\lim_{s\searrow 0} B(s) &= \lim_{s\searrow 0} s(1-s)\int_{|t|\geq 1}\frac{1}{|t|^{1+2s}}\,\mathrm{d}t = \lim_{s\searrow 0} s(1-s)\cdot 2\int_1^\infty t^{-1-2s}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{s\searrow 0}\frac{s(1-s)\cdot 2}{2s} = 1.\end{aligned}$$

□

Übung: $B = B(0,1)$. Sei (u_n) Folge in $C_c(B)$ mit

$$\begin{aligned} u_n(x) = 1 \quad &\text{auf } B\left(0, 1-\frac{2}{n}\right), \\ u_n(x) = 0, \quad &\text{auf } B(0,1)\setminus B\left(0,1-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

und $|\nabla u_n(x)| \leq cn$. Untersuchen Sie den Ausdruck

$$\int_B\int_B \frac{|v_n(y)-v_n(x)|^2}{|y-x|^{d+2s}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{für } v_n = 1-u_n$$

auf Konvergenz.

1. Betrachten Sie $s\in(0,1)$ und machen sie ggf. eine Fallunterscheidung.

2. Betrachten Sie die Fortsetzung $\tilde{v_n}$ und $[\tilde{v_n}]_{s,2}$.

1.24 Proposition. *Durch cleveres, iteratives Integrieren beweist man*

(i)

$$\lim_{s\nearrow 1}\frac{\mathcal{A}_{d,-2s}}{s(1-s)} = \frac{4d}{\omega_{d-1}}.$$

(ii)

$$\lim_{s\searrow 0}\frac{\mathcal{A}_{d,-2s}}{s(1-s)} = \frac{2}{\omega_{d-1}}.$$

Hierbei ist wie üblich $\omega_{d-1} = \left|S^{d-1}\right|$.

Beweis. Vgl. Hitchhiker's guide to fractional sobolev spaces, arxiv.org.

1.25 Satz. *Seien $d \geq 1$, $u \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt*

$$\lim_{s \nearrow 1} (-\Delta)^s u(x) = (-\Delta u)(x) \quad \textit{und}$$
$$\lim_{s \searrow 0} (-\Delta)^s u(x) = u(x).$$

Beweis. Übung.

1.26 Definition. Für $s \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ ist

$$H^{s,p}\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{ f \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \mathcal{F}^{-1}\left(\left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}} \hat{u}(\xi)\right) \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right) \right\}$$

mit

$$\|f\|_{H^{s,p}\left(\mathbb{R}^d\right)} = \left\| \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}} \hat{u}(\xi) \right\|_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)}.$$

Man kann nun für $s = m \in \mathbb{N}$ und $p \geq 1$ zeigen:

$$H^{m,p}\left(\mathbb{R}^d\right) = W^{m,p}\left(\mathbb{R}^d\right).$$

Sei $s = m + \sigma$ mit $m \in \mathbb{N}$, $0 < \sigma < 1$, $p \geq 1$, $p \neq 2$. Dann gilt leider *nicht*:

$$\|f\|^p_{H^{s,p}\left(\mathbb{R}^d\right)} \asymp \|f\|^p_{W^{m,p}\left(\mathbb{R}^d\right)} + \sum_{|\alpha|=m} \int\int \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{d+\sigma p}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(O.k. und bewiesen für $p = 2$, $s = m \in \mathbb{N}$.) Die Menge aller $f \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$, für welche

$$\|f\| = \left(\|f\|_{W^{m,p}\left(\mathbb{R}^d\right)} + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{d+\sigma p}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}}$$

endlich ist, bezeichnet man mit $B^s_{p,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ (*Besov-Raum*).

Merkregel: Im Ganzraum gilt: „Sobolev = Besov", falls $p = 2$ oder $s \in \mathbb{N}$.

Im Falle offener Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ gibt es zwei natürliche Arten, Sobolevräume $W^{s,2}(\Omega)$ zu definieren. Die folgende Definition ist naheliegend, elegant und unpraktisch.

1.27 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $s > 0$, $p \geq 1$.

$$H^{s,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \text{Es gibt ein } \tilde{f} \in H^{s,p}\left(\mathbb{R}^d\right) \text{ mit } \tilde{f}\restriction_\Omega = f \right\}$$

1.28 Proposition. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $s > 0$. Dann wird der Vektorraum $H^{s,2}(\Omega)$, versehen mit der Norma*

$$\|f\|_{H^{s,2}(\Omega)} = \inf \left\{ \left\|\tilde{f}\right\|_{H^{s,2}(\Omega)} \;\middle|\; \tilde{f} \in H^{s,2}\left(\mathbb{R}^d\right),\ \tilde{f}\restriction_\Omega = f \right\}$$

zu einem Hilbertraum mit $C_c^\infty(\Omega) \subset H^{s,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Die beiden Räume $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)\big|_\Omega$ und $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)\big|_\Omega$ liegen dicht in $H^{s,2}(\Omega)$.

Man verwendet folgende allgemeine Beobachtung:

1.29 Satz. *Seien X ein Banachrau und $M \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Sei X/M der Quotienten- oder Faktorraum. Dieser ist dann bezüglich der Norm*

$$\|\xi\| = \inf_{x\in\xi} \|x\|_X$$

vollständig.

Beweis. Übung.

Beweis von 1.28. Idee: $H^{s,2}(\Omega) = H^{s,2}\left(\mathbb{R}^d\right)/\widetilde{H^{s,2}(\Omega^\complement)}$, wobei

$$\widetilde{H^{s,2}(\Omega^\complement)} = \left\{ f \in H^{s,2}\left(\mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \operatorname{supp}(f) \subset \Omega^\complement \right\}$$

abgeschlossener Unterraum von $H^{s,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

□

1.30 Satz. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $\partial\Omega \in C^\infty$ und $s = m+\sigma$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $0 < \sigma < 1$. Dann gilt für $f \in H^{s,2}(\Omega)$*

$$\|f\|^2_{H^{s,2}(\Omega)} \asymp \sum_{|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha f\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|^2}{|x-y|^{d+2\sigma}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

wobei die Proportionalitätskonstante für $m = 0$, $s_0 < s < 1$ unabhängig von s (aber abhängig von s_0) gewählt werden kann.

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $\Omega = \mathbb{R}^d_+ = \left\{ \left(x', x_d\right) \;\middle|\; x' \in \mathbb{R}^{d-1}, x_d > 0 \right\}$ und $m = 0$, $\sigma = s \in (0,1)$. Für $f \in H^{s,2}\left(\mathbb{R}^d_+\right) \cap C\left(\mathbb{R}^d_+\right)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset B_1(0)$ setzen wir

$$\tilde{f}(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, x_d) = f(x_1, \ldots, x_{d-1}, -x_d) = f\left(x', -x_d\right).$$

Dann gilt $\tilde{f} \in C\left(\mathbb{R}^d\right) \cap L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$. Zu zeigen ist

$$(I) := \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\left|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\right|^2}{|x-y|^{d+2s}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq c \int_{\mathbb{R}^d_+} \int_{\mathbb{R}^d_+} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

denn $\|\tilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\|f\|_{L^2\left(\mathbb{R}^d_+\right)}$ ist klar! Offenbar ist

$$(I) = \int_{\mathbb{R}^d_+} \int_{\mathbb{R}^d_+} (\dots) + \int_{\mathbb{R}^d_-} \int_{\mathbb{R}^d_-} (\dots) + 2 \int_{\mathbb{R}^d_+} \int_{\mathbb{R}^d_-} (\dots)$$

und es gilt (wir betrachten nun den 3. Term von (I))

$$\int_{\mathbb{R}^d_+} \int_{\mathbb{R}^d_-} \frac{\left|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\right|^2}{|x-y|^{d+2s}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \int_{\mathbb{R}^d_+} \int_{\mathbb{R}^d_+} \frac{|f(z) - f(y)|^2}{|z-y|^{d+2s}} \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y,$$

da $|x-y| \geq \left|\left(x', -x_d\right) - y\right|$, wobei $\left(x', -x_d\right) = z$ ist.

□

Zusammenfassung:

(1) $m \in \mathbb{N}_0$, $p \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen.

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) \mid \partial^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ für } |\alpha| \leq m \right\},$$
$$\|f\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

(2) $s \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$.

$$H^{s,p}\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{ f \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right) \,\middle|\, \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi) \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right) \right\},$$
$$\|f\|_{H^{s,p}\left(\mathbb{R}^d\right)} \overset{s \geq 0}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \hat{f}(\xi) \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \right|^p \mathrm{d}\xi.$$

(3) $s = m \in \mathbb{N}_0$: $H^{m,p}\left(\mathbb{R}^d\right) = W^{m,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

(4) $p=2$, $s=m+\sigma$, $m\in\mathbb{N}_0$, $0<\sigma<1$. $H^s\left(\mathbb{R}^d\right) := H^{s,2}\left(\mathbb{R}^d\right) = W^{s,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

$$\|f\|^2_{H^2\left(\mathbb{R}^d\right)} \asymp \|f\|^2_{H^{m,2}\left(\mathbb{R}^d\right)} + \underbrace{c\left(d,s\right)}_{\substack{\text{nur wichtig für}\\ \sigma\searrow 0,\\ \sigma\nearrow 1.}} \sum_{|\alpha|\le m} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\left|\partial^\alpha f\left(x\right)-\partial^\alpha f\left(y\right)\right|^2}{\left|x-y\right|^{d+2\sigma}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Beachte

$$\left\|\left(-\Delta\right)^{\frac{s}{2}} f\right\|^2_{L^2\left(\mathbb{R}^d\right)} = \frac{\mathcal{A}_{d,-2s}}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|^2}{\left|x-y\right|^{d+2s}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(5) $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ offen, $s>0$, $p\ge 1$.

$$H^{s,p}\left(\Omega\right) = \left\{ f\in L^p\left(\Omega\right) \;\middle|\; \exists\,\tilde f\in H^{s,p}\left(\mathbb{R}^d\right):\ \tilde f\restriction_\Omega = f\right\},$$
$$\|f\|_{H^{s,p}(\Omega)} = \inf\left\{ \left\|\tilde f\right\|_{H^{s,p}(\Omega)} \;\middle|\; \tilde f\in H^{s,p}\left(\mathbb{R}^d\right):\ \ \tilde f\restriction_\Omega = f\right\}.$$

(6) $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ offen, $\partial\Omega\in C^\infty$, $p=2$, $s=m+\sigma$, $m\in\mathbb{N}_0$, $0<\sigma<1$.

$$\|f\|^2_{H^{s,2}(\Omega)} \asymp \sum_{|\alpha|\le m}\|\partial^\alpha f\|_{L^2(\Omega)} + c\left(d,s\right)\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|^2}{\left|x-y\right|^{d+2\sigma}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Bemerkung. *$\partial\Omega\in C^\infty$ ist nicht notwendig, aber ohne Regularitätsbedingungen an $\partial\Omega$ ist die Aussage falsch.*

1.31 Proposition. *Seien $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ offen, $0<s<1$. Dann ist mit*

$$\mathcal{E}\left(u,v\right) = \int_\Omega\int_\Omega \frac{\left(u\left(x\right)-u\left(y\right)\right)\left(v\left(x\right)-v\left(y\right)\right)}{\left|x-y\right|^{d+2s}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
$$\mathcal{D}\left(\mathcal{E}\right) = C_c^\infty\left(\Omega\right)$$

das Tupel $\left(\mathcal{E},\mathcal{D}\left(\mathcal{E}\right)\right)$ eine abschließbare Markov-Form in $L^2\left(\Omega\right)$.

(7) $\Omega\subset\mathbb{R}^d$, $0<s<1$, $p\ge 1$.

$$W^{s,p}\left(\Omega\right) = \left\{ f\in L^p\left(\Omega\right) \;\middle|\; \int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|^p}{\left|x-y\right|^{d+sp}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<\infty\right\}$$

mit

$$\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \|f\|^p_{L^p(\Omega)} + c\left(d,s,p\right)\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|^p}{\left|x-y\right|^{d+sp}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Achtung: Die Konstante $c(d, s, p)$ ist alleine dafür da, dass man (zumindest im Fall, dass $\partial\Omega$ regulär ist) im Grenzfall $s \nearrow 1$ erhält

$$[f]_{W^{s,p}(\Omega)} \to [f]_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \text{für } s \nearrow 1.$$

Wir untersuchen, in welchem Sinne für Funktionen

$$f \in W_0^{s,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)} \quad (\text{abg. bzgl. } \|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)})$$

gilt, dass sie am Rand $\partial\Omega$ „Null" sind.

1.32 Satz. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $\frac{1}{2} < s < 1$. Es sei $\partial\Omega$ lipschitz-regulär.*

(1) Dann existiert ein Spuroperator $\mathrm{Tr}\colon W^{s,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ *mit*

$$\|f\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad \textit{und}$$
$$\mathrm{Tr}(f) = 0 \quad \textit{f.ü. auf } \partial\Omega \textit{ für } f \in W_0^{s,p}(\Omega).$$

(2) Es gibt $c \ge 1$ derart, dass für alle $f \in W_0^{s,p}(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \frac{|f(x)|^p}{\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)^{2s}}\,\mathrm{d}x \le c\int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{d+sp}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{(Hardy-Ungleichung)}$$

<u>*Beachte:*</u> *Für $\Omega = B = B(0)$ ist $\int_B \frac{1}{\operatorname{dist}(x,\partial B)}\,\mathrm{d}x = \infty$ (Übung).*

Für $0 < s \le \frac{1}{2}$ und $p > 1$ gilt die Hardy-Ungleichung nicht. In diesem Fall sind Funktionen $f \in W_0^{s,p}(\Omega)$ in keiner Weise „Null" am Rand.

<u>Achtung:</u> Wenn man $W_0^{\frac{1}{2},p}(\Omega)$ irgendwie anders (Fortsetzung durch Null und Fourier-Transformation) definiert, muss man genau aufpassen. Der Fall $s = \frac{1}{2}$ ist für Randwerte kritisch.

1.33 Satz. *Sei $0 < s \le \frac{1}{2}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $\partial\Omega$ lipschitz-regulär. Sei $c \ge 1$. Sei (u_n) eine Folge in $C_c^\infty(\Omega)$ mit*

(i) $u_n = 1$ *auf* $A_n = \left\{x \in \Omega \,\middle|\, \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > \frac{1}{2n}\right\}$.

(ii) $u_n = 0$ *auf* $\Omega \setminus A_n$.

(iii) $0 \le u_n \le 1$ *und* $|\nabla u_n(x)| \le cn \; \forall\, x \in \Omega$.

Dann gilt im Fall $0 < s < \frac{1}{2}$ *für* $n \to \infty$

$$\int_\Omega \frac{|u_n(x)|^p}{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^{2s}} \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)} < \infty,$$
$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u_n(y) - u_n(x)|^p}{|x-y|^{d+sp}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \to 0.$$

Im Fall $s = \frac{1}{2}$ *gilt*

$$\int_\Omega \frac{|u_n(x)|^p}{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^{2s}} \,\mathrm{d}x \to \infty \quad \textit{für } n \to \infty,$$
$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u_n(y) - u_n(x)|^p}{|x-y|^{d+sp}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \le K \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. $p = 2,\ d = 1,\ u_n \in C_c^{0,1}((0,1))$.

$$I_n^s = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|u_n(y) - u_n(x)|^2}{|x-y|^{1+2s}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Zeige:

$$I_n^s \to 0 \quad \text{für } n \to \infty \quad \left(0 < s < \frac{1}{2}\right),$$
$$I_n^{\frac{1}{2}} \le K \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nutze

$$I_n \le 2 \int_0^{\frac{1}{n}} \int_0^1 [\dots] = 2 \sum_{l=0}^{\frac{n-2}{2}} \underbrace{\int_{\frac{2l}{n}}^{\frac{2(l+1)}{n}} \int_0^1 [\dots]}_{=: A_{n,l}}$$

und für $A_{n,0}$ benutze $|u_n(x) - u_n(y)| \le c\,|x-y|$. Für $A_{n,l}$ und $l \ge 1$ benutze $|u_n(x) - u_n(y)| \le 2$.

□

2 Halbgruppen, Resolventen und Generatoren

2.1 Abgeschlossene lineare Operatoren

2.1 Definition. Seien X, Y Banachräume. Seien $\mathcal{D}(A) \subset X$ ein Unterraum und $\mathcal{A}\colon \mathcal{D}(A) \to Y$ linear. Dann nennen wir $(A, \mathcal{D}(A))$ *linearen Operator von X nach Y.*

Für uns wird in der Vorlesung häufig der Fall $X = Y$ und $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ von Interesse sein, insbesondere auch der Fall, dass $X = Y$ ein Hilbertraum ist.

2.2 Definition. Ein linearer Operator $A\colon \mathcal{D}(A) \subset X \to Y$ heißt *beschränkt*, falls $C \geq 1$ existiert mit

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \text{für } x \in \mathcal{D}(A).$$

Ein Operator, der nicht beschränkt ist, heißt *unbeschränkt*.

Durch $\|A\| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(A),\\ \|x\|_X=1}} \|Ax\|_Y$ wird eine Norm auf dem Raum der Operatoren definiert. Mit $\mathcal{L}(X;Y)$ bezeichnet man den Banachraum der beschränkten Operatoren $A\colon X \to Y$.

2.3 Definition. Der Operator $\left(\tilde{A}, \mathcal{D}\left(\tilde{A}\right)\right)$ heißt *Fortsetzung des Operators* $(A, \mathcal{D}(A))$, falls $\mathcal{D}\left(\tilde{A}\right) \supset \mathcal{D}(A)$ und $A = \tilde{A}$ auf $\mathcal{D}(A)$.

2.4 Proposition. *Sei $(A, \mathcal{D}(A))$ ein beschränkter Operator von X nach X. Sei X ein Hilbertraum oder $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. In beiden Fällen besitzt $(A, \mathcal{D}(A))$ eine Fortsetzung $\left(\tilde{A}, \mathcal{D}\left(\tilde{A}\right)\right)$ mit $\mathcal{D}\left(\tilde{A}\right) = X$ und $\left\|\tilde{A}\right\| = \|A\|$.*

Beweis. Im Fall $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ ist eine Fortsetzung mithilfe der Stetigkeit klar. Im Fall, dass X ein Hilbertraum ist: Zunächst Fortsetzung auf $\overline{\mathcal{D}(A)}$, dann

$$\tilde{A}x = \begin{cases} Ax, & \text{falls } x \in \overline{\mathcal{D}(A)}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathcal{D}(A)^{\perp}. \end{cases}$$

□

Beispiel. Wenn man den Laplace-Operator $A = \Delta$ als Operator A auf $L^2((0,1))$ definieren möchte, so muss man den domain angeben.

(a) $\mathcal{D}(A) = C_c^\infty((0,1))$.

(b) $\mathcal{D}(A) = \left\{ f \in C^2([0,1]) \,\middle|\, f(0) = f(1) = 0 \right\}$.

(c) $\mathcal{D}(A) = \left\{ f \in C^2([0,1]) \,\middle|\, f'(0) = f'(1) = 0 \right\}$.

2.5 Definition. Für einen linearen Operator $A\colon \mathcal{D}(A) \subset X \to Y$ bezeichnet man mit

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(A) &= \{ y \in Y \mid \exists\, x \in \mathcal{D}(A) : y = Ax \} \\ &= \{ Ax \mid x \in \mathcal{D}(A) \} \end{aligned}$$

den sog. *„range"* von $(A, \mathcal{D}(A))$.

Mit $\mathcal{N}(A)$ bezeichnen wir den Kern, d.h.

$$\mathcal{N}(A) = \{ x \in X \mid Ax = 0 \}.$$

Mit $\Gamma(A)$ bezeichnen wir den Graphen von A, d.h.

$$\Gamma(A) = \{ (x, Ax) \mid x \in \mathcal{D}(A) \} \subset X \times Y.$$

2.6 Definition. Ein Operator $(A, \mathcal{D}(A))$ heißt *abgeschlossen*, falls $\Gamma(A)$ in $X \times Y$ abgeschlossen ist. Er heißt *abschließbar*, wenn er eine abgeschlossene Fortsetzung besitzt. Die kleinste abgeschlossene Fortsetzung eines abgeschließbaren Operators $(A, \mathcal{D}(A))$ bezeichnen wir mit $\left(\bar{A}, \mathcal{D}\left(\bar{A}\right)\right)$.

2.7 Lemma. *Ein Operator $(A, \mathcal{D}(A))$ ist abgeschlossen genau dann, wenn für jede Folge $(x_n) \in \mathcal{D}(A)$ aus $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ folgt:*

$$x \in \mathcal{D}(A), \ Ax = y.$$

2.8 Lemma. *Ein Operator $(A, \mathcal{D}(A))$ ist abschließbar genau dann, wenn für jede Folge (x_n) in $\mathcal{D}(A)$ mit $x_n \to 0$ gilt:*

$$Ax_n \to 0 \quad \textit{oder} \quad \lim_{n\to\infty} Ax_n \ \textit{existiert nicht.}$$

Beispiel. (a) $X = C^1([0,1])$, $Y = C([0,1])$. $\mathcal{D}(A) = X$, $Au = u'$. Dann ist $(A, \mathcal{D}(A))$

ein beschränkter Operator von X nach Y, weil

$$\|u_n'\|_\infty \le c\left(\|u_n'\| + \|u_n\|_\infty\right).$$

(b) Sei $X = L^2((0,1))$, $\mathcal{D}(A) = C^1([0,1])$, $Y = X$, $Au = u'$. Dann ist $(A, \mathcal{D}(A))$ ein unbeschränkter Operator von Xnach Y, denn für $u_n(x) = e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$, ergibt sich ein Widerspruch zu:

$$\exists\, C \ge 1\, \forall\, n\colon \left\|-ne^{-nx}\right\|_{L^2} \le C\left\|e^{-nx}\right\|_{L^2}.$$

(c) Alles wie in (b), aber mit $\mathcal{D}(A) = \left\{u \in C^1([0,1]) \,\middle|\, u(0) = 0\right\}$. Dann ist der unbeschränkte Operator $(A, \mathcal{D}(A))$ invertierbar.

(d) Für $(A, \mathcal{D}(A))$ wie in (c) ergibt sich

$$\mathcal{D}\left(\bar{A}\right) = \left\{u \in H^1((0,1)) \,\middle|\, u(0) = 0\right\}.$$

2.9 Satz. *Seien $(A, \mathcal{D}(A))$ ein abgeschlossener Operator von X nach Y und $\mathcal{D}(A)$ abgeschlossen in X. Dann ist $(A, \mathcal{D}(A))$ bereits beschränkt.*

Äquivalent hierzu:

- Sei $A \in \mathcal{L}(X;Y)$ surjektiv. Dann ist A offen. (Satz von der offenen Abbildung)
- Sei $A \in \mathcal{L}(X;Y)$ bijektiv. Dann ist A^{-1} beschränkt. (Satz von der beschränkten Inversen)

Jeder halbwegs vernünftige Differentialoperator (Integrodiff.op.) ist abschließbar. Nichtsdestotrotz existieren nicht abschließbare Operatoren.

Beispiel. $X = L^2(\mathbb{R})$, $Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(A) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ messbar} \mid |f| \le 1,\ |\operatorname{supp}(f)| < \infty\}$, $Au = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,\mathrm{d}x$.

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & |x| \le n, \\ 0; & |x| > n. \end{cases}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-n}^{+n} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n}(2n)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \to 0.$$

$$Au_n = \int_{-n}^{n} \frac{1}{n}\,\mathrm{d}x = 2.$$

2.2 Ein bisschen Spektraltheorie

2.10 Definition. Seien $(A, \mathcal{D}(A))$ ein abgeschlossener Operator von X nach X und $\lambda \in \mathbb{C}$. Falls der Operator $\lambda I - A\colon \mathcal{D}(A) \to X$ bijektiv ist, so bezeichnen wir die Inverse mit $R(\lambda, A)$, $R_\lambda(A)$ bzw. mit $(\lambda - A)^{-1}$. Wir setzen

$$\varrho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A\colon \mathcal{D}(A) \to X \text{ ist bijektiv}\},$$

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \varrho(A).$$

$\varrho(A)$ heißt *Resolventenmenge*, $\sigma(A)$ heißt *Spektrum*, $R(\lambda, A)$ *Resolvente*, $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ *Resolventenabbildung*.

Bemerkung. *Die Elemente des Spektrums $\sigma(A)$ lassen sich noch weiter klassifizieren.*

2.11 Lemma. *Für λ, $\mu \in \varrho(A)$ gilt:*

$$R(\lambda, A)\, R(\mu, A) = R(\mu, A)\, R(\lambda, A) \tag{0}$$

$$AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - I1$$

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)\, R(\lambda, A)\, R(\mu, A) \tag{2}$$

Beweis. (1)

$$(\lambda - A)\, x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = R(\lambda, A)\, y.$$

$$A\left(R(\lambda, A)\, y\right) = \lambda R(\lambda, A)\, y - y$$

$$Ax = \lambda x - y \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - A)\, x = y.$$

(2) Aus (1) folgt

$$(\lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A))\, R(\mu, A) = R(\mu, A) \tag{2.1}$$

und

$$(\mu R(\mu, A) - AR(\mu, A))\, R(\lambda, A) = R(\lambda, A). \tag{2.2}$$

(2.2) - (2.1) liefert

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) - R(\mu, A) &= \mu R(\mu, A)\, R(\lambda, A) - \lambda R(\lambda, A)\, R(\mu, A) \\ &= (\mu - \lambda)\, R(\lambda, A)\, R(\mu, A). \end{aligned}$$

$\square$

In Definition 2.10 könnte man die Voraussetzung, dass $(A, \mathcal{D}(A))$ abgeschlossen ist, fallen lassen. Allerdings gibt es dann keine Resolvente, denn es gilt $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

Beweis davon: Sei $\lambda \in \varrho(A)$. Dann ist $B = (\lambda I - A)^{-1}$ nach Definition beschränkt. Sei nun $(u_n)_n$ in $\mathcal{D}(A)$ eine Folge mit $u_n \to u$ und $Au_n \to v$ für $u, v \in X$. Setze $h_n = (\lambda I - A)\, u_n$. Dann gilt $h_n \to \lambda u - v$. Also gilt

$$B(\lambda u - v) = \lim_{n \to \infty} Bh_n = \lim_{n \to \infty} u_n = u.$$

Demnach gilt $v \in \mathcal{D}(A)$ mit $(\lambda I - A)\, u = \lambda u - v \;\Leftrightarrow\; Au = v$, was zu zeigen war.

$\square$

2.12 Proposition. *Die Resolventenmenge $\varrho(A)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Falls $\mu \in \varrho(A)$, so gilt für $c = \|R(\mu, A)\|$ die Inklusion $B_{\frac{1}{c}}(\mu) \subset \varrho(A)$. Für $\lambda \in \varrho(A)$ mit $|\lambda - \mu| < \frac{1}{c}$ gilt*

$$R(\mu, A) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^k R(\mu, A)^{k+1}.$$

Die Abbildung $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ ist also lokal analytisch mit

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n \cdot n! \cdot R(\lambda, A)^{n+1}.$$

Beweis. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\lambda - A = \mu - A - (\mu - \lambda) = \left(\mathrm{Id} - \underbrace{(\mu - \lambda)\, R(\mu, A)}_{=:T} \right) (\mu, A)$$

(vgl. Neumann-Reihe). Falls $\|(\mu - \lambda)\, R(\mu, A)\| < 1$, d.h. falls $|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|R(y,A)\|} = \frac{1}{c}$, ist $\mathrm{Id} - T$ invertierbar. In diesem Fall gilt

$$(\mathrm{Id} - (\mu - \lambda)\, R(\mu, A))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^k R(\mu, A)^k. \tag{2.3}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) &= R(\mu, A)\, (\mathrm{Id} - (\mu - \lambda)\, R(\mu, A))^{-1} \\ &\overset{(2.3)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^k R(\mu, A)^{k+1}. \end{aligned}$$

$\square$

Man kann noch festhalten, dass für jede Folge (λ_n) in $\varrho(A)$ mit $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lambda^*$ gilt:

$$\lambda^* \in \sigma(A) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_n, A)\| = \infty,$$
$$\lambda^* \in \varrho(A) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_n, A)\| < \infty.$$

Beweis davon: Für $\mu \in \varrho(A)$ ist $\operatorname{dist}(\mu, \sigma(A)) \geq \frac{1}{\|R(\lambda,A)\|}$, d.h. falls $\|R(\lambda_n, A)\|$ beschränkt bleibt, so muss $\lambda^* \in \varrho(A)$ gelten.

Falls $\lambda^* \in \varrho(A)$, folgt $\lim \|R(\lambda, A)\| < \infty$, weil $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ stetig und $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ kompakt.

□

Es gibt unbeschränlte Operatoren $(A, \mathcal{D}(A))$ mit $\sigma(A) = \emptyset$.

Beispiel. 1. (Herr) $Af = f'$, $\mathcal{D}(A) = \left\{f \in C^1([a,b]) \,\middle|\, f(a) = 0\right\}$.

2. $X = L^2((0,1))$, $\mathcal{D}(A) = \left\{u \in H^1((0,1)) \,\middle|\, u(0) = 0\right\}$, $(Au)(x) = i \cdot u'(x)$. Dann ist für $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(\lambda - A) : \mathcal{D}(A) \to L^2((0,1))$$

bijektiv mit

$$(R_\lambda(A)v)(x) = -i \int_0^x e^{-i\lambda(x-s)} v(s)\, \mathrm{d}s.$$

Im Fall beschränkter Operatoren existiert für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \|A\|$ die Resolvente

$$R(\lambda, A) = \frac{1}{\lambda}\left(\mathrm{Id} - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}. \tag{2.4}$$

ALso gilt $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda| \leq \|A\|\}$. Außerdem ist das Spektrum eines beschränkten Operators nicht leer. Wegen (2.4) gilt

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\|A\|}, \quad \text{falls } |\lambda| \geq 2\|A\|.$$

Wenn das Spektrium leer wäre, so wäre $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte, beschränkte, analytische Funktion. Nach dem Satz von Lioville wäre sie konstant, was ein Widerspruch ist.

2.13 Definition. Seien H ein Hilbertraum und $A \colon \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ mit $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$. Dann heißt A *symmetrisch*, falls für alle $f, g \in \mathcal{D}(A)$ gilt:

$$\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle$$

Beispiel. $X = L^2((0,1))$, $\mathcal{D}(A_1) = \{u \in C^2([0,1]) \mid u(0) = u(1) = 0\}$, $\mathcal{D}(A_2) = \{u \in C^2([0,1]) \mid u'(0) =$
$A_1 = A_2 = -u''$. Schlüssel:

$$\int_0^1 \left(f''\overline{g} - f\overline{g''}\right) = \left[f'\overline{g} - f\overline{g'}\right]_0^1$$

2.14 Proposition. *Sei $(A, \mathcal{D}(A))$ ein symmetrischer Operator. Dann ist $(A, \mathcal{D}(A))$ abschließbar und $\left(\bar{A}, \mathcal{D}\left(\bar{A}\right)\right)$ wieder symmetrisch.*

Beweis. $\mathcal{D}\left(\bar{A}\right)$ ist die Menge aller $u \in H$, für welche eine Folge (u_n) in $\mathcal{D}(A)$ und $g \in H$ existieren mit

$$u_n \to u \quad \text{und} \quad Au_n \to g.$$

$\mathcal{D}\left(\bar{A}\right)$ ist ein Unterraum von H mit $\mathcal{D}\left(\bar{A}\right) \supset \mathcal{D}(A)$. Für $h \in \mathcal{D}(A)$ gilt:

$$\langle g, h\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Au_n, h\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, Ah\rangle = \langle v, Ah\rangle .$$

Damit ist g durch die Abbildung $h \mapsto \langle g, h\rangle$ eindeutig definiert, denn $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$. Setze für $u \in \mathcal{D}\left(\bar{A}\right)$

$$\bar{A}u = g.$$

$\bar{A}$ ist linear und nach Konstruktion gilt: $\Gamma\left(\bar{A}\right) = \overline{\Gamma(A)}$. Zu zeigen bleibt, dass $\left(\bar{A}, \mathcal{D}\left(\bar{A}\right)\right)$ symmetrisch ist. Sei hierzu $u \in \mathcal{D}\left(\bar{A}\right)$ wie eben. Sei $v \in \mathcal{D}\left(\bar{A}\right)$ mit $\lim_{n\to\infty} v_n = v$, $v_n \in \mathcal{D}(A)$ und $\lim_{n\to\infty} Av_n = w$. Wir wissen bereits:

$$\underbrace{\left\langle \bar{A}u, v_n\right\rangle}_{\to\left\langle \bar{A}u, v\right\rangle} = \underbrace{\langle u, Av_n\rangle}_{\to\langle u,w\rangle = \left\langle u, \bar{A}v\right\rangle} .$$

□

2.15 Definition. (1) Seien H_1 und H_2 Hilberträume und $A\colon \mathcal{D}(A) \subset H_1 \to H_2$ mit $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$. Wir definieren den *adjungierten Operator* $(A^\star, \mathcal{D}(A^\star))$ über

$$\mathcal{D}(A^\star) = \{g \in H_2 \mid \exists\, v \in H_1\colon\ \langle Au, g\rangle = \langle u, v\rangle\ \forall\, u \in \mathcal{D}(A)\},$$

$$A^\star g =$$

mit $v \in H_1$ derart, dass $\langle Au, g\rangle = \langle u, v\rangle$ für alle $u \in \mathcal{D}(A)$.

(2) Ein symmetrischer Operator $A\colon \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ heißt *selbstadjungiert*, falls $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^\star)$.

(3) Ein symmetrischer Operator $A\colon \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ heißt *wesentlich selbstadjungiert*, falls $\left(\bar{A}, \mathcal{D}\left(\bar{A}\right)\right)$ selbstadjungiert ist.

Bemerkung. *Falls A beschränkt ist, gilt*

$$A \text{ symmetrisch} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ selbstadjungiert.}$$

Aufgabe: $H = L^2((0,1))$, $\mathcal{D}(A) = \left\{u \in H^1((0,1)) \,\middle|\, u(0) = 0\right\}$, $Au = u'$. Bestimme $(A^\star, \mathcal{D}(A^\star))$.

Vermutung: (durch Probieren)

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(A^*) &= \left\{\varphi \in L^2((0,1)) \,\middle|\, \exists\, v \in L^2((0,1))\ \forall\, u \in H^1((0,1)) \cap \{u(0)=0\} : \int_0^1 u'\varphi = \int_0^1 uv\right\} \\ &= \left\{w \in H^1((0,1)) \,\middle|\, w(0) = 0\right\}.\end{aligned}$$

Die Inklusion

$$\mathcal{D}(A^*) \supset \left\{w \in H^1((0,1)) \,\middle|\, w(1) = 0\right\}$$

ist klar. Zum Nachweis von „$\subset$": Sei $\varphi \in \mathcal{D}(A^*)$. Setze $h(x) = \int_x^1 v(s)\,\mathrm{d}s$, wobei v gemäßg Definition von $\mathcal{D}(A^*)$ gewählt ist. Für $u \in H^1((0,1)) \cap \{u(0)=0\}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\int_0^1 u'\varphi &= \int_0^1 uv = \int_0^1 u\left(-h'\right) = \int_0^1 u'h \\ &\Rightarrow \int_0^1 u'(\varphi - h) = 0,\end{aligned}$$

d.h. $\varphi - h \in \mathcal{R}(A)^\perp$. Da $\mathcal{R}(A) = L^2((0,1))$, folgt $\varphi = h$ und es folgt

$$\varphi \in \left\{w \in H^1((0,1)) \,\middle|\, w(1) = 0\right\}.$$

Aufgabe: $H = L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}(A) = C_c^1(\mathbb{R})$, $Au = iu'$ für $u \in \mathcal{D}(A)$. Zeige, dass $(A, \mathcal{D}(A))$ symmetrisch, aber nicht selbstadjungiert ist.

Der Definitionsbereich $\mathcal{D}(A^*)$ des adjungierten Operators ist zunächst implizit definiert und schwer zu überschauen.

Beispiel. $H = L^2(\mathbb{R})$, $v_0 \in L^2(\mathbb{R})$ beliebig, $\mathcal{D}(A) = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $Au = \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\mathrm{d}t\right) v_0$. Es gilt $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$.

$$\mathcal{D}(A^*) = \left\{\varphi \in L^2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \exists\, v \in L^2(\mathbb{R})\ \forall\, u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) : \left(\int u\right) \int v_0\varphi = \int uv\right\}.$$

Es gilt weiter hin

$$
\begin{aligned}
\varphi \in \mathcal{D}(A^*) \quad &\Rightarrow \quad \langle v_0, \varphi = 0 \rangle \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{D}(A^*) = \{v_0\}^{\perp}.
\end{aligned}
$$

Falls $A\colon \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ abschließbar ist mit $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$, so kann dieser Effekt nicht mehr auftreten, vgl. (ii) von Proposition 2.17.

2.16 Proposition. *Seien H ein Hilbertraum, $A\colon \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ mit $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$. Dann gilt*

$$
\mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{N}(A^*).
$$

Falls $\mathcal{R}(A)$ abgeschlossen ist, so gilt zudem $\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A^*)^{\perp}$.

2.17 Proposition. *Seien H ein Hilbertraum und $A\colon \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ mit $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$.*

(i) $\Gamma(A^*)$ *ist abgeschlossen.*

(ii) $\overline{\mathcal{D}(A^*)} = H \quad \Leftrightarrow \quad (A, \mathcal{D}(A))$ *ist abschließbar.*

(iii) Falls $(A, \mathcal{D}(A))$ abschließbar ist, so gilt

$$
\overline{\mathcal{D}(A^{**})} = H, \quad A^* = \bar{A}, \quad \bar{A}^* = A^*.
$$

2.18 Satz (Hellinger-Toeplitz)**.** *Seien H ein Hilbertraum und $A\colon H \to H$ symmetrisch. Dann ist A beschränkt und daher selbstadjungiert.*

Beweis. Sei (x_n) Folge in H mit $x_n \to 0$ und $Ax_n \to y \in H$. Dann gilt

$$
\langle y, y \rangle = \langle \lim Ax_n, y \rangle = \lim \langle Ax_n, y \rangle = \lim \langle x_n, Ay \rangle \overset{\|x_n\| \to 0}{=} 0.
$$

Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist A damit beschränkt.

□

Wir untersuchen nun noch Eigenschaften symmetrischer bzw. selbstadjungierter Operatoren.

2.19 Satz. *Seien H ein Hilbertraum und $A\colon \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ symmetrisch mit $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$.*

(1) $\langle Ax, x \rangle$ ist reell für jedes $x \in \mathcal{D}(A)$.

(2) Alle Eigenwerte von A sind reell.

(3) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind zueinander orthogonal.

Beweis. Für $x \in \mathcal{D}(A)$ gilt

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} \quad \Rightarrow \quad (1).$$

Seien $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ und $x \in \mathcal{N}(\lambda - A)$. Dann folgt

$$\lambda x = Ax \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\langle x, Ax\rangle}{\|x\|^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0 \neq \mu$, $x_1 \in \mathcal{N}(\lambda - A)$, $x_2 \in \mathcal{N}(\mu - A)$. Dann folgt

$$\lambda \langle x_1, x_2\rangle = \langle Ax_1, x_2\rangle = \langle x_1, Ax_2\rangle = \mu \langle x_1, x_2\rangle .$$

Also gilt

$$\lambda = \mu \quad \text{oder} \quad \langle x_1, x_2 = 0\rangle .$$

□

2.20 Lemma. *Seien H ein Hilbertraum und $A\colon \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ abschließbar mit $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$. Sei $B \in \mathcal{L}(H)$. Dann ist $(A + B, \mathcal{D}(A))$ abschließbar mit dem adjungierten Operator $(A^* + B^*, \mathcal{D}(A^*))$.*

Beweis. Übung.

2.21 Lemma. *Seien H ein Hilbertraum, $A\colon \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ abgeschlossen und symmetrisch mit $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$. Dann gelten:*

(1) $\mathcal{R}(A + i)$ und $\mathcal{R}(A - i)$ sind abgeschlossen in H.

(2)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A^* + i) &= \mathcal{R}(A - i)^{\perp} \\ \mathcal{N}(A^* - i) &= \mathcal{R}(A + i)^{\perp} . \end{aligned}$$

Beweis. Nachweis, dass $\mathcal{R}(A - i)$ abgeschlossen in H. Für $x \in \mathcal{D}(A)$ gilt

$$\begin{aligned} \|(A - i)\, x\|^2 &= \langle Ax - ix, Ax - ix\rangle = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 - i\langle x, Ax\rangle + i\langle Ax, x\rangle \\ &= \|Ax\|^2 + \|x\|^2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sei (x_n) Folge in $\mathcal{D}(A)$ mit $y_n = (A-i)\,x_n$, $y_n \to y_0 \in H$ und $x_n \to x_0 \in H$. Wegen (2.5) ist also (Ax_n) eine Cauchyfolge in H. Daher gilt $(x_n, Ax_n) \to (x_0, w)$. Da $(A, \mathcal{D}(A))$ abgeschlossen ist, folgt $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ und $w = Ax_0$. Damit folgt auch

$$y_n = Ax_n - ix_n \to w - ix_0 = (A-i)\,x_0.$$

Zum Nachweis von „$\mathcal{N}(A^*+i) \subset \mathcal{R}(A-i)^\perp$": Nach Lemma 2.20 gilt $(A-i)^* = A^* + i$ mit $\mathcal{D}((A-i)^*) = \mathcal{D}(A^*)$. Weiterhin gilt

$$\langle (A-i)\,x, y\rangle = \langle x, (A^*+i)\,y\rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\ \forall\, y \in \mathcal{D}(A^*)\,. \tag{2.6}$$

Zum Nachweis von „$\mathcal{R}(A-i)^\perp \subset \mathcal{N}(A^*+i)$": Sei $y \in \mathcal{R}(A-i)^\perp$, d.h. $\exists\, x \in \mathcal{D}(A)$ mit $\langle (A-i)\,x, y\rangle = 0$. Damit ist für jedes $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\langle x, (A^*+i)\,y\rangle = 0 \quad \text{wegen (2.6)}.$$

Wegen $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$ folgt $(A^*+i)\,y = 0$.

$\square$

2.22 Proposition. *Seien H ein Hilbertraum, $A\colon \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ symmetrisch mit $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$. Dann sind äquivalent:*

(1) $(A, \mathcal{D}(A))$ ist selbstadjungiert.

(2) $(A, \mathcal{D}(A))$ ist abgeschlossen und $\mathcal{N}(A^*+i) = \mathcal{N}(A^*-i) = \{0\}$.

(3) $\mathcal{R}(A+i) = \mathcal{R}(A-i) = H$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): $(A, \mathcal{D}(A))$ ist abgeschlossen, da selbstadjungiert. Sei $x \in \mathcal{N}(A^*-i) \Leftrightarrow A^*x = ix \Rightarrow Ax = ix$. Also ist

$$i\|x\|^2 = i\,\langle x, x\rangle = \langle ix, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = -i\,\langle x, x\rangle = -i\|x\|^2,$$

somit folgt $x = 0$. Analog für $x \in \mathcal{N}(A^*+i)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Nach Lemma 2.21 sind $\mathcal{R}(A+i)$, $\mathcal{R}(A-i)$ abgeschlossen in H. Es gilt aber auch $\mathcal{R}(A \pm i)^\perp = \mathcal{N}(A^* \mp i) = \{0\}$. Also gilt $\mathcal{R}(A \pm i) = H$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Zu zeigen ist: $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$. Da A symmetrisch ist, gilt $\mathcal{D}(A^*) \supset \mathcal{D}(A)$. Wir zeigen also $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(A)$. Sei $y \in \mathcal{D}(A^*)$. Wegen (3) existiert nun $x \in \mathcal{D}(A)$ mit $(A+i)\,x = (A^*+i)\,y$. Da A und A^* auf $\mathcal{D}(A)$ übereinstimmen, folgt

$$(A^*+i)\,(x-y) = 0. \tag{2.7}$$

Beachte, dass für $u \in \mathcal{D}(A)$, $z \in \mathcal{D}(A^*)$ sowieso

$$\langle (A^* + i) z, u \rangle = \langle z, (A - i) u \rangle$$

gilt. Also folgt aus (2.7) $z = x - y \in \mathcal{R}(A - i)^{\perp} = \{0\}$ und somit

$$x = y \quad \Rightarrow \quad y \in \mathcal{D}(A) .$$

$\square$

2.23 Proposition. *Seien H ein Hilbertraum, $A\colon \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ symmetrisch mit $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$. Dann sind äquivalent:*

(1) $(A, \mathcal{D}(A))$ ist wesentlich selbstadjungiert.

(2) $\mathcal{N}(A^* + i) = \mathcal{N}(A^* - i) = \{0\}$.

(3) $\mathcal{R}(A + i) = \mathcal{R}(A - i)$ ist dicht in H.

Aufgabe: Sei (X, μ) ein endlicher Maßraum, $H = L^2(X, \mu)$. Sei $g\colon X \to \mathbb{R}$ messbar. Für $u \in \mathcal{D}(A)$ setze $Au = ug$. Zeige, dass $(A, \mathcal{D}(A))$ selbstadjungiert ist.

Beispiel. Seien (X, μ) ein Maßraum und $H = L^2(X, \mu)$. Sei

$$\mathcal{D}(A_g) = \left\{ \varphi \in L^2(X, \mu) \,\middle|\, g\varphi \in L^2(X, y) \right\} .$$

Dann ist

$$A_g\colon \mathcal{D}(A_g g) \subset H \to H$$

wohldefiniert. (Die Bedingung $g\varphi \in L^2(X, y)$ alleine ist nicht ausreichend, da eventuell $\mathcal{D}(A_g) \nsubseteq H$.

Beispiel: $X = (-1, 1)$, $\mu = \mathrm{d}x$, $g(x) = |x|$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$. Dann folgt $g\varphi = \sqrt{|x|} \in L^2((-1, 1))$, aber $\varphi \notin L^2((-1, 1))$.)

2.24 Lemma. *Falls $\mu(X) < \infty$, so gilt $\overline{\mathcal{D}(A_g)} = H$.*

Beweis. Sei $\varphi \in L^2(X, \mu)$. Sei fü $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{falls } |\varphi(x)| \leq n, \\ 0, & \text{falls } |\varphi(x)| > n. \end{cases}$$

Es gilt $\varphi_n \in \mathcal{D}(A_g)$, da $|\varphi_n| \leq n$. Weiter gilt

$$\|\varphi_n - \varphi\|_H^2 = \int_X |\varphi_n \varphi|^2 \, \mathrm{d}\mu = \int_{\{|\varphi(x)| > n\}} |\varphi|^2 \, \mathrm{d}\mu \to 0 \quad \text{für } n \to \infty,$$

da $\mu(X) < \infty$.

$\square$

2.25 Lemma. *Falls $\overline{\mathcal{D}(A)} = L^2(X,\mu)$ und g reellwertig, so ist $(A_g, \mathcal{D}(A_g))$ selbstadjungiert.*

Beweis. Wir verwenden Proposition 2.22 (3) und zeigen, dass es zu $v \in H$ ein $u \in \mathcal{D}(A_g)$ mit $(A_g + i)\,u = v$ gibt. (Analog für $(A_g - i)\,\tilde{u} = v$.)

$$(A_g + i)\,u = v \quad \Leftrightarrow \quad gu + iu = v \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{v}{g+i}.$$

Beachte, dass nach Voraussetzung $g + i \neq 0$ gilt. Es gilbt $\frac{v}{g+i} \in \mathcal{D}(A_g)$, denn

$$\frac{|v|^2}{|g+i|^2} = \frac{|v|^2}{|g|^2 + 1} \leq |v|^2 \quad \text{und} \quad \frac{|g|^2 \, |v|^2}{|g+i|^2} \leq |v|^2.$$

$\square$

2.26 Proposition. *Seien (X,μ) ein Maßraum, $g\colon X \to \mathbb{R}$ messbar, $\overline{\mathcal{D}(A_g)} = H$ mit $\mathcal{D}(A_g)$ wie bisher. Dann gilt*

$$\sigma(A_g) = \Big(\operatorname{supp} \mu\left(g^{-1}\right) = \Big) \; \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall \varepsilon > 0\colon \mu\left(g^{-1}(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\right) > 0\right\}.$$

Beweis. Übungsaufgabe, etwas tricky.

Beispiel. $H = L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$, $g(x) = |x|^2 \Rightarrow \sigma(A_g) = [0, \infty)$.

Der Fall $\sigma(A) = [0,\infty)$ ist bereits ein Extremfall, wie der folgende Satz zeigt.

2.27 Satz. *Seien H ein Hilbertraum, $A\colon \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ selbstadjungiert mit $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$. Dann gilt $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $\lambda = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Wir zeigen, dass $\lambda \in \varrho(A)$, d.h. $\lambda \notin \sigma(A)$. Wir wissen bereits, dass auch

$$\left(\frac{A-a}{b}, \mathcal{D}(A)\right)$$

selbstadjungiert ist, vgl. Lemma 2.20. Mit Proposition 2.22 schließen wir

$$\mathcal{R}\left(\frac{A-a}{b}-i\right)=H \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{R}(A-\lambda)=H.$$

Ebenso gilt $\mathcal{R}\left(A-\overline{\lambda}\right)=H$. Wir zeigen nun, dass $A-\lambda\colon \mathcal{D}(A)\to H$ injektiv ist (analog für $A-\overline{\lambda}$). Sei $x\in\mathcal{N}(A-\lambda)$. Da für alle $y\in\mathcal{D}(A)$

$$0=\langle (A-\lambda)x,y\rangle=\left\langle x,\left(A^*-\overline{\lambda}\right)y\right\rangle=\left\langle x,\left(A-\overline{\lambda}\right)y\right\rangle$$

gilt, folgt $x\in\mathcal{R}\left(A-\overline{\lambda}\right)^{\perp}=\{0\}$. Also ist $x=0$ wie gewünscht.

$\square$

2.3 Die Friedrich-Fortsetzung und der Laplace-Operator auf L^2

2.28 Satz. *Seien H ein Hilbertraum und $A\colon \mathcal{D}(A)\subset H\to H$ symmetrisch mit $\overline{\mathcal{D}(A)}=H$ mit*

$$\forall\, x\in\mathcal{D}(A):\ \langle Ax,x\rangle\geq 0. \qquad \text{(Positivität eines Operators)}$$

Dann besitzt $(A,\mathcal{D}(A))$ eine selbstadjungierte Fortsetzung $(L,\mathcal{D}(L))$ mit $\langle Lx,x\rangle\geq 0$ für alle $x\in\mathcal{D}(L)$.

Beweis. Übung?

Wir werden sehen, dass es mitunter viele verschiedene positive, selbstadjungierte Fortsetzungen gibt.

Seien $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ offen und $H=L^2(\Omega)$. Dann ist $(-\Delta,C_c^\infty(\Omega))$ ein positivert, symmetrischer Operator auf $L^2(\Omega)$. Für $u,v\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}\langle -\Delta u,v\rangle &= -\int_\Omega \Delta u\overline{v}=\int_\Omega \nabla u\overline{\nabla v}=-\int_\Omega u\overline{\Delta v} \quad \text{und}\\ \langle -\Delta u,u\rangle &= \int_\Omega |\nabla u|^2\geq 0.\end{aligned}$$

Fragen:

- Ist $(-\Delta,C_c^\infty(\Omega))$ selbstadjungiert?
- Ist $(-\Delta,C_c^\infty(\Omega))$ wesentlich selbstadjungiert?
- Wie sehen selbstadjungierte Fortsetzungen aus?

Wir betrachten die beiden Falle $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Wir zeigen, dass $(-\Delta, C_c^\infty(\Omega))$ nicht selbstadjungiert ist.

Konkret: Wir zeigen $\mathcal{N}((-\Delta)^* \pm i) \neq \{0\}$, vgl. Proposition 2.22. Gesucht ist eine Funktion $u \in \mathcal{D}((-\Delta)^*)$ mit

$$(-\Delta)^* u = \pm iu.$$

Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{C}^d$ mit $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_d^2 = i$ (bzw $-i$), z.B. $\alpha = \left(e^{\frac{i\pi}{4}}, 0, \dots, 0\right)$. Setze $u_\alpha(x) = e^{\langle \alpha, x\rangle}$ und beachte, dass $u_\alpha \notin C_c^\infty(\Omega)$, da $\operatorname{supp}(u_\alpha) \nsubseteq \Omega$.

Informell gilt aber trotzdem $(-\Delta) u_\alpha(x) = u_\alpha(x)\left(\alpha_1^2 + \dots + \alpha_d^2\right) = -iu_\alpha(x)$.

Für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt nun

$$\langle -\Delta\varphi, u_\alpha\rangle = \int_\Omega (-\Delta\varphi)\, e^{\langle \alpha, x\rangle}\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \varphi u_\alpha(x)\, \mathrm{d}x.$$

Damit gilt:

$$u_\alpha \in \mathcal{D}((-\Delta)^*) \quad \text{und} \quad (-\Delta)^* u_\alpha = iu_\alpha.$$

2.29 Lemma. *Seien H_1, H_2 Hilberträume und $J \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ injektiv mit $\overline{\mathcal{R}(J)} = H_2$. Dann gilt:*

- *$JJ^* \colon H_2 \to H_2$ ist injektiv.*
- *$\overline{\mathcal{R}(JJ^*)} = H_2$.*
- *$(JJ^*)^{-1} : \mathcal{R}(JJ^*) \subset H_2 \to H_2$ ist selbstadjungiert.*

Beweis. Langweilig. □

Beweis von 2.28. Sei $\tilde{A} = A + \mathrm{Id}$. Dann ist $\left(\tilde{A}, \mathcal{D}(A)\right)$ symmetrisch mit $\left\langle \tilde{A}v, v\right\rangle \geq \|v\|^2$ für $v \in \mathcal{D}(A)$. Wir zeigen, dass $\left(\tilde{A}, \mathcal{D}(A)\right)$ eine selbstadjungierte Fortsetzung $(S, \mathcal{D}(S))$ besitzt mit

$$\langle Sv, v\rangle \geq \|v\|^2 \quad \text{für } v \in \mathcal{D}(S).$$

Dann ist $L = S - \mathrm{Id}$ mit $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(S)$ eine Lösung unseres Problems.

Die Abbildung $\mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A) \to \mathbb{C}$, $(v, w) \mapsto \left\langle \tilde{A}v, w\right\rangle$ ist ein Skalarprodukt, aber $\mathcal{D}(A)$ bezüglich der entsprechenden Norm nicht vollständig. Sei H_1 der Abschluss von $\mathcal{D}(A)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$ mit $\|\varphi\|_1^2 = \left\langle \tilde{A}\varphi, \varphi\right\rangle$. Die Abbildung $J \colon \mathcal{D}(A) \hookrightarrow H$, $J(v) = v$, erfüllt

$$\|Jv\|^2 \leq \|v\|_1^2.$$

Also besitzt J eine eindeutige, stetige Fortsetzung $J \in \mathcal{L}^1(H_1; H)$ mit

$$\|Jv\|^2 \leq \|v\|^2 \quad \text{für } v \in H_1.$$

Wir wollen Lemma 2.29 anwenden und überprüfen, dass J injektiv ist. $\overline{\mathcal{R}(J)} = H$ ist klar, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{R}(J)$ und $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$.

Es gilt für $v, w \in \mathcal{D}(A)$

$$\langle v, w\rangle_1 = \left\langle \tilde{A}v, w \right\rangle = \left\langle \tilde{A}v, Jw \right\rangle$$

und damit auch für alle $v \in \mathcal{D}(A)$, $w \in H_1$. Also gilt

$$\mathcal{N}(J) \subset \mathcal{D}(A)^{\perp} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad J \text{ injektiv}.$$

Wir wenden Lemma 2.29 an und setzen

$$S = (JJ^*)^{-1} \quad \text{und} \quad \mathcal{D}(S) = \mathcal{R}(JJ^*).$$

Es bleibt zu zeigen, dass $(S, \mathcal{D}(S))$ eine Fortsetzung von $\left(\tilde{A}, \mathcal{D}(A)\right)$ ist. Für $v \in \mathcal{D}(A)$, $w \in H_1$ gilt

$$\langle v, w\rangle_1 = \left\langle \tilde{A}v, Jw \right\rangle = \left\langle J^*\tilde{A}v, w \right\rangle_1$$

und es folgt

$$v = J^*\tilde{A}v \quad \text{für } \mathcal{D}(A) \subset H_1.$$

Da $J\restriction_{\mathcal{D}(A)} = \mathrm{Id}$, gilt

$$v = Jv = JJ^*\tilde{A}v \in \mathcal{R}(JJ^*) = \mathcal{D}(S).$$

Also gilt $\mathcal{D}\left(\tilde{A}\right) = \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(S)$ und $\tilde{A}v = Sv$ für $v \in \mathcal{D}(A)$. Damit ist $(S, \mathcal{D}(S))$ eine Fortsetzung von $\left(\tilde{A}, \mathcal{D}(A)\right)$. Für $v \in \mathcal{D}(S)$ und $w = (JJ^*)^{-1} v$ gilt

$$\begin{aligned} \langle Sv, v\rangle &= \left\langle (JJ^*)^{-1} v, v \right\rangle = \langle w, JJ^*w\rangle \\ &\geq \|\underbrace{J^*w}_{b}\| \geq \|J\underbrace{J^*w}_{b}\|^2 = \|v\|^2. \end{aligned}$$

$\square$

Eir wollen zum Abschluss selbstadjungierte Fortsetzungen von $(-\Delta, C_c^\infty(\Omega))$ untersuchen, insbesondere natürlich die Friedrich-Fortsetzung $(L, \mathcal{D}(L))$, welche häufig auch mit $(-\Delta_F, \mathcal{D}_F)$ bezeichnet wird.

2.30 Lemma. *Seien H ein separabler Hilbertraum und $A\colon \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ symmetrisch und positiv. Es gebe eine Orthonormalbasis (e_j) in H mit $e_j \in \mathcal{D}(A)$ und $Ae_j = \lambda_j e_j$ für geeignete $\lambda_j \geq 0$ und alle $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $(A, \mathcal{D}(A))$ wesentlich selbstadjungiert und $\left(\bar{A}, \mathcal{D}\left(\bar{A}\right)\right)$ ist unitär äquivalent (d.h. $A = UMU^{-1}$ für U mit $U^* = U^{-1}$) zum Multiplikationsoperator $(M, \mathcal{D})$ auf $l^2(\mathbb{N})$ mit*

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N}) \,\middle|\, \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \left|x_j\right|^2 < \infty \right\}, \\ M((x_j)) &= (\lambda_j x_j)_{j=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Das Spektrum genügt $\sigma = (A) = \overline{\{\lambda_j\}}$.

Beweis. Evtl. später.

Im Folgenden sei $\Omega = (0,1)^d$ und $\mathcal{D}_D$ sei die Menge aller Funktionen $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ mit der Eigenschaft, dass sich alle partiellen Ableitungen stetig auf $\partial\Omega$ fortsetzen lassen und $\varphi(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$.

$$\mathcal{D}_D = \left\{ \varphi \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \,\middle|\, \varphi \restriction_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

2.31 Satz. *Der Abschluss des Operators $(-\Delta, \mathcal{D}_D)$ auf $L^2(\Omega)$ ist gerade die Friedrich-Fortsetzung von $(-\Delta, C_c^\infty(\Omega))$.*

Beweis. Sei $(L, \mathcal{D}(L))$ die Friedrich-Fortsetzung von $(-\Delta, C_c^\infty(\Omega))$. Wir zeigen, dass $(L, \mathcal{D}(L))$ eine Fortsetzung von $(-\Delta, \mathcal{D}_D)$ ist, denn dann folgt

$$(L, \mathcal{D}(L)) = (L, \mathcal{D}(L))^* \subset (-\Delta, \mathcal{D}_D)^* = \overline{(-\Delta, \mathcal{D}_D)}.$$

Sei $\varphi \in \mathcal{D}_D$. Dann existiert $\varphi_n \in H_0^1(\Omega)$ mit $\|\varphi_n - \varphi\|_{H^1} \to 0$, d.h. $\|\varphi_n - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \to 0$, aber auch $\varphi_n \to \tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$. Es folgt

$$\varphi = J(\tilde{\varphi}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}_D \in \mathcal{D}(L).$$

Beachte, dass $J\colon H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ mit $\mathcal{R}(JJ^*) = \mathcal{R}(J)$, da J^* surjektiv wegen $\mathcal{R}(J^*)^\perp = \mathcal{N}(J) = \{0\}$.

Wir zeigen noch, dasss L und $-\Delta$ auf $\mathcal{D}_D$ übereinstimmen. Sei φ eine Eigenfunktion der Form

$$\varphi(x) = \sin(k\pi x) \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ und } d = 1.$$

Dann gilt $\varphi \in \mathcal{D}_D \subset \mathcal{D}_L$, also ist $L\varphi$ wohldefiniert.

Für $\psi \in C_C^\infty(\Omega)$ gilt

$$\langle L\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, L\psi\rangle = \langle \varphi, -\Delta\psi\rangle = \langle -\Delta\varphi, \psi\rangle .$$

Also gilt, da $C_c^\infty(\Omega)$ dicht liegt,

$$L\varphi = \pi^2 k^2 \varphi = -\Delta\varphi.$$

Mit Lemma 2.30 folgt die Aussage.

$\square$

Seien

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_D &= \{\varphi \in C^\infty([0,1]) \,|\, \varphi(0) = \varphi(1) = 0\},\\
\mathcal{D}_N &= \left\{\varphi \in C^\infty([0,1]) \,\middle|\, \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0\right\},\\
\mathcal{D}_\# &= \left\{\varphi \in C^\infty([0,1]) \,\middle|\, \varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(0) = \varphi'(1), \varphi''(0) = \varphi''(1), \dots\right\}.
\end{aligned}$$

2.32 Satz. *Die Operatoren $(-\Delta, \mathcal{D}_D)$, $(-\Delta, \mathcal{D}_N)$, $(-\Delta, \mathcal{D}_\#)$ sind wesentlich selbstadjungierte Fortsetzungen von $(-\Delta, C_c^\infty(0,1))$ mit*

$$\begin{aligned}
\sigma((-\Delta, \mathcal{D}_D)) &= \left\{\pi^2, 4\pi^2, \dots, k^2\pi^2, \dots\right\},\\
\sigma((-\Delta, \mathcal{D}_N)) &= \left\{0, \pi^2, 4\pi^2, \dots, k^2\pi^2, \dots\right\},\\
\sigma((-\Delta, \mathcal{D}_\#)) &= \left\{0, 4\pi^2, 16\pi^2, \dots, 4k^2\pi^2, \dots\right\}.
\end{aligned}$$

3 ?

3.1 Definition. Sei X ein Banachraum. Eine Familie $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ von linearen Operatoren $R_\lambda\colon X \to X$ heißt *stark stetige Kontraktionsresolvente*, falls gilt:

(i) $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda x = x$ für $x \in X$.

(ii) λR_λ ist eine Kontraktion auf X für $\lambda > 0$.

(iii) $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$ für $\lambda, \mu > 0$.

3.2 Proposition. *Seien X ein Banachraum und (T_t) eine C_0-Halbgruppe auf X mit Erzeuger $(A, \mathcal{D}(A))$. Die Familie $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ sei definiert über $R_\lambda = R(\lambda, A)$ $\big(= R_A(\lambda)\big)$. Dann ist $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ eine stark stetige Kontraktionsresolvente.*

Beweis. (iii) ist sofort klar.

(ii) gilt nach Satz **??** (iii).

Zum Nachweis von (i): Seien $x \in X$, $\lambda > 0$. Dann gilt

$$\lambda R_\lambda = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s x \,\mathrm{d}s \overset{t=\lambda s}{=} \int_0^\infty e^{-t} T_{\frac{t}{\lambda}} x \,\mathrm{d}t \to x.$$

□

3.3 Satz. *Seien X ein Banachraum und $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ eine Familie von linearen Abbildungen $R_\lambda\colon X \to X$ mit (i) und (iii) aus Definition 3.1. Dann existiert genau ein linearer Operator $A\colon \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ mit $(0,\infty) \subset \varrho(A)$ und $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$ für $\lambda > 0$. $(A, \mathcal{D}(A))$ ist abgeschlossen und es gilt $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.*

Beweis. Der Bildbereich $\mathcal{R}(R_\lambda)$ ist unabhängig von λ wegen

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu \quad \Leftrightarrow \quad R_\lambda = R_\mu (\mathrm{Id} + (\mu - \lambda) R_\lambda).$$

Die Abbildung $R_\lambda\colon X \to \mathcal{R}(R_\lambda)$ ist bijektiv, wobei die Injektivität aus $\lambda R_\lambda x \to x$ folgt. Falls also $(A, \mathcal{D}(A))$ wie gewünscht existiert, so muss $\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(R_\lambda)$ und

$$A = \lambda - R_\lambda^{-1} \quad \text{für jedes } \lambda > 0$$

gelten. Die Existenz bzw. Wohldefiniertheit von A folgt, wenn wir zeigen:

$$\lambda - R_\lambda^{-1} = \mu - R_\mu^{-1} \quad \text{auf } \mathcal{R}\left(R_\lambda\right) = \mathcal{R}\left(R_\mu\right) \text{ für alle } \lambda, \mu > 0.$$

Seien $x \in \mathcal{R}\left(R_\lambda\right)$ und $y \in X$ mit $R_\lambda y = x$.

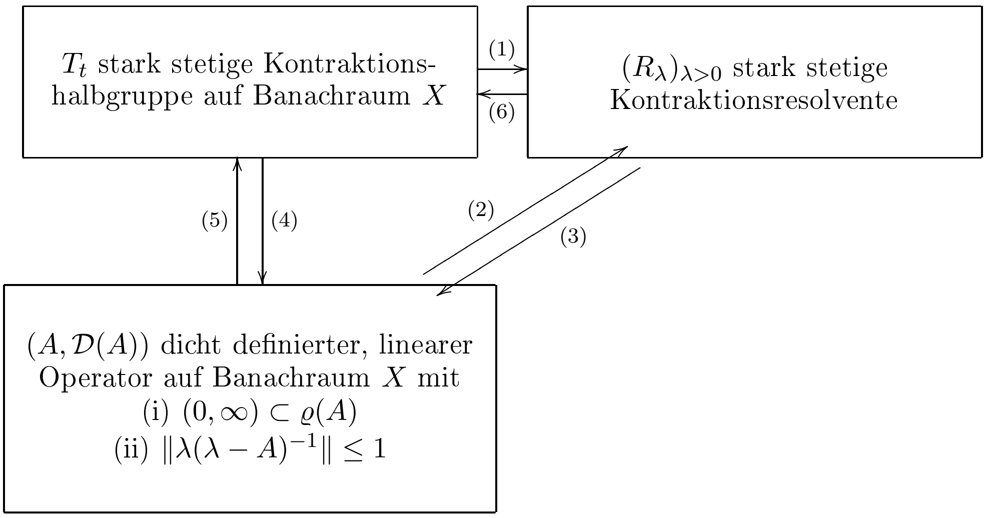
$$\begin{aligned} R_\mu\left(\left(\lambda - R_\lambda^{-1}\right)x - \left(\mu - R_\mu^{-1}\right)x\right) &= \lambda R_\mu R_\lambda y - R_\mu - \mu R_\mu R_\lambda y + R_\lambda y \\ &= \left(\lambda - \mu\right) R_\mu R_\lambda y - \left(R_\mu - R_\lambda\right) y = 0 \quad \text{wegen (iii).} \end{aligned}$$

Da R_μ bijektiv ist, folgt

$$\left(\lambda - R_\lambda^{-1}\right) x = \left(\mu - R_\mu^{-1}\right) x.$$

Es gilt $\overline{\mathcal{D}\left(A\right)} = X$ wegen (i). Die Abgeschlossenheit von $\left(A, \mathcal{D}\left(A\right)\right)$ wurde im Anschluss an Definition **??** gezeigt.

$\square$



(1) $R_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t \,\mathrm{d}t$.

(2) $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$.

(3) Satz 3.3.

(4) $Ax = \lim_{t \searrow 0} \frac{T_t x - x}{t}$.

(5) Hille-Yosida.

(6) Hille-Yosida.

Lemma (Aufgabe II.1)**.** *Seien H ein separabler Hilbertraum und $A\colon \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ symmetrisch und positiv. Es gebe eine Orthonormalbasis (e_j) in H mit $e_j \in \mathcal{D}(A)$ und $Ae_j = \lambda_j e_j$ für geeignete $\lambda_j \geq 0$ und alle $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $(A, \mathcal{D}(A))$ wesentlich selbstadjungiert und $\left(\bar{A}, \mathcal{D}\left(\bar{A}\right)\right)$ ist unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator $(M, \mathcal{D})$ auf $l^2(\mathbb{N})$ mit*

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N}) \,\middle|\, \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 |x_j|^2 < \infty \right\}, \\ M((x_j)) &= (\lambda_j x_j)_{j=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Das Spektrum genügt $\sigma = (A) = \overline{\{x_j\}}$.

Beweis. Wir betrachten

$$U\colon l^2(\mathbb{N}) \to H, \quad U((x_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \in H.$$

Zu zeigen ist

(1) U ist bijektiv und $U\left(l^2(\mathbb{N})\right) = H$.

(2) $\langle Ux, Uy \rangle_H = \langle x, y \rangle_{l^2(\mathbb{N})}$.

(3) Für $x \in \mathcal{D}(M)$ gilt $Ux \in \mathcal{D}\left(\bar{A}\right)$. Für $y \in \mathcal{D}\left(\bar{A}\right)$ gilt $U^{-1}y \in \mathcal{D}(M)$.

(4) Für $x \in \mathcal{D}(M)$ gilt $U(Mx) = \bar{A}(Ux)$.

Es gilt

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\| = \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\rangle = \sum_{j,k=1}^{n} x_j \overline{x_k} \underbrace{\langle e_j, e_k \rangle}_{=\delta_{jk}} = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2$$

und somit erhalten wir durch

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} x_j e_j \right\| = \sum_{j=n}^{m} |x_j|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

eine Cauchy-Folge. Wegen $\sum |x_n|^2 < \infty$ ist U wohldefiniert. Da A symmetrisch ist, ist A abgeschlossen.

Zu (1): Klar.

Zu (2): Es gilt

$$\begin{aligned}\langle Ux, Uy\rangle_H &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j, \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{\infty} x_j \overline{y_i} \underbrace{\langle e_j, e_i\rangle_H}_{=\delta_{ij}} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j} \\ &= \langle x, y\rangle_{l^2(\mathbb{N})}.\end{aligned}$$

Zu (3): Wir betrachten

$$\overline{\Gamma(A)} = \overline{\{(x, Ax) \mid x \in \mathcal{D}(A)\}} \subset H \times H$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle (x_1, y_2), (x_2, y_2)\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle .$$

Für $x \in \mathcal{D}(M)$ gilt $\sum \lambda_j^2 |x_j|^2 < \infty$ und $Ux = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$. Wegen $\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \in \mathcal{D}(A)$ gilt

$$\begin{aligned}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j, A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right)\right)}_{=\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j e_j\right)} &\in \Gamma(A) \\ &\to \left(Ux, \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j e_j\right) \in \overline{\Gamma(A)}\end{aligned}$$

und somit ist $Ux \in \mathcal{D}(\bar{A})$, $\bar{A}(Ux) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j e_j$.

Sei nun $y \in \mathcal{D}(\bar{A})$, d.h. es gibt $y_n \in \mathcal{D}(A)$ mit $y_n \to y$ und $Ay_n \to \bar{A}y$. Es gilt $y = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\langle y, e_j\rangle}_{=(U^{-1}y)_j} e_j$. Für $y_n = \sum_{j=1}^{\infty} \langle y_j, e_j\rangle e_j$ folgt

$$\langle \bar{A}y, e_l\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Ay_n, e_l\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle A\left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle y_n, e_j\rangle e_j\right), e_l\right\rangle .$$

Zu (4): Für $y_n \to y := \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$ gilt

$$\bar{A}y_n = \bar{A}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j A(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j e_j \to \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j e_j = \bar{A}y.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\bar{A}(Ux) &= \bar{A}\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{A}(e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j e_j \\ &= U((\lambda_j x_j)) = U(Mx).\end{aligned}$$

Zum Spektrum:

$$\sigma(M) = \left\{\mu \in \mathbb{C} \,\middle|\, (\mu I - M)^{-1} \text{ existiert nicht}\right\}.$$

Wir haben

$$(\mu I - M)((x_j)) = (\mu x_j - \lambda_j x_j) = ((\mu - \lambda_j) x_j) = (y_j) \in l^2.$$

D.h.

$$(\mu - \lambda_j) x_j = y_j \quad \forall j.$$

Es muss also $\mu - \lambda_j \neq 0$ gelten und

$$x_j = \frac{y_j}{\mu - \lambda_j} \in l^2.$$

Es muss ein $\varepsilon > 0$ geben mit $|\mu - \lambda_j| > \varepsilon$ für alle j, damit ist $\mu \notin \overline{\{\lambda_j\}}$.

$\square$

4 Koerzive Bilinearformen

Wir greifen nun wieder die Konzepte aus Kapitel 1 auf, nun allerdings in einem etwas allgemeineren Rahmen. Wie üblich sei H ein Hilbertraum auf $\mathbb{R}$ mit einem Skalarpodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der dazugehörigen Norm $\| \cdot \|$.

4.1 Definition. Sei $\mathcal{D} \subset H$ ein Unterraum und $\mathcal{E} \colon \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ bilinear. Dann definieren wir $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D})$ und $(\mathcal{E}^a, \mathcal{D})$ über

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}^s (u, v) &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{E} (u, v) + \mathcal{E} (u, v) \right), \\
\mathcal{E}^a (u, v) &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{E} (u, v) - \mathcal{E} (u, v) \right),
\end{aligned}
$$

woraus $\mathcal{E} = \mathcal{E}^s + \mathcal{E}^a$ folgt. $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D})$ heißt *symmetrischer Anteil von* $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ und $(\mathcal{E}^a, \mathcal{D})$ *antisymmetrischer Anteil von* $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$. Eine Bilinearform $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ heißt *antisymmetrisch*, falls $\mathcal{E} = \mathcal{E}^a \;\Leftrightarrow\; \mathcal{E}^s = 0$.

Bemerkung. *Eine Bilinearform* $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ *wird oft im Allgemeinen* nichtsymmetrisch *genannt.*

Beispiel. Ohne Angabe der Definitionsbereiche:

- $\mathcal{E} (u, v) = \int_{-1}^{1} u' (x) v' (x) \, \mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} f (x) v (x) \, \mathrm{d}x$ für eine gegebene Funktion $f \colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$.
- $\mathcal{E} (u, v) = \int_{\mathbb{R}^d} a_{ij} (x) \partial_j u (x) \partial_i v (x) \, \mathrm{d}x$ für $a_{ij} \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, wobei $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$ nicht notwendigerweise symmetrisch sein muss.
- $$
\begin{aligned}
\mathcal{E} (u, v) = \int_{\mathbb{R}^d} & a_{ij} (x) \partial_j u (x) \partial_i v (x) + b_i (x) \partial_i u (x) \partial_j v (x) \\
& + d_i (x) u (x) \partial_j v (x) + c (x) u (x) v (x) \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

4.2 Definition. Seien $\mathcal{D} \subset H$ ein Unterraum und $\mathcal{E} \colon \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ bilinear und positiv definit, d.h. $\mathcal{E} (u, u) \geq 0$ für $u \in \mathcal{D}$.

(a) $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ erfüllt die *schwache Sektorbedingung* bzw. ist *schwach sektoriell*, falls es ein $K \geq 1$ gibt mit

$$|\mathcal{E}_1(u,v)| \leq K\sqrt{\mathcal{E}_1(u,u)}\sqrt{\mathcal{E}_1(v,v)}. \tag{SSB}$$

(b) $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ erfüllt die *(starke) Sektorbedingung* bzw. ist *(stark) sektoriell*, falls es ein $K \geq 1$ gibt mit

$$|\mathcal{E}(u,v)| \leq K\sqrt{\mathcal{E}(u,u)}\sqrt{\mathcal{E}(v,v)}. \tag{SB}$$

Hierbei gilt für $\lambda \geq 0$

$$\mathcal{E}_\lambda(u,v) = \mathcal{E}(u,v) + \lambda \langle u,v \rangle .$$

Beachte, dass (SB) im Fall einer symmetrischen Bilinearform nichts anderes als die Ungleichung von Cauchy-Schwarz-Bunjakowski ist.

Zur Definition 4.2 einige grundsätzliche Bemerkungen:

Bemerkung. *(1) Die Bedingung (SSB) bedeutet, dass die Abbildung $\mathcal{E}_1$ stetig ist auf $\mathcal{D}$ bezüglich der Norm $\sqrt{\mathcal{E}_1(u,u)} = \sqrt{\mathcal{E}_1^s(u,u)}$. Wir erinnern daran, dass die Normen $\sqrt{\mathcal{E}_\lambda^s(u,u)}$ für verschiedene Werte von $\lambda > 0$ paarweise äquivalent sind.*

(2) Die beiden folgenden Aussagen sind jeweils äquivalent zu (SSB):

(i) Zu jedem $\lambda > 0$ existiert $K \geq 1$ mit

$$|\mathcal{E}_\lambda(u,v)| \leq K\sqrt{\mathcal{E}_\lambda(u,u)}\sqrt{\mathcal{E}_\lambda(v,v)}$$

für alle $u, v \in \mathcal{D}$.

(ii) Zu jedem $\lambda > 0$ existiert $K \geq 1$ mit

$$|\mathcal{E}(u,v)| \leq K\sqrt{\mathcal{E}_\lambda(u,u)}\sqrt{\mathcal{E}_\lambda(v,v)}$$

für alle $u, v \in \mathcal{D}$.

(3) Sei $\lambda \geq 0$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Es gibt $K \geq 1$ mit

$$|\mathcal{E}(u,v)| \leq K\sqrt{\mathcal{E}_\lambda(u,u)}\sqrt{\mathcal{E}_\lambda(v,v)}$$

für alle $u, v \in \mathcal{D}$.

(ii) Es gibt $K \geq 1$ mit

$$|\mathcal{E}^a(u,v)| \leq K\sqrt{\mathcal{E}_\lambda(u,u)}\sqrt{\mathcal{E}_\lambda(v,v)}$$

für alle $u, v \in \mathcal{D}$.

4.3 Definition. Seien $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset H$ ein dichter Unterraum und $\mathcal{E}\colon \mathcal{D}(\mathcal{E}) \times \mathcal{D}(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Dann heißt $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ *koerzive, abgeschlossene Form auf H*, falls gilt:

(i) $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ ist eine abgeschlossene Bilinearform auf H.

(ii) $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ erfüllt (SSB).

Bemerkung. *Falls $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ eine stetige Bilinearform auf einem Hilbertraum H mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ und koerziv im Sinne, dass $\mathcal{E}(u,u) \geq c\langle u,u\rangle_H$ für alle $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ mit geeigneter Konstanten $c > 0$ gilt, ist, so ist $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ koerziv im Sinne der Definition 4.3. Ebenso ist eine gemäßg Definition 4.3 koerzive abgeschlossene Form $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ koerziv auf $\left(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1}\right)$ mit $H_1 = \mathcal{D}(\mathcal{E})$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1} = \mathcal{E}^s$.*

4.4 Definition. Ein positiv definiter Operator $(L, \mathcal{D}(L))$ auf einem Hilbertraum H erfüllt die (starke) Sektorbedingung, falls es ein $K \geq 1$ gibt mit

$$|\langle Lu, v\rangle| \leq K\sqrt{\langle Lu, u\rangle}\sqrt{\langle Lv, v\rangle}$$

für alle $u, v \in \mathcal{D}(L)$.

Kleine Wiederholung (vgl. Skript Funktionalanalsysis Satz 7.10):

4.5 Satz (Stampacchia). *Sei $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige, koerzive Bilinearform auf einem Hilbertraum H. Seien $\mathcal{C} \subset H$ eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Menge und $\varphi \in H^*$. Dann gibt es genau ein Element $u \in \mathcal{C}$ mit*

$$a(u, w-u) \geq \varphi(w-u) \quad \text{für alle } w \in \mathcal{C}.$$

Falls a symmetrisch ist, so ist dieses Element eindeutig charakterisiert durch

(i) $u \in \mathcal{C}$.

(ii) u minimiert $I(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)$ auf der Menge $\mathcal{C}$.

Erinnerung / Vorstellung / Motivation im symmetrischen Fall $a(u,v) = \langle u, v\rangle$:

Zu $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{C}$ existiert $u \in \mathcal{C}$ mit

$$\begin{aligned} \langle x_0 - u, w - u \rangle &\leq u \quad \forall\, w \in \mathcal{C} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\langle x_0, w - u \rangle}_{=\varphi_{x_0}(w-u)} \leq \langle u, w - u \rangle = a\,(u, w - u)\,. \end{aligned}$$

Man mache sich klar, dass u das Funktional $I \colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \frac{1}{2}\|v\|^2 - \langle x_0, v \rangle$ minimiert, d.h.

$$I\,(u) \leq I\,(w) \quad \text{für alle } w \in \mathcal{C}.$$

Eine Richtung ist trivial. Für die andere verwendet man, dass $I\,(u) \leq I\,(u + \varepsilon\,(w - u))$ für $\varepsilon \geq 0$, $\varepsilon \searrow 0$ gilt. Bilde $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\restriction_{\varepsilon>0}$.

4.6 Satz. *Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{D}\,(\mathcal{E}))$ eine abgeschlossene, koerzive Bilinearform auf einem Hilbertraum H. Sei $\mathcal{C} \subset H$ nichtleer, konvex und abgeschlossen. Seien $\lambda > 0$ und J ein beschränktes, lineares Funktional auf $\mathcal{D}\,(\mathcal{E})$. Dann existiert genau ein $u \in \mathcal{C}$ mit*

$$\mathcal{E}_\lambda\,(u, w - u) \geq J\,(w - u) \quad \textit{für alle } w \in \mathcal{C}. \tag{4.1}$$

Beweis. Eindeutigkeit: Seien $u_1, u_2 \in \mathcal{C}$, welche beide (4.1) erfüllen. Dann gilt (wähle $w = u_2$ bzw. $w = u_1$ in (4.1))

$$\mathcal{E}_\lambda\,(u_1, u_2 - u_1) \overset{(4.1)}{\geq} J\,(u_2 - u_1) = -J\,(u_1 - u_2) \overset{(4.1)}{\geq} -\underbrace{\mathcal{E}_\lambda\,(u_2, u_1 - u_2)}_{=-\mathcal{E}_\lambda(u_2, u_2 - u_1)}$$

und es folgt

$$0 \geq \mathcal{E}_\lambda\,(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_2.$$

Existenz im symmetrischen Fall: Wir nehmen $\mathcal{E}^a = 0$ an. Seien

$$I\,(v) = \mathcal{E}_\lambda\,(v, v) - 2J\,(v) \quad \text{und} \quad m = \inf_{v \in \mathcal{C}} I\,(v)\,.$$

Zunächst gilt $m > -\infty$, denn für jedes $v \in \mathcal{D}\,(\mathcal{E})$ gilt

$$I\,(v) \geq \mathcal{E}_\lambda\,(v, v) - 2\|J\|\sqrt{\mathcal{E}_\lambda\,(v, v)} = \left(\sqrt{\mathcal{E}_\lambda\,(v, v)} - \|J\|\right)^2 - \|J\|^2 \geq -\|J\|^2.$$

Sei nun (v_n) eine Folge in $\mathcal{C}$ mit $m \leq I(v_n) \leq m + \frac{1}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\lambda(v_k - v_n, v_k - v_n) &= 2\mathcal{E}_\lambda(v_n, v_n) + 2\mathcal{E}_\lambda(v_k, v_k) - 4\mathcal{E}_\lambda\left(\frac{v_k + v_n}{2}, \frac{v_k + v_n}{2}\right) \\
&= 2I(v_n) + 4J(v_n) + 2I(v_k) + 4J(v_k) - 4I\left(\frac{v_k + v_n}{2}\right) - 8J\left(\frac{v_k + v_n}{2}\right) \\
&= 2I(v_n) + 2I(v_k) - 4I\left(\frac{v_n + v_k}{2}\right) \leq 2\left(m + \frac{1}{n}\right) + 2\left(m + \frac{1}{k}\right) - 4m \\
&= \frac{2}{n} + \frac{2}{k} \xrightarrow{k,n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Also existiert ein $u \in \mathcal{C}$ mit $v_n \to u$ und $I(v_n) \to I(u) = m$.

Zum Nachweis von (4.1): Seien $w \in \mathcal{C}$ und $\varepsilon \in (0,1)$. Dann gilt $u + \varepsilon(w - u) \in \mathcal{C}$, also

$$\begin{aligned}
0 \leq I(u + \varepsilon(w - u)) - I(u) = \mathcal{E}_\lambda(u, u) + \varepsilon^2 \mathcal{E}_\lambda(w - u, w - u) \\
+ 2\varepsilon\mathcal{E}_\lambda(u, w - u) - 2J(u + \varepsilon(w - u)) - (\mathcal{E}_\lambda(u, u) - 2J(u))
\end{aligned}$$

und es folgt

$$0 \leq \varepsilon^2 \mathcal{E}_\lambda(w - u, w - u) + 2\varepsilon\mathcal{E}(u, w - u) - 2\varepsilon J(w - u)$$

und somit

$$J(w - u) \leq \mathcal{E}(u, w - u).$$

Existenz im allgemeinem Fall: Setze für $t \in [0,1]$

$$\mathcal{E}^t = \mathcal{E}^s + t\mathcal{E}^a \quad \text{und} \quad \mathcal{D}\left(\mathcal{E}^t\right) = \mathcal{D}(\mathcal{E}).$$

Dann ist $\left(\mathcal{E}^t, \mathcal{D}(\mathcal{E})\right)$ eine abgeschlossene, koerzive Form auf H und J (immernoch) stetig bezüglich der $\sqrt{\mathcal{E}_\lambda^s} = \sqrt{\mathcal{E}_\lambda^{t,s}}$. Der Fall $t = 0$ ist oben bereits behandelt worden (symmetrischer Fall). Wir zeigen nun, dass sich mit einer geeigneten Konstanten $K \geq 1$ die Aussage von $t = t_0$ auf $t_0 \leq t < t_0 + \frac{1}{K}$ überträgt.

Es gelte also die Aussage (4.1) im Fall $t = t_0$. Sei $v \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Wir betrachten die Abbildung

$$w \mapsto J(w) - (t - t_0)\,\mathcal{E}^a(v, w) \quad \text{für } w \in \mathcal{D}(\mathcal{E}).$$

Dann existiert wegen (4.1) ein Element $Tv \in \mathcal{C}$ mit

$$\mathcal{E}_\lambda^{t_0}(Tv, w - Tv) \geq J(w - Tv) - (t - t_0)\,\mathcal{E}^a(v, w - Tv) \tag{4.2}$$

für alle $w \in \mathcal{C}$. Wir wenden (4.2) nun zweimal an: Einmal für $v = v_1$ mit $w = Tv_2$ und einmal mit $v = v_2$ mit $w = Tv_1$. Es folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\lambda^{t_0}(Tv_1, Tv_2 - Tv_1) &\geq J(Tv_2 - Tv_1) - (t - t_0)\,\mathcal{E}^a(v_1, Tv_2 - Tv_1) \quad \text{und} \\ \mathcal{E}_\lambda^{t_0}(Tv_2, Tv_1 - Tv_2) &\geq J(Tv_1 - Tv_2) - (t - t_0)\,\mathcal{E}^a(v_2, Tv_1 - Tv_2)\,. \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} -\mathcal{E}_\lambda^{t_0}(Tv_1 - Tv_2, Tv_1 - Tv_2) &\geq -(t - t_0)\,\mathcal{E}^a(v_2 - v_1, Tv_1 - Tv_2) \quad \text{und} \\ \mathcal{E}_\lambda(Tv_1 - Tv_2, Tv_1 - Tv_2) &\leq (t - t_0)\,\mathcal{E}^a(v_2 - v_1, Tv_1 - Tv_2) \\ &\leq (t - t_0)\,K\sqrt{\mathcal{E}_\lambda(v_2 - v_1, v_2 - v_1)}\sqrt{\mathcal{E}_\lambda(Tv_1 - Tv_2, Tv_1 - Tv_2)} \end{aligned}$$

und es folgt

$$\mathcal{E}_\lambda(Tv_1 - Tv_2, Tv_1 - Tv_2) \leq (t - t_0)^2 K^2 - \mathcal{E}_\lambda(v_1 - v_2, v_1 - v_2)\,.$$

Wähle nun $t > t_0$ derart, dass $(t - t_0)\,K < 1$. Damit ist die Abbildung $v \mapsto Tv$ eine Kontraktion und nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert ein $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ mit $u = Tu \in \mathcal{C}$. Aus (4.2) folgt nun wieder für alle w

$$\mathcal{E}_\lambda^{t_0}(u, w - u) \geq J(w - u) - (t - t_0)\,\mathcal{E}^a(u, w - u)$$

und somit

$$\mathcal{E}_\lambda^{t}(u, w - u) \geq J(w - u)\,.$$

$\square$

Als Anmerkung dieses wichtigen Satzes können wir nun zu jeder abgeschlossenen, koerziven Bilinearform eine stark stetige Kontraktionsresolvente konstruieren. Im Anschluss, das ist dann etwas schwieriger, zeigen wir, dass dieser Konstruktionsprozess bijektiv ist.

4.7 Satz. *Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ eine abgeschlossene, koerzive Bilinearform auf einem Hilbertraum H. Dann existiert genau eine eindeutige stark stetige Kontraktionsresolvente $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ auf H mit $R_\lambda(H) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$ und*

$$\mathcal{E}_\lambda(R_\lambda f, u) = \langle f, u\rangle$$

für alle $\lambda > 0$, $f \in H$ und $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

Bemerkung. *Aus dem Beweis dieses Satzes geht auch hervor, dass es eine eundeutige*

Kontraktionsresolvente $\left(\hat{R}_\lambda\right)_{\lambda>0}$ *mit*

$$\mathcal{E}_\lambda\left(u, \hat{R}_\lambda f\right) = (f, u)$$

für alle $\lambda > 0$, $f \in H$ *und* $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ *gibt. Falls* $(T_t)_{t\geq 0}$ *und* $\left(\hat{T}_t\right)_{t\geq 0}$ *die zugehörigen Halbgruppen sind, so gilt für alle* $f, g \in H$, $t \geq 0$

$$(T_t f, g) = \left(f, \hat{T}_t g\right).$$

Beweis. Sei $f \in H$. Setze $J(v) = (f, v)$ für $v \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ und $\mathcal{C} = \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Nach Satz 4.6 existiert zu $\lambda > 0$ ein eindeutiges Element $R_\lambda f \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ mit

$$\mathcal{E}_\lambda(R_\lambda f, u) = \langle f, u\rangle \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}).$$

Die Abbildung $f \mapsto R_\lambda f$ ist linear. Sie ist auch injektiv, denn aus $R_\lambda f = 0$ folgt $0 = \mathcal{E}(R_\lambda f, u) = \langle f, u\rangle$ für alle $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Da $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{E})} = H$ gilt, folgt hieraus $f = 0$. Seien $\lambda, \mu > 0$ und $f \in H$, $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\lambda(R_\mu f - (\lambda-\mu) R_\lambda R_\mu f, u) &= \mathcal{E}_\lambda(R_\mu f, u) - (\lambda-\mu)\langle R_\mu f, u\rangle \\
&= \mathcal{E}_\lambda(R_\mu f, u) + (\lambda-\mu)\langle R_\mu f, u\rangle - (\lambda-\mu)\langle R_\mu f, u\rangle \\
&= \langle f, u\rangle = \mathcal{E}_\lambda(R_\lambda f, u)
\end{aligned}$$

und somit erfüllt $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ die Resolventengleichung. Der Bildbereich $\mathcal{R}(R_\lambda)$ ist unabhängig von λ und es gilt $\overline{\mathcal{R}(R_\lambda)} = H$, vgl. den Beweis von Satz 3.3. Setze $L = \lambda - R_\lambda^{-1}$ und $\mathcal{D}(L) = \mathcal{R}(R_\lambda)$. Es gilt nun $\|\lambda R_\lambda\| \leq 1$ für alle $\lambda > 0$, denn

$$\lambda\langle R_\lambda f, R_\lambda f\rangle \leq \mathcal{E}_\lambda(R_\lambda f, R_\lambda f) = \langle f, R_\lambda f\rangle \leq \|f\|\|R_\lambda f\|.$$

Außerdem gilt $(0,\infty) \subset \varrho(L)$. Wir zeigen nunn noch

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda u = u \quad \text{für alle } u \in H.$$

Für $u \in \mathcal{D}(L)$ gilt

$$\lambda R_\lambda u - u = R_\lambda(\lambda u - (\lambda - L) u) = R_\lambda(Lu).$$

Also gilt $\|\lambda R_\lambda u - u\| \leq \lambda^{-1}\|Lu\|$, woraus im Falle $u \in \mathcal{D}(L)$ die gewünschte Aussage folgt. Im allgmeinen Fall $u \in H$ verwendet man zusätzlich $\overline{\mathcal{D}(L)} = H$.

$\square$

Zunächst einige Vorbereitungen.

Lemma (Mazur). *Seien X ein Banachraum und (x_n) eine Folge in X mit $x_n \rightharpoonup x \in X$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$ und*

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \right\| \leq \varepsilon.$$

Satz (Banach-Saks). *Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Norm $\|\cdot\|$. Sei (x_n) eine Folge in H mit $x_n \rightharpoonup x \in H$ für $n \to \infty$. Dann existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) mit der Eigenschaft*

$$\left\| \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_{n_k} \right) - x \right\| \to 0 \quad \text{für } N \to \infty.$$

($\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} y_k$ heißt manchmal auch Cesaro-Mittel.*)*

4.8 Folgerung. *Seien $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ und $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ wie in Satz 4.7. Sei $(L, \mathcal{D}(L))$ der Erzeuger von $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ im Sinne von Satz 3.3. Dann gilt für alle $u \in \mathcal{D}(L)$, $v \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$*

$$\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad \text{und} \quad \mathcal{E}(u, v) = (-Lu, v).$$

Für alle $u, v \in \mathcal{D}(L)$ gilt

$$|L(u, v)| \leq K \sqrt{(Lu, u)} \sqrt{(Lv, v)}.$$

Die Aussagen gelten in analoger Weise für den Erzeuger $\left(\hat{L}, \mathcal{D}\left(\hat{L}\right)\right)$ von $\left(\hat{R}_\lambda\right)_{\lambda>0}$.

Beweis. Seien $\lambda > 0$ und $u \in \mathcal{D}(L)$. Dann gilt $u \in \mathcal{R}(R_\lambda) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$ und für alle $v \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ gilt

$$\mathcal{E}(u, v) = \mathcal{E}_\lambda \left(R_\lambda R_\lambda^{-1} u, v \right) - \lambda (u, v) = \left(R_\lambda^{-1} u, v \right) - \lambda (u, v) = (-Lu, v).$$

Gegeben sei eine stark stetige Kontraktionsresolvente $(R_\lambda)_{\lambda>0}$. Dann können wir recht einfach $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ über einen Abschlussprozess definieren. Es bleibt dann aber zu zeigen, dass diese Form $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ mit derjenigen Form übereinstimmt, welche in Satz 4.7 $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ erzeugt.

$\square$

4.9 Satz. *Sei $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ eine stark stetige Kontraktionsresolvente auf einem Hilbertraum H mit der Eigenschaft*

$$|(R_\lambda u, v)| \leq K\sqrt{|(R_\lambda u, u)|}\sqrt{|(R_\lambda v, v)|}, \quad \lambda > 0,\ u, v \in H.$$

Sei $(L, \mathcal{D}(L))$ der Erzeuger von $(R_\lambda)_{\lambda>0}$. Definiere nun für $u, v \in \mathcal{D}(L)$

$$\mathcal{E}(u, v) := (-Lu, v).$$

Sei $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ der Abschluss von $\mathcal{D}(L)$ bezüglich $\sqrt{\mathcal{E}_1^s}$. Die eindeutige, stetige, bilineare Fortsetzung von $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(L))$ auf $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ sei wieder mit $\mathcal{E}$ bezeichnet.

Dann ist $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ eine abgeschlossene, koerzive Form auf H mit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u, v) &= (-Lu, v) \quad \text{für } u \in \mathcal{D}(L),\ v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \text{ und} \\ \mathcal{E}(R_\lambda f, v) &= (f, v) \quad \text{für } f \in H,\ v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

Beweis. Im Wesentlichen ein standard Cauchy-Folgen-Abschluss-Argument. □

Wir kehren zurück zur Situation von Satz 4.7 und zeigen, dass $\mathcal{D}(L)$ dicht in $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ liegt. Wir benötigen hierzu folgendes, auch für sich genommen interessantes, Hilfsmittel.

4.10 Proposition. *Seien $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ eine abgeschlossene, koerzive Form und und $u_n \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}(u_n, u_n) < \infty$. Sei $u \in H$ mit $\|u_n - u\| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt*

(i) $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, $u_n \rightharpoonup u$ *im Hilbertraum* $\left(\mathcal{D}(\mathcal{E}), \sqrt{\mathcal{E}_1^s}\right)$.

(ii) *Es gibt eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass für $w_m = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m u_{n_k}$ gilt: $w_m \to u$ in $\left(\mathcal{D}(\mathcal{E}), \sqrt{\mathcal{E}_1^s}\right)$.*

(iii) $\mathcal{E}(u, u) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n, u_n)$.

Beweis. Banach-Alaoglu und Banach-Saks. □

Für eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ auf einem Hilbertraum H definieren wir eine Approximation der gewünschten Form über

$$\mathcal{E}^{(\lambda)}(u, v) = \lambda(u - \lambda R_\lambda u, v) \quad \text{für } u, v \in H.$$

Unmittelbar gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{(\lambda)}(u, \lambda R_\lambda u) &= \mathcal{E}^{(\lambda)}(u,u) + \mathcal{E}^{(\lambda)}(u, \lambda R_\lambda u - u) \\
&= \mathcal{E}^{(\lambda)}(u,u) - \lambda(\lambda R_\lambda u - u, \lambda R_\lambda u - u) \\
&= \mathcal{E}^{(\lambda)}(u,u).
\end{aligned}$$

4.11 Lemma. *Seien $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ und $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ wie in Satz 4.7 und $\lambda > 0$. Dann gilt*

(i) $\mathcal{E}^{(\lambda)}(u,v) = \mathcal{E}(\lambda R_\lambda u, v)$ *für* $u \in H$, $v \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

(ii) $\mathcal{E}(\lambda R_\lambda u, \lambda R_\lambda u) \leq \mathcal{E}^{(\lambda)}(u,u)$ *für* $u \in H$.

(iii) $\left|\mathcal{E}_1^{(\lambda)}(u,v)\right| \leq (K+1)\sqrt{\mathcal{E}_1(u,u)}\sqrt{\mathcal{E}_1^{(\lambda)}(v,v)}$ *für* $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, $v \in H$.

(iv) $\mathcal{E}_1(\lambda R_\lambda u, \lambda R_\lambda u) \leq (K+1)^2 \mathcal{E}_1(u,u)$ *für* $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

4.12 Satz. *Seien $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ und $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ wie in Satz 4.7. Sei $(L, \mathcal{D}(L))$ der Erzeuger von $(R_\lambda)_{\lambda>0}$. Dann gilt*

(i) Für $u \in H$ gilt: $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{\lambda>0} \mathcal{E}^{(\lambda)}(u,u) < \infty$.

(ii) $\mathcal{D}(L)$ ist dicht in $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ und

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathcal{E}_1(\lambda R_\lambda u - u, \lambda R_\lambda u - u) = 0. \tag{4.3}$$

(iii) $\lim_{\lambda\to\infty} \mathcal{E}^{(\lambda)}(u,v) = \mathcal{E}(u,v)$ *für* $u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

Beweis. Zu (i): Sei $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Nach Lemma 4.11 (iii) gilt

$$\mathcal{E}^{(\lambda)}(u,u) \leq (K+1)^2 \mathcal{E}_1(u,u) \quad \text{für } \lambda > 0.$$

Sei nun $u \in H$ mit $\sup_{\lambda>0} \mathcal{E}^{(\lambda)}(u,u) < \infty$. Nach Lemma 4.11 (ii) und wegen $\|\lambda R_\lambda\| \leq 1$ gilt

$$\sup_{\lambda>0} \mathcal{E}_1(\lambda R_\lambda u, \lambda R_\lambda u) < \infty.$$

Beachte, dass $\lambda R_\lambda u \to u$ (stark) in H für $\lambda \to \infty$. Wir wenden Proposition 4.10 an und sind fertig.

Zu (ii): Sei $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Nach Lemma 4.11 (iv) gilt

$$\sup_{\lambda>0} \mathcal{E}_1(\lambda R_\lambda u, \lambda R_\lambda u) < \infty.$$

Nach Proposition 4.10 existiert eine Folge $(\lambda_n R_{\lambda_n} u)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lambda \to \infty$ und der Eigenschaft, dass die Mittel (in Proposition 4.10 heißen sie w_m) von $\lambda_n R_{\lambda_n} u$ stark gegen ein $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ konvergieren. Da $\lambda_n R_{\lambda_n} u \in \mathcal{D}(L)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt, dass $\mathcal{D}(L)$ dicht in$\mathcal{D}(\mathcal{E})$ liegt. Die Konvergenz (4.3) folgt aus Lemma 4.11 (ii) nach einem Approximationsargument.

Zu (iii): Folgt aus (i) und (ii) (Übung).

□

4.13 Satz. *Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ eine abgeschlossene, koerzive Form auf einem Hilbertraum H. Setze*

$$\mathcal{D}(L) = \{u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \,|\, v \mapsto \mathcal{E}(u,v) \ \textit{ist stetig auf } \mathcal{D}(\mathcal{E}) \ \textit{bzgl. der Norm auf } H\}.$$

Für $u \in \mathcal{D}(L)$ sei Lu definiert als das eindeutige Element in H mit

$$(-Lu, v) = \mathcal{E}(u,v) \quad \textit{für alle } v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}).$$

Dann ist $(L, \mathcal{D}(L))$ der Erzeuger der stark stetigen Kontraktionsresolvente, welche wie im Satz 4.7 von $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ „erzeugt" wird. Der Operator $(1 - L, \mathcal{D}(L))$ erfüllt die Sektorbedingung und die Beziehung

$$\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}), \quad \mathcal{E}(u,v) = (-Lu, v) \quad \textit{für } u \in \mathcal{D}(L),\ v \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$$

stellt einen bijektiven Zusammenhang zwischen solchen L (d.h. mit $1 - L$ erfüllt die Sektorbedingung) und abgeschlossenen, koerziven Formen $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ dar.

5 Dirichlet-Formen: Fortsetzung

Wir wiederholen Abschließbarkeit und Markov-Eigenschaft von Formen, dieses Mal allerdings im Hinblick auf nichtsymmetrische Formen.

5.1 Definition. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ eine positiv definite Form auf einem Hilbertraum H. Dann heißt $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ *abschließbar*, wenn $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ abschließbar ist.

Bemerkung.

- *Wiederholung: $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ abschließbar bedeutet, dass aus*

  $$\mathcal{E}^s(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0 \textit{ mit } \|u_n\| \to 0$$

  $\mathcal{E}^s(u_n, u_n) \to 0$ folgt. Falls $\overline{\mathcal{D}}$ den Abschluss von $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ bezüglich $\sqrt{\mathcal{E}_1^s}$ bezeichnet (also nicht den Abschluss bezüglich $\|\cdot\|_H$), so ist $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ abschließbar genau dann, wenn die Inklusion $\overline{\mathcal{D}} \hookrightarrow H$ injektiv ist.

- *Falls für einen Operator $(A, \mathcal{D})$ gilt $\mathcal{E}(u, v) = (Au, Av)$ für alle $u, v \in \mathcal{D}$, dann ist $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ abschließbar genau dann, wenn $(A, \mathcal{D})$ abschließbar ist.*

- *Falls $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ die Bedingung (SSB) erfüllt, so lässt sich nicht nur $\mathcal{E}^s$ sondern auch $\mathcal{E}$ in eindeutiger Weise von $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ auf $\overline{\mathcal{D}}$ fortsetzen. Falls $\mathcal{D}$ dicht in H ist, so ist $\left(\mathcal{E}, \overline{\mathcal{D}}\right)$ die kleinste koerzive, abgeschlossene Fortsetzung von $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$. Diese Form heißt* Abschluss von $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$.

5.2 Lemma. *Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ eine positiv definite Form auf einem Hilbertraum H, welche (SSB) erfüllt. Es gelte $\mathcal{E}(v, u_n) \to 0$ falls $u_n, v \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ und $\|u_n\| \to 0$. Dann ist $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ abschließbar.*

Beweis. Sei (u_n) Folge in $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ mit $\|u_n\| \to 0$ und $\mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0$ für $n, m \to \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1(u_n, u_n) &\leq \mathcal{E}_1(u_n - u_m, u_n) + \mathcal{E}_1(u_m, u_n) \\
&\leq \mathcal{E}_1(u_n - u_m, u_n - u_m) + \underbrace{\mathcal{E}_1(u_n - u_m, u_m)}_{\leq \sqrt{\mathcal{E}_1(u_n - u_m, u_n - u_m)}\sqrt{\mathcal{E}_1(u_m, u_m)}} + \mathcal{E}_1(u_m, u_n) \\
&\to 0 \quad \text{für } n \to \infty.
\end{aligned}$$

$\square$

5.3 Proposition. *Sei* $(A, \mathcal{D}(A))$ *ein negativ definiter Operator auf einem Hilbertraum* H *derart, dass* $1 - A$ *die starke Sektorbedingung (SB) erfüllt. Definiere für* $u, v \in \mathcal{D}(A)$

$$\mathcal{E}(u, v) = (-Au, v).$$

Dann ist $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(A))$ *abschließbar.*

Bemerkung. *Proposition 5.3 ist offensichtlich, falls A symmetrisch ist. Der Beweis folgt aus Lemma 5.2, da* $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(A))$ *die Bedingung (SSB) erfüllt, wenn* $(1 - A)$ *die Sektorbedingung erfüllt.*

5.4 Proposition. *Sei* $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ *eine positiv definite Form auf einem Hilbertraum* H. *Sei* $(\mathcal{F}, \mathcal{D})$ *eine symmetrische, abschließbare Form mit der Eigenschaft* $\mathcal{E}_1 \asymp \mathcal{F}_1$ *auf* $\mathcal{D}$, *d.h. es gibt* $c \geq 0$ *derart, dass für alle* $u \in \mathcal{D}$ *gilt*

$$c^{-1}\mathcal{E}_1(u, u) \leq \mathcal{F}_1(u, u) \leq c\mathcal{E}_1(u, u).$$

Dann ist $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ *selbst abschließbar.*

Falls $\mathcal{D}$ *dicht in* H *ist und für ein* $c' \geq 1$ *gilt*

$$|\mathcal{E}_1(u, v)| \leq c' \sqrt{\mathcal{F}_1(u, u)} \sqrt{\mathcal{F}_1(v, v)} \quad \forall\, u, v \in \mathcal{D},$$

so ist $\left(\mathcal{E}, \overline{\mathcal{D}}\right)$ *eine abgeschlossene, koerzive Form auf* H.

Im Folgenden sei X wie in Kapitel 1 ein lokalkompakter, separabler, metrischer Raum und m ein nichtnegatives Borel-Maß, welches endlich auf Kompakta und strikt positiv auf nichtleeren, offenen Teilmengen ist. Wir betrachten $H = L^2(X, m)$, wobei wir meistens an $L^2\left(\mathbb{R}^d, \lambda^d\right)$ denken. Im Folgenden sind Relationen der Art $\leq, \geq$ „m-fast überall" zu verstehen.

5.5 Definition. Sei $R\colon L^2(X) \to L^2(X)$ beschränkt und linear. Dann erfüllt R die *Sub-Markoffeigenschaft*, falls für $f \in L^2(X)$ mit $0 \leq f \leq 1$ gilt

$$0 \leq Rf \leq 1. \tag{SME}$$

Eine stark stetige Kontraktionsresolvente $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ besitzt die SME, falls λR_λ für jedes $\lambda > 0$ die SME besitzt. Eine Halbgruppe $(T_t)_{t>0}$ besitzt die SME, falls T_t für jedes $t > 0$ die SME besitzt.

Ein abgeschlossener Operator $(A, \mathcal{D}(A))$ mit $\overline{\mathcal{D}(A)} = L^2(X)$ heißt *Dirichlet-Operator*, falls

$$\left(Au, (u-1)^+\right) \leq 0 \quad \text{für jedes } u \in \mathcal{D}(A).$$

Bemerkung.

- *Falls R die SMe besitzt, folgt aus $f \in L^2(X)$, $f \geq 0$ auch $Rf \geq 0$.*
- *Dirichlet-Operatoren sind negativ definit.*

5.6 Proposition. *Seien $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ eine stark stetige Kontraktionsresolvente auf $L^2(X)$ mit zugehörigem Erzeuger L und Halbgruppe $(T_t)_{t>0}$. Dann sind äquivalent:*

(i) $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ *besitzt (SME).*

(ii) $(T_t)_{t>0}$ *besitzt (SME).*

(iii) L *ist ein Dirichlet-Operator.*

Beweis. Vgl. Prop. 4.3 in MR92. □

5.7 Proposition. *Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ eine abgeschlossene, koerzive Form auf $L^2(X)$ mit zugehöriger Resolvente $(R_\lambda)_{\lambda>0}$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathcal{E}(u \wedge \alpha, u - u \wedge \alpha) \geq 0$ *für* $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, $\alpha \geq 0$, $u \wedge \alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

(ii) $\mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u - u^+ \wedge 1) \geq 0$ *für* $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, $u^+ \wedge 1 \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

(iii) $\mathcal{E}(u + u^+ \wedge 1, u - u^+ \wedge 1) \geq 0$ *für* $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, $u^+ \wedge 1 \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

(iv) $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ *besitzt (SME).*

Beweis. Vgl. Theorem 4.4 in MR92. □

5.8 Definition. Eine koerzive, abgeschlossene Form $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ auf $L^2(X)$ heißt *Dirichlet-Form*, falls für jedes $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ gilt:

$$\begin{aligned} u^+ \wedge 1 &\in \mathcal{D}(\mathcal{E}), \\ \mathcal{E}\left(u + u^+ \wedge 1, u - u^+ \wedge 1\right) &\geq 0, \\ \mathcal{E}\left(u - u^+ \wedge 1, u + u^+ \wedge 1\right) &\geq 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Bemerkung.

- *Falls $\mathcal{E}$ symmetrisch ist, so ist (5.1) äquivalent zu $u^+ \wedge 1 \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \leq \mathcal{E}(u, u)$.*

- *Das Tupel $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ heißt in der englischen Literatur auch manchmal „Dirichlet space".*

Wiederholung: Eine koerzive, abgeschlossene Form $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ auf $L^2(X)$ heißt *Dirichletform*, falls für $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ gilt

$$\begin{aligned} u^+ \wedge 1 &\in \mathcal{D}(\mathcal{E}), \\ \mathcal{E}\left(u + u^+ \wedge 1, u - u^+ \wedge 1\right) &\geq 0, \\ \mathcal{E}\left(u - u^+ \wedge 1, u + u^+ \wedge 1\right) &\geq 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Anstelle von (5.2) kann man auch andere verwandte Bedingungen betrachten:

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\varphi_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to [-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ derart, dass

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(t) = t \quad &\text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 \leq \varphi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(s) \leq t - s \quad &\text{für } t \geq s, \\ \varphi_\varepsilon \circ u &\in \mathcal{D}(\mathcal{E}), \\ \liminf_{\varepsilon \to 0} \mathcal{E}\left(u \pm \varphi_\varepsilon \circ u, u \mp \varphi_\varepsilon \circ u\right) &\geq 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

oder

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(t) = t \quad &\text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 \leq \varphi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(s) \leq t - s \quad &\text{für } t \geq s, \\ \varphi_\varepsilon \circ u &\in \mathcal{D}(\mathcal{E}), \\ \liminf \mathcal{E}\left(\varphi_\varepsilon \circ u, u - \varphi_\varepsilon \circ u\right) &\geq 0, \\ \liminf \mathcal{E}\left(u - \varphi_\varepsilon \circ u, \varphi_\varepsilon \circ u\right) &\geq 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

5.9 Proposition. *Eine koerzive, abgeschlossene Form $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ auf $L^2(X)$ ist eine Dirichletform genau dann, wenn sie (5.2), (5.3) oder (5.4) auf einer dichten Teilmenge von $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ erfüllt.*

Beweis. Vgl. [HR92] □

Beispiel. 1) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\sigma \in L^1_{loc}(\Omega, \mathrm{d}x)$, $\sigma \geq 0$ $\mathrm{d}x$-f.ü. mit $\int_{\mathcal{O}} \sigma \, \mathrm{d}x > 0$, falls $\mathcal{O} \subset \Omega$ offen, $\mathcal{O} \neq \emptyset$.

Seien $\varrho_i \in L^1_{loc}(\Omega, \mathrm{d}x)$ mit $\varrho_i \geq 0$ $\mathrm{d}x$-f.ü. für $i \in \{1, \ldots, d\}$. Wir wollen eine notwendige

Bedingung dafür herleiten, dass die durch

$$\mathcal{E}^s(u,v) = \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varrho_i \, \mathrm{d}x$$

gegebene Form $(\mathcal{E}^s, C_c^\infty(\Omega))$ auf $L^2(\Omega, \sigma\, \mathrm{d}x)$ abschließbar ist.

Zunächst ist $(\mathcal{E}^s, C_c^\infty(\Omega))$ symmetrisch, positiv definit und dicht definiert.

Definiere

$$\begin{aligned} R_\sigma &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists\, \varepsilon > 0\colon \int_{B_\varepsilon(x)\cap\Omega} \sigma^{-1}(y)\, \mathrm{d}y < \infty \right\}, \\ R_i &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists\, \varepsilon > 0\colon \int_{B_\varepsilon(x)\cap\Omega} \varrho_i^{-1}(y)\, \mathrm{d}y < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Bemerkung.

- *Die Mengen R_σ, R_i sind offen und σ bzw. ϱ_i sind $\mathrm{d}x$-f.ü. positiv in R_σ bzw. R_i.*
- *Die Bedingung*

$$\varrho_i = 0 \quad \mathrm{d}x\text{-f.ü. in } \Omega \subset R_i \tag{5.5}$$

ist äquivalent zu

$$\exists\, \varepsilon > 0\colon \int_{B_\varepsilon(1)} \varrho_i^{-1}(y)\, \mathrm{d}y < \infty \quad \mathrm{d}x\text{-f.ü. auf } \{\varrho_i > 0\} \cap \Omega.$$

5.10 Satz. *Es gelte zusätzlich zu den obigen Voraussetzungen die Bedingung (5.5) für $\varrho_1, \ldots, \varrho_d$ und entsprechend für σ und es gelte $\int_{R_i \setminus R_\sigma} \mathrm{d}x = 0$. Dann ist die Form $(\mathcal{E}^s, C_c^\infty(\Omega))$ abschließbar in $L^2(\Omega, \sigma\, \mathrm{d}x)$.*

5.11 Lemma. *Bedingung (5.5) sei erfüllt für $\varrho_1, \ldots, \varrho_d$ und σ. Dann gilt*

$$\begin{aligned} L^2(\Omega, \varrho_i\, \mathrm{d}x) &\subset L^1_{loc}(R_i, \mathrm{d}x) \quad \text{und} \\ L^2(\Omega, \sigma\, \mathrm{d}x) &\subset L^1_{loc}(R_\sigma, \mathrm{d}x). \end{aligned}$$

Beweis. Sei $i \in \{1, \ldots, d\}$, $f \in L^2(\Omega, \varrho_i\, \mathrm{d}x)$, $K \subset R_i$ kompakt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_K |f|\, \mathrm{d}x &= \int_{K\cap\{\varrho_i>0\}} |f| \sqrt{\varrho_i}\sqrt{\varrho_i}^{-1}\, \mathrm{d}x \\ &\le \left(\int_{K\cap\{\varrho_i>0\}} |f|^2 \varrho_i\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{K\cap\{\varrho_i>0\}} \varrho_i^{-1}\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \end{aligned}$$

nach Voraussetzung.

□

Beweis von Satz 5.10. Seien $i \in \{1, \ldots, d\}$ und (u_n) Folge in $C_c^\infty(\Omega)$ mit $u_n \to 0$ in $L^2(\Omega, \sigma\,\mathrm{d}x)$ und $\mathcal{E}^s(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0$ für $n, m \to \infty$. Wegen Lemma 5.11 gilt $u_n \to 0$ in $L^1_{loc}(R_\sigma, \mathrm{d}x)$. Es gibt $v_i \in L^2(\Omega, \varrho_i\,\mathrm{d}x)$ mit

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to v_i \quad \text{in } L^2(\Omega, \varrho_i\,\mathrm{d}x),$$

also wiederrum mit Lemma 5.11

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to v_i \quad \text{in } L^1_{loc}(R_i, \mathrm{d}x).$$

Wir zeigen nun noch $v_i = 0$ $(\varrho_i\,\mathrm{d}x)$-f.ü., woraus dann wie gewünscht

$$\mathcal{E}^s(u_n, u_n) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

folgt. Sei $\varphi \in C_c^\infty(R_i \cap R_\sigma)$. Dann gilt

$$\int_{R_i} v_i \varrho\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{R_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \varrho\,\mathrm{d}x = -\lim_{n\to\infty} \int_{R_i} u_n \frac{\partial \varrho}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Also gilt $v_i = 0$ $\mathrm{d}x$-f.ü. auf $R_i \cap R_\sigma$ und wegen $\int_{R_i \setminus R_\sigma} \mathrm{d}x = 0$ auch $(\varrho_i\,\mathrm{d}x)$-f.ü.

□

Der Abschluss von $(\mathcal{E}^s, C_c^\infty(\Omega))$ ist dann auch eine Dirichletform, was wir kurz in Beispiel 3) diskutieren.

Beispiel. 2) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $a_{ij} \in L^1_{loc}(\Omega, \mathrm{d}x)$ mit $a_{ij} = a_{ji}$ für $1 \le i, j \le d$. Seien $\sigma, \varrho_i \in L^1_{loc}(\Omega, \mathrm{d}x)$ mit $\varrho_i, \sigma > 0$ $\mathrm{d}x$-f.ü. in Ω und derart, dass $(\mathcal{E}^s, C_c^\infty(\Omega))$ abschließbar in $L^2(\Omega, \sigma\,\mathrm{d}x)$ ist, vgl. Beispiel 1).

Es gelte $\mathrm{d}x$-f.ü. in Ω

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \ge \sum_{i=1}^{d} \varrho_i(x)\,(\xi_i)^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{5.6}$$

5.12 Satz. *Setze für $u, v \in C_c^\infty(\Omega)$*

$$\mathcal{E}(u, v) = \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x.$$

Unter den obigen Voraussetzungen ist $(\mathcal{E}, C_c^\infty(\Omega))$ abschließbar in $L^2(\Omega, \sigma\, \mathrm{d}x)$.

Beweis. Sei $(u_n)_n$ eine Folge in $C_c^\infty(\Omega)$ mit $u_n \to 0$ in $L^2(\Omega, \sigma\, \mathrm{d}x)$ und $\mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0$ für $n, m \to \infty$. Wegen (5.6) gilt dann auch $\mathcal{E}^s(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0$ und wegen $\varrho_i > 0$ gilt für eine Teilfolge (u_{n_k})

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_{n_k} \to 0 \quad \mathrm{d}x\text{-f.ü.},$$

vgl. Beispiel 2). Mit Hilfe des Lemmas von Fatou folgt dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(u_n, u_n) &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^d \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(u_n - u_{n_k}) \frac{\partial}{\partial x_j}(u_n - u_{n_k}) a_{ij} \right) \mathrm{d}x \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(u_n - u_{n_k}, u_n - u_{n_k}) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.
\end{aligned}$$

□

Der Abschluss von $(\mathcal{E}, C_c^\infty(\Omega))$ ist dann eine Dirichletform, vgl. Beispiel 3).

Beispiel. 3) Seien $X = \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, m ein Radon-Maß mit $\operatorname{supp}(m) = \Omega$, k ein Radon-Maß auf Ω, J ein symmetrisches Radon-Maß auf $\Omega \times \Omega \setminus \Delta$, wobei $\Delta = \{(x,x) \mid x \in \Omega\}$ mit

$$\int |u(x) - u(y)|^2 \, J(\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y) < \infty \quad \text{für alle } u \in C_c^\infty(\Omega).$$

Seien für $1 \leq i, j \leq d$ ν_{ij} weitere Radon-Maße auf Ω mit

$$\forall K,\ K \text{ kompakt}: \nu_{ij}(K) = \nu_{ji}(K) \quad \text{und}$$

$$\sum_{i,j=1}^d \xi_i \xi_j \nu_{ij}(K) \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Setze für $u, v \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(u,v) &= \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, \mathrm{d}\nu_{ij} \\
&\quad + \int_{(\Omega\times\Omega)\setminus\Delta} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) \, J(\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y) \\
&\quad + \int_\Omega uv \, \mathrm{d}k. \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

Dann ist $(\mathcal{E}, C_c^\infty(\Omega))$ eine dicht definierte, symmetrische, positiv definite Form auf

$L^2(\Omega, m)$.

Falls $(\mathcal{E}, C_c^\infty(\Omega))$ abschließbar auf $L^2(\Omega, m)$, vgl. die Beispiele 1) und 2), so ist der Abschluss $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ eine Dirichlet-Form. Nachweis davon mit Hilfe von Proposition 5.9: Wir wissen, dass es zu $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ gibt mit

$$\varphi_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to [-\varepsilon, 1+\varepsilon], \quad \varphi_\varepsilon(t) = t \quad \text{für } 0 \le t \le 1,$$
$$0 \le \varphi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(s) \le t - s \quad \text{für } t \ge s,$$
$$\varphi_\varepsilon(t) = 1 + \varepsilon \quad \text{für } t \ge 1 + 2\varepsilon, \quad \varphi_\varepsilon(t) = -\varepsilon \quad \text{für } t \le -2\varepsilon.$$

Für die Funktion gilt

$$\mathcal{E}(\varphi_\varepsilon(u), \varphi_\varepsilon(u)) \le \mathcal{E}(u, u).$$

□

Zur Bedeutung von Beispiel 3) führen wir folgenden, wichtigen Satz an:

5.13 Satz. *Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ eine symmetrische Dirichlet-Form auf $L^2(X, m)$ mit $C_c^\infty(\Omega) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Dann existiert eine Darstellung von $(\mathcal{E}, C_c^\infty(\Omega))$ der Form (5.7).*

Beweis. Fukushima, Sec. 2.2 oder Fukushima / Oshima / Takeda, Sec. 3.2. □

5.14 Definition. Eine Dirichlet-Form $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ auf $L^2(X, m)$ heißt *regulär*, falls $C_c(X) \cap \mathcal{D}(\mathcal{E})$ dicht ist

(i) in $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ bezüglich $\sqrt{\mathcal{E}_1^s}$,

(ii) in $C_c(X)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

6 Markov-Übergangsfamilien und Dirichlet-Formen: Eine Einführung

Zunächst sei X ein Hausdorff-Raum, $\mathcal{B}(X)$ die Borelsche σ-Algebra und m ein σ-additives Radon-Maß. Eine Funktion

$$K\colon X \times \mathcal{B}(X) \to [0, \infty)$$

heißt *Kern*, falls $K(x, \cdot)$ ein Maß für jedes $x \in X$ und $K(\cdot, A)$ $\mathcal{B}(X)$-messbar für jedes $A \in \mathcal{B}(X)$. Sei $f\colon X \to [0, \infty)$ nichtnegativ und $\mathcal{B}(X)$-messbar. Dann definieren wir

$$Kf(x) = \int_X f(y)\ K(x, \mathrm{d}y). \tag{6.1}$$

Ein Kern K heißt *Sub-Markov-Kern*, falls $K(x, X) \leq 1$ für jedes $x \in X$. Jeder Sub-Markov-Kern K definiert über (6.1) einen linearen Operator auf dem Raum der beschränkten $\mathcal{B}(X)$-messbaren Funktionen $X \to \mathbb{R}$, welchen wir fortan mit $B(X)$ bezeichnen.

Ein Sub-Markov-Kern heißt *Wahrscheinlichkeitskern*, falls $K(x, \cdot)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist für jedes $x \in X$.

Ein Kern K heißt m-symmetrisch, falls

$$\int_X (Kf)(x)\, g(x)\ m(\mathrm{d}x) = \int_X f(x)\, (Kg)(x)\ m(\mathrm{d}x)$$

für alle $\mathcal{B}(X)$-messbaren, nichtnegativen Funktionen $f, g\colon X \to [0, \infty)$.

Sei nun K ein m-symmetrischer Kern auf $(X, \mathcal{B}(X), m)$ und $f \in B(X) \cap L^2(X, m)$. Wegen (6.1) gilt

$$(Kf)^2(x) \leq \left(Kf^2\right)(x)$$

und es folgt

$$\begin{aligned}
\|Kf\|^2_{L^2(X,m)} &= \int_X (Kf)^2\ m(\mathrm{d}x) \leq \int_X \left(Kf^2\right)\ m(\mathrm{d}x) \\
&= \int_X f^2(x)\ K1\, m(\mathrm{d}x) \leq \|f\|^2_{L^2(X,m)}.
\end{aligned}$$

Also liefert K einen beschränkten, linearen Operator auf dem Raum derjenigen $L^2(X,m)$-Funktionen, welche wesentlich beschränkt sind. Da dieser Raum dicht liegt in $L^2(X,m)$, können wir K zu einem linearen, symmetrsichen Operator mit Kontraktionseigenschaft auf $L^2(X,m)$ fortsetzen.

Im Folgenden sei angenommen, dasss X ein polnischer Raum ist. (Ein separabler, topologischer Raum ist *polnisch*, wenn es eine mit der Topologie verträgliche Metrik d gibt, sodass (X,d) vollständig ist. Abgeschlossene und offene Teilmengen von polnichen Räumen sind selbst polnisch. Übung: Zeige, dass $(0,1)$ ein polnischer Raum ist.)

Jedes endliche Maß auf einem polnischen Raum ist regulär.

6.1 Definition. Eine Familie $(P_t)_{t\geq 0}$ von Sub-Markov-Kernen P_t auf $(X,\mathcal{B}(X))$ heißt *Übergangsfamilie auf* $(X,\mathcal{B}(X))$, falls gilt:

(a) $P_s(P_t f) = P_{s+t} f$ für alle $s,t\geq 0$ und $f\in B(X)$.

(b) Für jede Menge $A\in\mathcal{B}(X)$ ist die Abbildung $(t,x)\mapsto P_t(x,A)$ $\mathcal{B}([0,\infty))\times\mathcal{B}(X)$-messbar.

(c) Für jedes $x\in X$ gilt $P_0(x,\cdot)=\delta_x$.

(d) $\lim_{t\to 0} P_t f(x) = f(x)$ für alle $f\in C_b(X)$, $x\in X$.

$(P_t)_{t\geq 0}$ heißt *Übergangswahrscheinlichkeit*, falls für jedes $t>0$ P_t ein Wahrscheinlichkeitskern ist.

Gegeben eine Übergangsfamilie $(P_t)_{t\geq 0}$, so definiert

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x)\,\mathrm{d}t,\;\; f\in B(X),\;\; \lambda>0,\;\; x\in X$$

eine Resolvente auf X.

6.2 Lemma. *Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ eine Familie von Sub-Markov-Kernen, welche a) und b) aus Definition 6.1 erfüllen. Für ein σ-endliches Maß m auf X sei P_t m-symmetrisch für jedes $t\geq 0$. Sei für $t\geq 0$ T_t der lineare, symmetrische Operator auf $L^2(X,m)$, welcher von P_t erzeugt wird. Dann ist $(T_t)_{t\geq 0}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe.*

Beweis. Wir zeigen, dass $C_b(X)\cap L^2(X,m)$ dicht in $L^2(X,m)$ liegt. Da m σ-endlich ist, ist es ausreichend, diese Aussage nur im Fall, dass m endlich ist, zu beweisen. Wir zeigen, dass zu $\varepsilon>0$ und $A\in\mathcal{B}(X)$ und $f=\mathbb{I}_A$ eine Funktion $g\in C_b(X)\cap L^2(X,m)$ existiert mit

$$\|f-g\|_{L^2(X,m)}\leq\sqrt{\varepsilon}.$$

Da m regulär ist, existieren zu $\varepsilon > 0$, $A \in \mathcal{B}(X)$ zwei Mengen $K \in \mathcal{B}(X)$, $U \in \mathcal{B}(X)$, K kompakt und U offen mit $K \subset A \subset U$ und $m(K \setminus U) \leq \varepsilon$. Setze

$$g(x) = \frac{d\left(x, U^{\complement}\right)}{d\left(x, U^{\complement}\right) + d(x, K)},$$

dann ist $g \in C_b(X) \cap L^2(X, m)$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \|g - \mathbb{I}_A\|^2_{L^2(X,m)} &= \int_X (g - \mathbb{I}_A)^2 \, \mathrm{d}m = \underbrace{\int_{U^{\complement}}}_{=0} + \int_{U \setminus K} + \underbrace{\int_K}_{=0} \\ &\leq \int_{U \setminus K} 1 \, m(\mathrm{d}x) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Resultats kann man nun zeigen, dass $(T_t)_{t \geq 0}$ stark stetig ist. Die anderen Eigenschaften sind bereits klar.

Seien $f \in L^2(X, m)$ und $\varepsilon > 0$. Sei $g \in C_b(X) \cap L^2(X, m)$ mit $\|f - g\|_{L^2(X,m)} \leq \varepsilon$. Es gilt

$$\begin{aligned} \|T_t f - f\|_{L^2(X,m)} &= (P_t g - g, P_t g - g) = (P_t g, P_t g) + (g, g) - 2(g, P_t g) \\ &\leq 2\|g\|^2_{L^2(X,m)} - 2(g, P_t g). \end{aligned}$$

Wegen d) folgt dann $\|P_t g - g\|_{L^2(X,m)} \to 0$ für $t \to 0$.

$\square$

Im Ergebnis können wir nun schließen, dass eine m-symmetrische Übergangsfamilie $(P_t)_{t \geq 0}$ auf $(X, \mathcal{B}(X), m)$ eine eindeutig bestimmte Kontraktionshalbgruppe $(T_t)_{t \geq 0}$ auf $L^2(X, m)$ festlegt: Die Resolvente $(R_\lambda)_{\lambda > 0}$ von $(T_t)_{t \geq 0}$ ist die eindeutige Fortsetzung der zu $(P_t)_{t \geq 0}$ gehörenden Resolvente (die oben auch R_λ hieß) von $B(X) \cap L^2(X, m)$ auf $L^2(X, m)$.

Des weiteren gilt dann für $f \in B(X) \cap L^2(X, m)$

$$R_\lambda f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad \text{und} \quad \mathcal{E}_\lambda(R_\lambda f, v) = (f, v) \;\; \text{für } v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}), \tag{6.2}$$

wobei $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ die zu $(T_t)_{t \geq 0}$ gehörige Dirichlet-Form ist auf $L^2(X, m)$ ist.

Falls die Resolvente einer Übergangsfamilie $(P_t)_{t \geq 0}$ Eigenschaft (6.2) besitzt für eine Dirichlet-Form $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$, so ist diese bereits diejenige, die zu $(T_t)_{t \geq 0}$ gehört.

Sei $\lambda > 0$ und $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $\tau \colon \Omega \to (0, \infty)$ messbar. τ

heißt *exponential verteilt zum Parameter* λ, falls

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau > s) \quad & \Big(= \quad \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, \tau(\omega) > s\})\Big) = e^{-\lambda s} \\ & \Big(= \quad \int_s^\infty \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\Big).\end{aligned}$$

Es gilt

$$\mathbb{E}(\tau) \quad \Big(= \quad \int_\Omega \tau(\omega)\,\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)\Big) = \frac{1}{\lambda}.$$

Vorstellung: τ ist eine Wartezeit / Ankunftszeit. Interessante Beobachtung:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau > t+s \,|\, \tau > t) &= \frac{\mathbb{P}(\tau > t+s, \tau > t)}{\mathbb{P}(\tau > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(\tau > s),\end{aligned}$$

d.h. die zufällige Zeit τ hat kein Gedächtnis. Eine messbare Funktion $N\colon \Omega \to \mathbb{N}$, d.h. N ist Zufallsvariable, heißt *Poisson-verteilt zum Parameter* $\lambda > 0$, falls

$$\mathbb{P}(N = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Es gilt

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{n=0}^\infty \frac{n\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \lambda.$$

Wir definieren nun zwei Sprungprozesse:

(1) Sei $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, zum Parameter $\lambda > 0$ exponential verteilter Zufallsvariablen. Wir definieren nun rekursiv eine Folge $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen durch

$$\begin{aligned}T_0 &= 0, \\ T_{k+1} &= T_k + \tau_k.\end{aligned}$$

(Zur Vorstellung: Sei τ_k ist die Wartezeit von Kunde k zum Kunden $k+1$, so ist T_k die Gesamtwartedauer bis zum Eintreffen des k-ten Kunden.) Nun definieren wir für

$t \geq 0$

$$\begin{aligned} N(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{I}_{\{T_k \leq t\}} = \max\{k > 0 \mid T_k \leq t\} \\ &= \text{Änzahl der Kunden bis zum Zeitpunkt } t\text{"}. \end{aligned}$$

Für $N(t)$ gilt dann

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \tag{6.3}$$

Den stochastischen Prozess N (N hängt ab von t und $\omega \in \Omega$) nennt man *Poisson-Prozess zum Parameter* λ.

(2) Sei S ein abzählbarer Zustandsraum, z.B. ein Graph oder Gitter. Sei $K = \{k(x,y)\}_{x,y \in S}$ eine Matrix mit Zeilensumme 1, also eine Übergangsmatrix. Sei $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die zugehörige zeitdiskrete Markov-Kette. Sei $(N(t))_{t \geq 0}$ ein Poisson-Prozess zum Parameter λ. Wir nehmen an, dass die beiden Prozesse $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(N(t))_{t \geq 0}$ voneinander unabhängig sind. Setze für $t \geq 0$

$$X_t = E_{N(t)}.$$

Hierbei sind einige „Sprünge", die keinen Zustandswechsel bedeuten, ebenfalls möglich, da nicht notwendigerweise $k(x,x) = 0$ gilt. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(t) = y \mid X(0) = x) &= \mathbb{P}\left(E_{N(t)} = y \,\middle|\, E_0 = x\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n = y, N(t) = n \mid E_0 = x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n = y \mid E_0 = x)\, \mathbb{P}(N(t) = n) \\ &\overset{(6.3)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} k^n(x,y), \end{aligned}$$

wobei $k^n(x,y)$ der entsprechende Eintrag der Matrix $k^n = \underbrace{k \cdots k}_{n\text{-mal}}$ ist.

(3) Seien X ein lokal kompakter, separabler, metrischer Raum und Q ein Wahrscheinlichkeitskern auf $X \times \mathcal{B}(X)$, wobei $\mathcal{B}(X)$ die Borelsche σ-Algebra ist. Es gelte $Q(x, \{x\}) = 0$ für alle $x \in X$. Sei $\lambda\colon X \to (0, \infty)$ $\mathcal{B}(X)$-messbar. Wir wollen einen zeitkontinuierlichen Prozess $(\mathcal{X}_t)_{t \geq 0}$ definieren bzw. konstruieren, der folgendes mo-

delliert:

Ein Partikel starte zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $x_0 \in X$. In diesem Punkt wartet das Partikel T_1 Zeiteinheiten, wobei T_1 exponential verteilt mit Paramter $\lambda(x_0)$ ist. Im Zeitpunkt $t = T_1$ springt der Prozess in einen Punkt $x_1 \in X$ gemäß der Verteilung $Q(x_0, \cdot)$. Dort wartet deas Partikel T_2 Zeiteinheiten und springt anschließend in einen Punkt x_2 gemäß der Verteilng $Q(x_1, \cdot)$, wobei T_2 exponential verteil mit Parameter $\lambda(x_1)$ ist.

Eine Worte zur Konstruktion des Prozesses: Seien $F = X \times [0, \infty)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}([0, \infty))$, $\Omega = F^{\mathbb{N}_0}$, $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{\mathbb{N}_0}$. Im Folgenden betrachten wir die Räume $(F, \mathcal{F})$ und $(\Omega, \mathcal{G})$.

Für $\omega = (x_n, t_n)_{n \geq 0}$ setze

$$\begin{aligned} Y_n(\omega) &= (x_n, t_n), \\ Z_n(\omega) &= x_n, \\ \tau_n(\omega) &= \tau_n, \end{aligned}$$

woraus $Y_n = (Z_n, \tau_n)$ folgt. Die Abbildung $Y \colon \mathbb{N}_0 \times \Omega \to X \times [0, \infty)$ heißt Koordinatenabbildung. Nun definieren wir einen Markov-Kern π auf $(F, \mathcal{F})$ überionecsu

$$\pi(x, t; \mathrm{d}y\,\mathrm{d}s) = \begin{cases} 0, & \text{falls } s < t, \\ Q(x, \mathrm{d}y)\,\lambda(x)\,e^{-\lambda(x)(s-t)}\,\mathrm{d}s, & \text{falls } s \geq t. \end{cases}$$

Der Satz von Ionescu-Tulcea liefert zu jedem Wahrscheinlichkeitsmaß γ auf $(F, \mathcal{F})$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^\gamma$ auf $(\Omega, \mathcal{G})$ mit

$$\mathbb{P}^\gamma(Y_{n+1} \in A \,|\, Y_0, \ldots, Y_n) = \int_A \pi(Z_n, \tau_n; \mathrm{d}y\,\mathrm{d}s).$$

Falls $\gamma = \delta_{(x,0)}$, so schreibt man $\mathbb{P}^\gamma = \mathbb{P}^x$. $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nun ein zeitlich homogener Markov-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}^\gamma)$. Man zeigt nun

- $\mathbb{P}^\gamma(\tau_{n+1} \leq \tau_n) = 0$ für alle γ und alle n.
- $\mathbb{P}^\gamma(Z_{n+1} = Z_n) = 0$ für alle γ und alle n.
- $\mathbb{P}^x(\tau_0 = 0) = 1$ für jedes x.

Sei nun

$$\Omega' = \{\omega \in \Omega \,|\, Z_{n+1} \neq Z_n, \tau_{n+1} > \tau_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \tau_0 = 0\}.$$

Dann zeigt man weiterhin

$$\Omega' \in \mathcal{G},\ \mathbb{P}^x\left(\Omega'\right) = 1 \text{ für alle } x.$$

Wenn $\mathcal{G}'$ die „Spur" von $\mathcal{G}$ auf Ω' ist, so ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dann ein Markov-Prozess auf $(\Omega', \mathcal{G}', \mathbb{P}^x)$ mit $\delta_{(x,0)}$ als Startverteilung. Der Einfachheit halber schreiben wir nun wieder Ω anstelle von Ω', also

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{(x_n, t_n)_{n\geq 0} \middle| 0 = t < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots, x_{n+1} \neq x_n\right\},\\ \mathcal{G} &= \sigma\left((Y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\end{aligned}$$

und betrachten Maße $\mathbb{P}^x$ auf $(\Omega, \mathcal{G})$. Wir definieren nun (endlich) den gesuchten Prozess $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_t)_{t\geq 0}$ wie folgt:

Für $\omega \in \Omega$ sei $\xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega)$. Sei $\Delta \notin X$ (sog. Friedhof). Setze

$$\mathcal{X}_t(\omega) = \begin{cases} Z_n(\omega), & \text{für } \tau_n(\omega) \leq t < \tau_{n+1}(\omega),\\ \Delta, & \text{für } \xi(\omega) \leq t.\end{cases}$$

6.3 Satz. $(\mathcal{X}_t, \mathbb{P}^x)_{\substack{t\geq 0,\\ x\in X}}$ *ist ein Markov-Prozes auf X (vgl. Satz 12.4 in BG68).*

Zurück zur Ausgangssituation: Falls $\lambda(x) = 1$ für alle $x \in X$, so gilt für die Verteilung von $\mathcal{X}_t$ nach genau k Sprüngen

$$P_t^{(n)}(x, \mathrm{d}y) = \frac{t^n}{n!} e^{-t} Q^{(n)}(x, \mathrm{d}y),$$

wobei $Q^{(0)}(x, \mathrm{d}y) = \delta_x(\mathrm{d}y)$. Für die Übergangsfamilie ergibt sich

$$P_t(x, \mathrm{d}y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_t^{(n)}(x, \mathrm{d}y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-t} Q^{(n)}(x, \mathrm{d}y).$$

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall, d.h. λ ist nicht notwendigerweise konstant. Für die Resolvente, welche zur Übergangsfamilie des wie oben skizzierten, konstruierten Prozesses gehört, gilt

$$\begin{aligned}R_\alpha f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_X \frac{f(y)}{\alpha + \lambda(y)} Q_\alpha^{(n)}(x, \mathrm{d}y)\\ &= \frac{f(x)}{\alpha + \lambda(x)} + Q_\alpha(x, R_\alpha f),\end{aligned} \tag{6.4}$$

wobei $\alpha > 0$, f $\mathcal{B}(X)$-messbar und nichtnegativ,

$$Q_\alpha(x, \mathrm{d}y) = \frac{\lambda(x)}{\alpha + \lambda(x)} Q(x, \mathrm{d}y).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} Q_\alpha(R_\alpha f)(x) &= \frac{\lambda(x)}{\alpha + \lambda(x)} \int R_\alpha f(y)\; Q(x, \mathrm{d}y), \\ Q^{(k)}(r, A) &= \int Q(s, A)\; Q^{(k-1)}(r, \mathrm{d}s) \quad \text{für alle } r, s \geq 0, A \in \mathcal{B}(X). \end{aligned}$$

Zusammenhang:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha s} \pi^n(x, 0; A, \mathrm{d}s) = Q_\alpha^{(n)}(x, A).$$

Wir nehmen im Folgenden an, dass es ein σ-endliches Maß m_0 auf $\mathcal{B}(X)$ mit $\operatorname{supp}(m_0) = X$ gebe mit

$$Q(x, \mathrm{d}y)\, m_0(\mathrm{d}x) = Q(y, \mathrm{d}x)\, m_0(\mathrm{d}y).$$

Setze

$$m(\mathrm{d}x) = \frac{1}{\lambda(x)} m_0(\mathrm{d}x).$$

m_0 heißt dann „symmetrisierendes Maß" und m heißt „speed measure". Wir zeigen, das der Prozess $\mathcal{X}$ m-symmetrisch ist, was soviel bedeutet wie

$$\int_X f(x)\, R_\alpha g(x)\; m(\mathrm{d}x) = \int_X g(x)\, R_\alpha f(x)\; m(\mathrm{d}x)$$

für alle $\alpha > 0$, f, g nichtnegativ und $\mathcal{B}(X)$-messbar.

6.4 Lemma. *Seien $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ und f, g $\mathcal{B}(X)$-messbar und nichtnegativ. Dann gilt*

$$\int_X f(x)\, Q_\alpha^{(k)}\left(\frac{g}{\alpha + \lambda}\right)(x)\; m(\mathrm{d}x) = \int_X g(x)\, Q_\alpha^{(k)}\left(\frac{f}{\alpha + \lambda}\right)(x)\; m(\mathrm{d}x).$$

Beweis. $k = 0$ ist klar. Für $k = 1$ gilt

$$\begin{aligned}
&\int_X f(x)\, Q_\alpha^{(1)}\left(\frac{g}{\alpha+\lambda}\right)(x)\ m(\mathrm{d}x) = \int_X f(x) \int_X \frac{g(y)}{\alpha+\lambda(y)} Q_\alpha(x,\mathrm{d}y)\ m(\mathrm{d}x) \\
&= \int_X \int_X \frac{f(x)}{\alpha+\lambda(x)} \frac{g(y)}{\alpha+\lambda(y)} \lambda(x)\, Q(x,\mathrm{d}y)\ m(\mathrm{d}x) \\
&= \int_X \int_X \frac{f(y)}{\alpha+\lambda(y)} \frac{g(x)}{\alpha+\lambda(x)} \lambda(y)\, Q(y,\mathrm{d}x)\ m(\mathrm{d}y) \quad \text{durch Symmetrie} \\
&= \int_X \int_X \frac{f(y)}{\alpha+\lambda(y)} \frac{g(x)}{\alpha+\lambda(x)} \lambda(x)\, Q(x,\mathrm{d}y)\ m(\mathrm{d}x) \\
&= \int_X g(x)\, Q_\alpha\left(\frac{f}{\alpha+\lambda}\right)(x)\ m(\mathrm{d}x).
\end{aligned}$$

□

Wiederholung:

$$\left.\begin{aligned} \lambda\colon X \to (0,\infty), \\ Q(x,\mathrm{d}y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\mathcal{X}_t)_{t\geq 0},$$

und

$$\begin{aligned} Q(x,\mathrm{d}y)\, m_0(\mathrm{d}x) &= Q(y,\mathrm{d}x)\, m_0(\mathrm{d}y) \\ m(\mathrm{d}x) &= \frac{1}{\lambda(x)} m_0(\mathrm{d}x). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Konsequenz aus Lemma 6.4:

$$\int_X f(x)\,(R_\alpha g)(x)\ m(\mathrm{d}x) = \int_X g(x)\,(R_\alpha f)(x)\ m(\mathrm{d}x).$$

6.5 Satz. *Die Funktion λ sei beschränkt und es gelte (6.5). Dann gilt für die zu dem Markovprozess $\mathcal{X}$ bzw. zu seiner Übergangsgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ gehörende Dirichletform $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ auf $L^2(X,m)$*

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{E}) &= L^2(X,m), \\
\mathcal{E}(u,v) &= \frac{1}{2}\int_X\int_X (u(x)-u(y))(v(x)-v(y))\ Q(x,\mathrm{d}y)\ m_0(\mathrm{d}y).
\end{aligned}$$

Beweis. Zu zeigen ist für $f \in L^2(X,m)$

$$\lim_{x\to\infty} \alpha\,(f - \alpha R_\alpha f, f)_{L^2(X,m)} = \mathcal{E}(f,f).$$

Zunächst gilt für $f \in L^2(X,m)$

- Wegen $f \in L^2(X,m)$ folgt

$$\begin{aligned}
&\int_X \int_X |f(x)|\,|f(y)|\,\lambda(x)\ Q(x,\mathrm{d}y)\ m(\mathrm{d}x) \\
&\leq \left(\int_X \int_X |f(x)|^2 \lambda(x)\ Q(x,\mathrm{d}y)\ m(\mathrm{d}x)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X \int_X |f(y)|^2 \lambda(x)\ Q(x,\mathrm{d}y)\ m(\mathrm{d}x)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \int_X |f(x)|^2 \lambda(x)\ m(\mathrm{d}x) < \infty.
\end{aligned}$$

- Im Folgenden sei $R_\alpha^{'}$ die zu R_α gehörende L^2-Resolvente. Wir wissen, dass

$$\|\alpha R_\alpha^{'} f - f\|_{L^2(X,m)} \to 0$$

für $\alpha \to \infty$. Also gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{\alpha\to\infty} \left|\int_X \int_X f(x) \frac{\alpha}{\alpha+\lambda(x)} \left(\alpha R_\alpha^{'} f(y) - f(y)\right) \lambda(x)\ Q(x,\mathrm{d}y)\ m(\mathrm{d}x)\right| \\
&\leq \limsup_{\alpha\to\infty} \Bigg(\int_X \int_X |f(x)|^2 \lambda(x)\ Q(x,\mathrm{d}y)\ m(\mathrm{d}x) \\
&\qquad \cdot \int_X \int_X \left|\alpha R_\alpha^{'} f(y) - f(y)\right|^2 \lambda(x)\ Q(x,\mathrm{d}y)\ m(\mathrm{d}x)\Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_1 \limsup_{\alpha\to\infty} \left(\int_X \int_X \left|\alpha R_\alpha^{'} f(x) - f(x)\right|^2 \lambda(x)\ Q(x,\mathrm{d}y)\ m(\mathrm{d}x)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c_1 \limsup_{\alpha\to\infty} \left(\int_X |\alpha R_\alpha f(x) - f(x)|^2 \lambda(x)\ m(\mathrm{d}x)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Mit dieser Beobachtung folgt nun

$$\begin{aligned}
&\lim_{\alpha\to\infty} \alpha \left(f - \alpha R_\alpha f, f\right)_{L^2(X,m)} \\
&= \lim_{\alpha\to\infty} \alpha \left(\left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda} f - \frac{\alpha\lambda}{\alpha+\lambda} \int_X R'_\alpha f(y)\, Q(x, \mathrm{d}y) \right), f \right)_{L^2(X,m)} \\
&= \int_X |f(x)|^2 \lambda(x)\, m(\mathrm{d}x) - \lim_{\alpha\to\infty} \int_X \int_X f(x) \frac{\alpha}{\alpha+\lambda} f(y)\, \lambda\, Q(x, \mathrm{d}y)\, m(\mathrm{d}x) \\
&= \int_X |f(x)|^2 \lambda(x)\, m(\mathrm{d}x) - \int_X \int_X f(x) f(y)\, Q(x, \mathrm{d}y)\, m_0(\mathrm{d}x) \\
&= \frac{1}{2} \int_X \int_X (f(x) - f(y))^2\, Q(x, \mathrm{d}y)\, m_0(\mathrm{d}x),
\end{aligned}$$

wobei wir für die Konvergenz benutzen, dass aus (6.4) (vgl. Seite 81)

$$f - (\alpha R_\alpha f)(x) = \left(\frac{a + \lambda(x)}{a + \lambda(x)} - \frac{\alpha}{\alpha + \lambda(x)} \right) f(x) - \alpha Q_\alpha(x, R_\alpha f)(x)$$

folgt.

□

Falls Q ein Sub-Markov-Kern ist und nicht $Q(x, X) = 1$ für alle x gilt, so kann man Q zu einem Makorv-Kern auf $(X \cup \{\partial\}, \mathcal{B}(X \cup \{\partial\}))$ wie folgt fortsetzen:

$$\begin{aligned}
Q(x, \{\partial\}) &= 1 - Q(x, X), \\
Q(\partial, \{\partial\}) &= 1.
\end{aligned}$$

Wenn man $\lambda(\partial) = 0$ setzt, so kann man wie oben einen Markov-Prozess $\mathcal{X}$ definieren, der m-symmetrisch ist. In diesem Fall gilt für $f \in L^2(X, m)$

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to\infty} \alpha \left(f - R_\alpha f, f\right)_{L^2(X,m)} &= \frac{1}{2} \int_X \int_X (f(x) - f(y))^2\, Q(x, \mathrm{d}y)\, m_0(\mathrm{d}x) \\
&\quad + \int_X (f(x))^2 (1 - Q(x, X))\, m_0(\mathrm{d}x).
\end{aligned}$$

6.1 Der translationsinvariante Fall

Für zwei endliche Maße μ, ν ist die Faltung definiert über

$$(\mu * \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbb{I}_A(x + y)\, \mu(\mathrm{d}x)\, \nu(\mathrm{d}y) \quad \text{für } A \in \mathcal{B}.$$

6.6 Definition. Eine Familie $(\nu_t)_{t\geq 0}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}^d$ heißt *stetige symmetrische Faltungshalbgruppe*, falls $\nu_0 = \delta_0$

(i) $\nu_t * \nu_s = \nu_{t+s}$ für $s, t \geq 0$.

(ii) $\nu_t(A) = \nu_t(-A)$ für $t > 0$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

(iii) $\lim_{t\searrow 0} \nu_t = \delta_0$ im Sinne der vagen Konvergenz (d.h. getestet mit Funktionen $C_b(\mathbb{R}^d)$).

6.7 Satz (Lévy-Khinchin)**.** *Jede stetige symmetrische Faltungshalbgruppe $(\nu_t)_{t\geq 0}$ lässt sich eindeutig darstellen in der Form*

$$\begin{aligned}
\hat{\nu}_t(\mathrm{d}x) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,y\rangle}\,\nu_t(\mathrm{d}y) = e^{-t\psi(x)} \quad \textit{mit} \\
\psi(x) &= \frac{1}{2}\langle Sx, x\rangle + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \left(1-\cos\left(\langle x,y\rangle\right)\right)\,J(\mathrm{d}y),
\end{aligned}$$

wobei S eine nichtnegativ definite, symmetrische Matrix und J ein symmetrisches Maß auf $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ mit der Eigenschaft

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \frac{|x|^2}{1+|x|^2}\,J(\mathrm{d}x) < \infty \qquad \left(\Leftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \min\left(1,|x|^2\right)\,J(\mathrm{d}x) < \infty\right)$$

ist. ψ heißt Lévy-Exponent und J heißt Lévy-Maß, wobei man häufig J durch $J(\{0\}) = 0$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ fortsetzt.

Setze $P_t(x,B) = \nu_t(B-x)$. Wie sieht die zugehörige Dirichlet-Form $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ aus? Finde Beispiele für $J(\mathrm{d}x) = g(x)\,\mathrm{d}x$, sodass J ein Lévy-Maß ist.

In diesem Setup gilt

$$(P_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)\,\nu_t(\mathrm{d}y)$$

und $(P_t)_{t\geq 0}$ ist eine Übergangsfamilie in unserem Sinne.

6.8 Proposition. *Für die zu $(P_t)_{t\geq 0}$ gehörende Dirichlet-Form gilt*

$$\mathcal{E}(u,v) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(x)\,\overline{\hat{v}(x)}\psi(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \left\{u \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right) \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(x)|^2\,\psi(x)\,\mathrm{d}x < \infty\right\}.$$

Beweis. Es gilt $\hat{P_t u}(x) = \hat{\nu}_t(x)\,\hat{u}(x) = e^{-t\psi(x)}\hat{u}(x)$. Mit Hilfe der Parseval-Identität folgt

$$\frac{1}{t}(u - P_t u, u) = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(x)|^2 \left(\frac{1-e^{-t\psi(x)}}{t}\right) \mathrm{d}x \nearrow \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(x)|^2\,\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Dirichlet-Form $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ ist translationsinvariant, da für $u \in \mathbb{R}^d$ fixiert und $u_y(x) = u(x+y)$ gilt: $\mathcal{E}(u_y, u_y) = \mathcal{E}(u, u)$.

Wiederholung:

$$(R_\lambda f)(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(P_t f)(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für die zu $(P_t)_{t\geq 0}$ gehörende Resolvente $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ gilt

$$(R_\lambda f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)\,w_\lambda(\mathrm{d}y) \quad \text{mit} \quad w_\lambda(A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\nu_t(A)\,\mathrm{d}t.$$

Mit Hilfe der Resolvente oder aber direkt mit Hilfe der Dirichlet-Form zeigt man nun, dass $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ eine reguläre Form auf $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ ist. $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \cap C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ liegt dicht in $C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ und $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \cap C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ liegt dicht in $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ bezüglich $\sqrt{\mathcal{E}}$.

□

Spezialfall 1: Sei nun (ν_t) eine symmetrische stetige Faltungshalbgruppe mit $J = 0$ und $S = \mathrm{Id}(\mathrm{d}x, d)$. Dann gilt $\psi(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ und

$$\nu_t(\mathrm{d}x) = \left(\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\right) \mathrm{d}x.$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u,v) &= \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \nabla v\,\mathrm{d}x, \\ \mathcal{D}(\mathcal{E}) &= H^1\left(\mathbb{R}^d\right). \end{aligned}$$

Spezialfall 2: Sei (ν_t) eine symmetrische stetige Faltungshalbgruppe mit $S = 0$. In diesem Fall gilt

$$\mathcal{E}(u,u) = \int\int |\hat{u}(\xi)|^2 (1 - \cos(\xi, h))\,J(\mathrm{d}h)\,\mathrm{d}\xi.$$

Sei $h \in \mathbb{R}^d$ fixiert. Die Abbildung $x \mapsto g_h(x) = u(x+h) - u(x)$ besitzt die Fourier-

Transformierte $\xi \mapsto \hat{u}(\xi)\left(e^{-i\langle\xi,h\rangle}-1\right)$. Aufgrund der Parseval-Identität gilt also

$$\int\int |g_y(x)|^2\ J(\mathrm{d}y)\ \mathrm{d}x = 2\int\int |\hat{u}(\xi)|^2\,(1-\cos(\xi,h))\ \mathrm{d}\xi\, J(\mathrm{d}h)\,.$$

Also gilt für die Dirichlet-Form

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u,v) &= \frac{1}{2}\int\int (u(x+h)-u(x))\,(v(x+h)-v(x))\ J(\mathrm{d}h)\ \mathrm{d}x,\\ \mathcal{D}(\mathcal{E}) &= \left\{u\in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)\Big|\,\mathcal{E}(u,u)<\infty\right\},\end{aligned}$$

vgl. die Form aus Abschnitt 6.2. Einerseits war $J(\mathrm{d}h)$ dort abhängig von x, $J(\mathrm{d}h)\leftrightarrow Q(x,\mathrm{d}h)$, andererseits aber war $Q(x,A)$ immer endlich (sogar ≤ 1). Hier ist nun $J(A)=\infty$ problemlos möglich, z. B. für $J(\mathrm{d}h)=|h|^{-d-\beta}\,\mathrm{d}h$ für $\beta\in(0,2)$, woraus $J(B_\varepsilon(0))=\infty$ für alle $\varepsilon>0$ folgt, falls $\beta\in(1,2)$.

6.2 Analysis und Wahrscheinlichkeitstheorie im Zusammenspiel: Transienz

Sei $(P_t)_{t\ge 0}$ eine Übergangsfamilie und $(T_t)_{t>0}$ die dazugehörige stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf $L^2(X,m)$. Setze für $f\in L^1(X,m)$ mit $f\ge 0$ m-f.ü.

$$(Rf)(x) = \int_0^t (P_t f)(x)\ \mathrm{d}x$$

den sog. *Potentialoperator* oder die *Resolvente nullter Ordnung.*

6.9 Definition. $(T_t)_{t>0}$ heißt *transient*, falls $Rf<\infty$ m-f.ü. für alle $f\in L^1(X,m)$ mit $f\ge 0$ m-f.ü.

6.10 Satz. *Sei $(\nu_t)_{t\ge 0}$ eine symmetrische stetige Faltungshalbgruppe auf $\mathbb{R}^d$ und $(P_t)_{t\ge 0}$, $(T_t)_{t>0}$ wie oben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) $(T_t)_{t>0}$ ist transient.

(2) $w(K)<\infty$ für alle $K\subset\mathbb{R}^d$ kompakt, wobei $w(A)=\int_0^\infty \nu_t(A)\ \mathrm{d}t$.

(3) $\int_0^\infty (P_t f,f)\ \mathrm{d}t<\infty$ für alle $f\in C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$.

(4) Zu jedem Kompaktum $K\subset\mathbb{R}^d$ existiert $c_K\ge 1$ derart, dass für alle $f\in\mathcal{D}(\mathcal{E})\cap C_c(K)$

$$\int_K |f(x)|\ \mathrm{d}x \le c_k\sqrt{\mathcal{E}(f,f)}.$$

(5) $\left(x \mapsto \psi(x)^{-1}\right) \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Beispiel. (a) $\psi(x) = |x|^2$, $\psi(x)^{-1} = |x|^{-2}$. Bedingung (5) ist erfüllt, falls $d \geq 3$. Bedingung (4) lässt sich leicht überprüfen durch die Poincaré-Ungleichung für $d \geq 3$: $\int_K |f| \leq c_k \int_K |\nabla f|^2$.

(b) $\psi(x) = |x|^\beta$. Bedingung (5) ist erfüllt, falls $d > \beta$.

(c) $X = \mathbb{R}^d$, $S = 0$, $\lambda \equiv 1$ (Wartezeit aus 6.2), $Q(x, B) = J(B - x)$, m_0 =Lebesgue-Maß, $J(\{e_k\}) = J(\{-e_k\}) = \frac{1}{2d}$ für $k \in \{1, \ldots, d\}$, wobei $e_k = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k\text{-te Stelle}}, 0, \ldots, 0)$.

Der Prozess $\mathcal{X}$ entspricht der Standard-Irrfahrt.

Literaturverzeichnis

[0] Foo Bar, QuuX (and B3y0nd), 2012