Ausarbeitung des Seminarvortrags zum Thema „Anlagepreisbewegung“
zum Seminar „Finanzmathematische Modelle und Simulationen“
bei Raphael Kruse und Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn
von Imke Meyer im WS 09/10

Anlagepreisbewegung

Motivation

Um Optionsscheine bewerten zu können, müssen wir zunächst eine mathematische Beschreibung dafür liefern, wie sich die zugrundeliegende Anlage verhält. (Das Beispiel wurde bereits durchgeführt) Wir beginnen in diesem Kapitel mit einer Beschreibung der Haupthypothese und enden mit einer Auflistung einiger Annahmen, die in unsere Analyse eingehen werden.

Effizienzmarkthypothese

Der Preis für eine Anlage ist ein Maß für die Zuversicht seines Investors und ist somit stark abhängig von Gerüchten, Nachrichten usw.
Wir nehmen an, dass der Markt augenblicklich auf solche Einflüsse reagiert und somit gilt: „Der aktuelle Anlagepreis reflektiert alle vergangenen Informationen“. Diese Aussage ist bekannt als die schwache Form der Effizienzmarkthypothese (EMH). Die Kenntnis voriger Preise (wie z.B. Lesen des Charts) bringt folglich keinen Vorteil. Unter der EMH benötigt die Gleichung für die Entwicklung des Anlagepreises von t nach $t + \Delta t$ nur den Anlagepreis im Zeitpunkt t, keine vorherigen.

Annahmen

Folgende Annahmen werden im nächsten Kapitel für eine mathematische Beschreibung der Anlagepreisentwicklung benötigen:

Der Anlagepreis kann jeden nichtnegativen Wert S annehmen.

Kauf und Verkauf einer Anlage kann in jeder Zeit $0 \leq t \leq T$ erfolgen.

Es ist möglich jeden Umfang einer Anlage zu kaufen und zu verkaufen.

Die Geld-Briefspanne ist gleich null.

Es gibt keine Dividenden oder Splits.

Leerverkäufe sind erlaubt.

Es gibt genau einen konstanten risikofreien Zinssatz r der auf jeden Betrag angewendet wird, der von einer Bank verliehen oder dort angelegt wird.

Anlagepreismodell - die Theorie

Motivation

Wir wollen ein klassisches Modell für das Anlagepreisverhalten herleiten. Dieses Modell wird später genutzt für die Optionsscheinbewertung. Gegeben sei ein Anlagepreis S_0 im Zeitpunkt $t = 0$. Ziel ist es einen Prozess zu entwickeln, der den Anlagepreis $S(t)$ für alle $t \in [0, T]$ beschreibt. Da Anlagepreise in der Regel unvorhersagbar sind, fassen wir $S(t)$ für jedes t als Zufallsvariable auf. Wir versuchen ein Modell zu entwickeln, das die relative Veränderung des Preises über ein Zeitintervall δt darstellt. Danach lassen wir δt gegen null gehen um einen Ausdruck zu bekommen, der für stetiges t gilt.

Diskretes Anlagepreismodell

Die Entwicklung des Wertes einer risikolosen Investition D_0 über ein Zeitintervall δt kann modelliert werden als

$$D(t + \delta t) = D(t) + r\delta t D(t). \tag{1}$$

Wegen der EMH gilt, dass der aktuelle Anlagepreis alle vergangenen Informationen reflektiert. Das heißt umgekehrt, jede Preisänderung beruht auf neuen Informationen. Wir fügen also eine zufällige Konjunkturschwankungszuwachsrate σ zu unserer Zinsgleichung hinzu und machen diese Zuwachsrate in verschiedenen Teilintervallen unabhängig voneinander. Genauer gilt nun $t_i = i\delta t$, sodass die Anlagepreise an den diskreten Punkten $\{t_i\}$ ausgewertet werden. Das Modell lautet dann:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) + \mu\delta t S(t_i) + \sigma\sqrt{\delta t} Y_i S(t_i), \tag{2}$$

wobei gilt:

1. $\mu > 0$ ist ein konstanter Parameter, der auch „drift“ genannt wird, sodass $\mu\delta t S(t_i)$ einen generellen Aufwärtstrend des Anlagepreises repräsentiert. In diesem Modell ist μ das Gleiche wie r in (1).
2. $\sigma > 0$ wird „Volatilität“ genannt und ist ein konstanter Parameter der die Stärke der Konjunkturschwankung beschreibt.
3. $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ sind iid und $N(0, 1)$ verteilt.

Stetiges Anlagepreismodell

Wir wählen nun ein Zeitintervall $[0, t]$ mit $t = L\delta t$. Es gilt $S(0) = S_0$ und das diskrete Zeitmodell (2) gibt uns Ausdrücke für $S(\delta t), S(2\delta t), \ldots, S(L\delta t = t)$ nun lassen wir δt gegen null gehen (und L somit gegen unendlich), um einen Grenzwertausdruck für $S(t)$ zu bekommen. Modell (2) zeigt, dass in jedem Zeitintervall δt der Anlagepreis multipliziert wird mit dem Faktor $1 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t} Y_i$ daraus folgt die Gleichung

$$S(t) = S_0 \prod_{i=0}^{L-1} (1 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t} Y_i)$$

und somit

$$\log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \sum_{i=0}^{L-1} \log(1 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t} Y_i)$$

. Uns interessiert nun der Grenzwert von δt gegen 0. Wir nutzen die Approximation $\log(1+\epsilon) \approx \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \ldots$ Es folgt daraus

$$\log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \approx \sum_{i=0}^{L-1} (\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t} Y_i - \frac{1}{2}\sigma^2 \delta t Y_i^2), \tag{3}$$

wobei Terme mit höheren Potenzen von δt weggelassen wurden. Man kann zeigen:

$$\mathbb{E}(\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t} Y_i - \frac{1}{2}\sigma^2 \delta t Y_i^2) = \mu\delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 \delta t$$

und

$$Var(\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t} Y_i - \frac{1}{2}\sigma^2 \delta t Y_i^2) = \sigma^2 \delta t + \text{höhere Potenzen von } \delta t$$

Unter Verwendung des zentralen Grenzwertsatzes gilt dann, dass $\log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)$ sich in (3) verhalten wird wie eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert und Varianz

$$\mathbb{E}\left(\log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)\right) = L \cdot (\mu\delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 \delta t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$$

,

$$Var\left(\log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)\right) = L \cdot \sigma^2 \delta t = \sigma^2 t$$

, so dass gilt:

$$\log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \sim N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t). \tag{4}$$

Daraus ergibt sich

$$S(t) = S_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t} Z) \tag{5}$$

denn aus (4) folgt, dass

$$Z := \frac{\log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \sim N(0,1)$$

Es ist nicht zwangsäufig nötig in $t = 0$ zu starten, ebenso ist es möglich in $t = t_1$ zu starten und nach $t = t_2$ zu gehen. (mit $t_1 < t_2$). Dies ergibt

$$\log\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right) \sim N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_2 - t_1), \sigma^2(t_2 - t_1))$$

. Die hier beschriebene normalverteilte Zufallsvariable ist bei nicht überlappenden Zeitintervallen unabhängig. Dies gilt, da die Y_i *iid* sind, das heißt $\log\left(\frac{S(t_3)}{S(t_2)}\right)$ ist unabhängig von $\log\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right)$ usw. Wir beschreiben die Entwicklung der Anlage über eine Folge von Zeitpunkten wie folgt:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)\exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_2 - t_1) + \sigma\sqrt{(t_2 - t_1)}Z_i) \tag{6}$$

mit unabhängigen $Z_i \sim N(0,1)$

Die Lognormalverteilung

Eine ZV der Form (5) hat eine sogenannte Lognormalverteilung. Die Dichtefunktion von $S(t)$ ist

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{(log(\frac{x}{S_0}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t)^2}{2\sigma^2 t}\right)}{x\sigma\sqrt{2\pi t}}$$

, falls $x \geq 0$ und $f(x) = 0$ falls $x < 0$. Weiterhin gilt:

$$\mathbb{E}(S(t)) = S_0\exp(\mu t),$$

$$\mathbb{E}(S(t)^2) = S_0^2\exp(2\mu + \sigma^2)t,$$

$$Var(S(t)) = S_0^2\exp(2\mu t)(\exp(\sigma^2 t) - 1).$$

Funktionen des Anlagemodells

Wir untersuchen nun die Konfidenzintervalle normalverteilter ZV. Wenn gilt $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = 0,95$ dann sagen wir $[a,b]$ ist ein 95 prozentiges Konfidenzintervall für X. Wenn X normalverteilt ist, so gibt es keine einfache Berechnung für die Umkehrung von $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{x^2}{2})dx$. Diese Werte können jedoch numerisch berechnet werden und sind tabelliert.
So gilt für $X \sim N(0,1)$ nämlich $\mathbb{P}(|X| \leq 1,96) = 0,95$. Somit ist $[-1,96, 1,96]$ ein 95 prozentiges Konfidenzintervall für X. Für $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ gilt $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ so dass gilt $\mathbb{P}(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) = 0,95$. Somit ist $[\mu - 1,96\sigma, \mu + 1,96\sigma]$ ein 95 prozentiges Konfidenzintervall für X. Es folgt aus (4), dass $[S_0\exp(-1,96\sigma\sqrt{t} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t); S_0\exp(1,96\sigma\sqrt{t} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t)]$ ein 95 prozentiges Konfidenzintervall für $S(t)$ ist. Wenn t klein ist, dann gilt

$$\exp(-1,96\sigma\sqrt{t} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t) \approx \exp(-1,96\sigma\sqrt{t}) \approx 1 - 1,96\sigma\sqrt{t}$$

,

$$\exp(1,96\sigma\sqrt{t} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t) \approx \exp(1,96\sigma\sqrt{t}) \approx 1 + 1,96\sigma\sqrt{t}$$

. Somit ist das Konfidenzintervall für $S(t)$ approximativ $[S_0(1-1,96\sigma\sqrt{t}); S_0(1+1,96\sigma\sqrt{t})]$. Die Länge des Intervalls ist also $2 \cdot S_0 1,96\sigma\sqrt{t}$. Wenn wir das Konfidenzintervall als Maß für die Ungewissheit für den zukünftigen Anlagepreis betrachten, so beschreibt dieses Ergebnis die folgende Faustregel: „Über kleine Zeitperioden wächst die Ungewissheit wie die Wurzel aus der Zeit“