Black-Scholes Modell

von Marian Kwiatkowski

8. April 2010

Diese Ausarbeitung wird im Rahmen des Proseminars *Finanzmathematische Modelle und Simulation* geschrieben. Bezogen auf die Theorie des diskreten und kontinuierlichen Aktienkursmodelles soll ein Modell[1] für die theoretische Valuation von Optionen[2] vorgestellt werden. Wegen der Fluktuationen von Optionsprämien, je nach Anbieter, auf die gleiche Option, ist es notwendig geworden, ein System aufzustellen, dass es erlaubt, zu jeder Option, mittels *Hedging*, einen theoretischen Wert berechnen zu können, ohne die Abhängigkeit zum Anbieter. Somit wird gewährleistet, dass ein *faires* Geschäft zwischen Käufer und Verkäufer abgeschlossen werden kann.

[1] Fischer Black, Myron Samuel Scholes und Robert Carhart Merton haben 1997 für die Entwicklung dieses Modells (1973) den Nobelpreis bekommen.

[2] Ein **(Finanz-) Derivat** ist ein (schriftliches) Abkommen. Der Wert am Fälligkeitstag T wird durch einen Basiswert festgelegt. Es werden zwei Typen von Derivaten differenziert:

1. **Optionsschein**
2. **Forwards**

Eine **europäische Option** wird über den Tatsache charakterisiert, dass die Option nur am Fälligkeitstag ausgeübt werden kann.
Daraus resultiert:

1. Ein europäischer Call (-Optionschein) gibt dem Käufer das optionale Recht zu einem festen Basiswert S am Fälligkeitstag T mit einem festgelegten Ausübungspreis E vom Verkäufer der Option zu erwerben.
2. Ein europäischer Put(-Optionschein) gibt dem Käufer das optionale Recht zu einem festen Basiswert S am Fälligkeitstag T mit einem festgelegten Ausübungspreis E vom Verkäufer der Option zu verkaufen.

1 Vorraussetzung

Bevor das Modell im Einzelnen besprochen wird, müssen noch einige Annahmen besprochen werden. Zuerst stellt sich die Frage, welche Einflussfaktoren den Wert einer speziellen Option V regulieren. Das wären einmal

- die aktuelle Zeit $t \in [0, T]$ und der Kurs $S(t)$ des Basiswertes, wobei $S : [0, T] \to \mathbb{R}_+$ den Aktienkurs angibt,
- die Volatilität[3] σ und der *Drift* μ des Basiswertes (diese Paramter beschreiben den Einfluss des Basiswertes auf die Option),
- der *Ausübungspreis* E und das Verfallsdatum T der Option V (beide Parameter definieren eine *spezielle* Option) und
- die risikolose Zinsrate r (gibt den Einfluss einer Währung auf die Option an).

Dies führt dann zu einer Funktion mit den Abhängigkeiten

$$V(S, t; \mu, \sigma, E, T; r) \ .$$

Für den zukünftigen Verlauf seien alle Parameter, ausser S und t, der Funktion V konstant, womit sie nicht mehr explizit erwähnt werden, und die Abbildung

$$V : \mathbb{R}_+ \times [0, T] \to \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$

sei in S und t glatt[4].

Aus dem Konzept des Aktienmodelles, welches desweiteren als Ausgangsmodell dient, erheben sich noch einige weitere Vorraussetzungen, die für das Aufstellen des *Black-Scholes-Modell* gebraucht werden. Deshalb muss noch gelten, dass

- der Aktienpreis S nicht negativ sein kann,
- der Kauf und Verkauf von Optionen als auch Mengen des Basiswertes seien zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ möglich,

[3]Dies steht in der Finanzmathematik als Mass für Schwankungen von Finanzmarktparametern wie Aktienkursen und Zinsen. Die Volatilität ist hier definiert als die Standardabweichung der Veränderungen des betrachteten Parameters und dient häufig als Risikomaß.

[4]Eine mathematische Funktion ist eine glatte Funktion, wenn sie unendlich oft differenzierbar ist.

- auf Aktien werden keine Dividenden[5] ausgezahlt,
- Leerverkäufe[6] seien erlaubt und
- es gibt keine Abitrage[7] und Transaktionskosten.

2 Black-Scholes-Modell

2.1 Quadratische Variation von Aktienkursen

Aus [1] S. 68 ist bekannt, dass die Summe quadratischer Renditen[8] berechenbar ist, obwohl der Ertrag eine $N(\mu\delta t, \sigma^2\delta t)$ Zufallsvariable ist. Dies lässt darauf schließen, dass ebenso die *sum-of-square increments* berechenbar sein kann.
Dafür sei zunächst eine Zeitleiste $\overline{T} := [0, T]$ mit zwei Skalierungen definiert:

1. Das *kleine* Zeitintervall Z, wo $\overline{T}$ in kleinere Intervalle $\overline{\Delta t_i} := [t_i, t_{i+1}]$ bzgl. $t = 0 < \cdots < t_L = T$ und $t_i = t + i\Delta t$ mit $i \in [0, L]$ zu einer Länge Δt unterteilt wird,
2. das *sehr kleine* Zeitintervall z, mit dem jedes Intervall $\overline{\Delta t_i}$ wieder in Teilintervalle $\overline{\delta t_i} = [t_i, t_{i+1}]$ bzgl. $t = t_0 < \cdots < t_L = t + \Delta t$ und $t_i = t + i\delta t$ mit $i \in [0, L]$ aufgeteilt wird, wobei jedes Intervall die Länge δt hat.

Das diskrete Aktienmodell[9] beschreibt den Aktienkurs auf $\overline{\delta t_i}$ zu einem beliebigen $\overline{\Delta t_i}$ aus $\overline{T}$ mit

$$S(t_{i+i}) = S(t_i) + \mu\delta t S(t_i) + \sigma\sqrt{\delta t} Y_i S(t_i) \ ,$$

daher sei zum Aktienkursverlauf

$$\delta S_i := \delta S(t_i) := S(t_{i+i}) - S(t_i) = S(t_i)(\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t} Y_i)$$

[5] Teil des Gewinnes, den eine Aktiengesellschaft an ihre Aktionäre ausschüttet. Eine besondere Form ist die **Dividendenrendite** (Anteil des Aktienkurses).

[6] Unter einem Leerverkauf (Short Sale) versteht man den Verkauf einer Ware, eines Währungsbetrages oder eines Wertpapiers, das der Verkäufer zum Verkaufszeitpunkt noch nicht besitzt.

[7] Bezeichnet den risikolosen Gewinn der größer ist, als der Gewinn der risikolosen Geldanlage am Kapitalmarkt.

[8]

$$R(S(t_i), t_i) := \frac{S(t_{i+i}) - S(t_i)}{S(t_i)} = \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t} Y_i \ .$$

[9] Vgl. [1] S. 53-54, Y_i kann auf $N(0, 1)$ zurückgeführt werden.

die Summe

$$\sum_{i=0}^{L-1}(\delta S_i)^2$$

notiert.
Wird $(\delta S(t_i))^2$ ausformuliert und mit dem Übergang[10] von $S(t_i)$ nach $S(t)$ folgt auf $\overline{\Delta t_i}$ (Erweiterung von $\overline{\delta t_i}$ auf $\overline{\Delta t_i}$) die Abschätzung

$$\sum_{i=0}^{L-1}(\delta S_i)^2 \approx S(t)^2 \cdot \sum_{i=0}^{L-1}(\mu^2(\delta t)^2 + 2\mu\sigma(\delta t)^{\frac{3}{2}}Y_i + \sigma^2(\delta t)Y_i)\ .$$

Folglich hat dies die Relation[11]

$$\sum_{i=0}^{L-1}(\delta S_i)^2 \sim S(t)^2 N(\sigma^2\Delta t, 2\sigma^4\Delta t\delta t) \tag{2.1}$$

Because δt is very small, the variance of that final expression is tiny, leading us to conclude that the sum-of-square increments is approximately a constant of mutiple of $S(t)^2$[12], so dass

$$\sum_{i=0}^{L-1}(\delta S_i)^2 \approx S(t)^2\sigma\Delta t\ . \tag{2.2}$$

Die Simulation aus *Abbildung 1* veranschaulicht die Konvergenz zum Ausübungspreis $S(t)^2\sigma\Delta t$ nochmals.

2.2 Hedging

Mathematische Gleichungen, die eine Option beschreiben, sind Lösungen einer partiellen Differentialgleichung (DGL). Mittels des *Hedging*[13] kann diese DGL enwickelt werden. Deswegen sei zuerst ein Porttfolio $\Pi(S,t)$ durch

$$\Pi(S,t) := A(S,t) + D(S,t)$$

definiert. $A(S,t)$ steht für eine bestimmte Anzahl des Basiswertes, der betrachtet wird, und $D(S,t)$ für eine bestimmte Geldmenge auf einem beliebigen Konto. Aufbauend auf

[10] hier wird der zentrale Grenzwertsatz (ZWS) genutzt, siehe dazu [1] ab S.27

[11] Vlg. dazu [1] S. 29, S.75 und S. 83.

[12] [1] S.75

[13] Die Reduzierung von Zufall bzw. Risiko in einem Portfolio (Bündel von Investitionen) bezeichnet man als **Hedging**. Die vollständige Eleminierung des Risikos eines Portfolios durch die Ausnutzung der Korrelation zwischen zwei Finanzinstrumenten heißt **Delta-Hedging**.

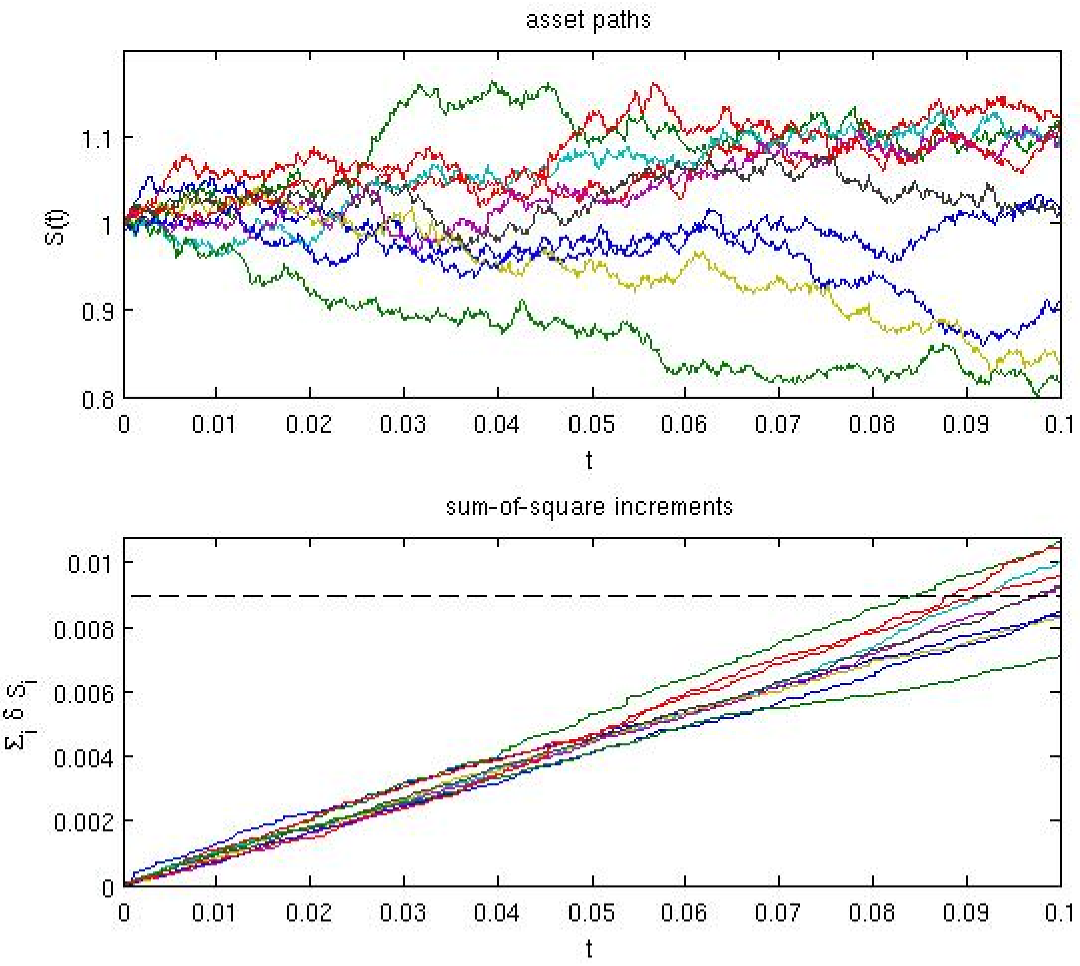

Abbildung 1: Im oberen Diagramm ist der Verlauf von 10 Aktienkurse zu sehen. Der Startwert beträgt 1 und die Stärke der Konjunkturschwankungen ist $0,3$. Bezüglich dazu zeigt das untere Diagramm die jeweilige *sum-of-square increments*. Die gestrichelte Linie steht für den Erwartungswert $S(t)^2\sigma\Delta t$. Aus dem unterem Diagramm wird deutlich, dass die *sum-of-square increments* zum Erwartungswert streben.

den Intervallen des vorigen Abschnittes beschreibt das Differential $\delta\Pi_i$ eine Werteveränderung[14] von $\Pi(S,t)$ über einen Zeitraum $\overline{\delta t_i}$. Hierfür gibt es zwei Ursachen:

- Veränderungen beim Aktienpreis, d.h. wenn sich S ändert, so auch $\Pi(S,t)$. $A_i\delta S_i$ umschreibt diesen Vorgang.
- Veränderungen beim Geldkonto, bezeichnet wird dieser Vorgang mit $rD_i\delta t$.

Dehalb kann auf jedem Intervall $\overline{\delta t_i}$ die Änderung des Wertes von $\Pi(S,t)$ in der Formel

$$\partial\Pi_i = A_i\delta S_i + rD_i\delta t \tag{2.3}$$

festgehalten werden.

Nunmehr befasst der restliche Teil des Abschittes damit, den Verlauf der Differenz[15] zwischen dem Portfolio und der Option auf $\overline{\delta t_i}$, durch Eleminierung der stochastischen Werte, berechenbar zu machen. Denn aus der Annahme heraus, dass die Option $V(S,t)$ in S und t glatt sei, womit[16]

$$\delta V_i \approx \frac{\partial V_i}{\partial t}\delta t + \frac{\partial V_i}{\partial S}\delta S_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2}\delta S_i^2 \ ,$$

kann zusammen mit 2.3 die Differenz durch

$$\begin{aligned}\delta(V-\Pi)_i = \delta V_i - \delta\Pi_i &\approx (\frac{\partial V_i}{\partial t}\delta t + \frac{\partial V_i}{\partial S}\delta S_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2}\delta S_i^2) - (A_i\delta S_i + rD_i\delta t)\\ &= (\frac{\partial V_i}{\partial t} - rD_i)\delta t + (\frac{\partial V_i}{\partial S} + A_i)\delta S_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2}\delta S_i^2)\end{aligned}$$

approximiert werden. Verschwindet anschließend der stochastiche Wert δS_i mit $A_i = \frac{\partial V_i}{\partial S}$, bleibt der Ausdruck

$$\delta(V-\Pi)_i = (\frac{\partial V_i}{\partial t} - rD_i)\delta t + (\frac{\partial V_i}{\partial S} + A_i)\delta S_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2}\delta S_i^2$$

[14] $V := V(S(t),t)$, $\Pi := \Pi(S(t),t)$, $\delta V_i := V(S(t_{i+1}),t_{i+1}) - V(S(t_i),t_i)$, $\delta\Pi_i := \Pi(S(t_{i+1}),t_{i+1}) - \Pi(S(t_i),t_i)$, $\delta(V-\Pi)_i = \delta V_i - \delta\Pi_i$ usw. .

[15] Das Portfolio $\Pi(S,t)$ imitiert $V(S,t)$, weil beide Finanzinstrumente das gleiche Risiko zum gleichen Basiswert tragen.

[16] Hierbei handelt es sich um eine grobe Betrachtung der Taylorreihe zweiter Ordnung, die allgemein aus der Formel

$$\begin{aligned}f(x,y) \approx f(a,b) + (x-a)f_x(a,b) + (y-b)f_y(a,b) + \frac{1}{2!}[(x-a)^2 f_{xx}(a,b)\\ + 2(x-a)f_{xy}(a,b)(y-b) + (y-b)^2 f_{yy}(a,b)]\end{aligned}$$

sich ableitet, indem $V := f$, $(S(t_i)),t_i) := (a,b)$, $(S(t_{i+1}),t_{i+1}) := (x,y)$ und dann entsprechend in $f(x,y)$ verwendet wird. Bei dem Übergang von $\delta t \to 0$ $(L \to \infty)$ verschwinden alle Terme, dessen Ordnung höhrer als $O(\delta t)$ bzw. $O(\delta t^{\frac{1}{2}})$ ist.

$$= (\frac{\partial V_i}{\partial t} - rD_i)\delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2}\delta S_i^2 \tag{2.4}$$

übrig. Aufgrund von $A_i = \frac{\partial V_i}{\partial S}$ kommt es zu einer kontunuierlichen Neuberechnung[17] des Portfolio.

Nahtlos kann die Approximation von $\overline{\delta t_i}$ nach $\overline{\Delta t_i}$ erweitert werden, wobei $\Delta(V - \Pi)$ die Schwankungen der Differenz auf $\overline{\Delta t_i}$ kennzeichnet. Aus der Aufsummierung der lokalen Abschätzungen 2.4 zu den Teilintervallen $\overline{\delta t_i}$, entsteht zunächst der folgende Ausdruck:

$$\Delta(V - \Pi) \approx \sum_{i=0}^{L-1}(\frac{\partial V_i}{\partial t} - rD_i)\delta t + \sum_{i=0}^{L-1}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2}\delta S_i^2 \ . \tag{2.5}$$

Mit dem Austausch von $S(t_i)$ durch $S(t)$ bzw. t_i durch t wird der rechte Term umgewandelt, worauf

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{L-1}\frac{\partial V(S(t_i),t_i)}{\partial t}\cdot\delta t - \sum_{i=0}^{L-1} rD(S(t_i),t_i)\cdot\delta t + \sum_{i=0}^{L-1}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(S(t_i),t_i)}{\partial S^2}\delta S_i^2 \\
\approx &\sum_{i=0}^{L-1}\frac{\partial V(S(t),t)}{\partial t}\cdot\delta t - \sum_{i=0}^{L-1} rD(S(t),t)\cdot\delta t + \sum_{i=0}^{L-1}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(S(t),t)}{\partial S^2}\delta S_i^2 \\
= &L\cdot(\frac{\partial V(S(t),t)}{\partial t} - r\cdot D(S(t),t))\delta t + \frac{\partial^2 V(S(t),t)}{\partial S^2}\sum_{i=0}^{L-1}\frac{1}{2}\delta S_i^2 \\
= &(\frac{\partial V(S(t),t)}{\partial t} - r\cdot D(S(t),t))\Delta t + \frac{\partial^2 V(S(t),t)}{\partial S^2}\sum_{i=0}^{L-1}\frac{1}{2}\delta S_i^2) \ .
\end{aligned}$$

Die Abschätzung 2.2 auf das obige Ergebniss angewendet[18], liefert

$$\Delta(V - \Pi) \approx (\frac{\partial V(S(t),t)}{\partial t} - r\cdot D(S(t),t) + \frac{\partial^2 V(S(t),t)}{\partial S^2}\frac{1}{2}S^2\sigma^2)\Delta t \ . \tag{2.6}$$

Fortan liegt ein berechenbarer[19] Ausdruck, der nicht mehr vom Zufall abhängig sei, für die Differenz $\Delta(V - \Pi)$ auf $\overline{\Delta t_i}$ vor. Unter Verwendung der Annahme[20] des *no arbitrage principle*[21] kann $\Delta(V - \Pi)$ ebenfalls formuliert werden als

$$\Delta(V - \Pi) = r\Delta t(V - \Pi) \ , \tag{2.7}$$

wobei für die Veränderung der risikolose Zinssatz gilt.

[17]Hedging.
[18]Delta-Hedging.
[19]berechenbar heißt hier risikolos
[20]Siehe [1] S. 79.
[21]Angenommen es gäbe ein Arbitrageprinzip, somit wäre

$$\Delta(V - \Pi) \neq r\Delta t(V - \Pi)$$

2.3 Black-Scholes PDE

Fassen die Ergebnisse des letzten Abschnittes ineinander, so entspricht

$$\Delta(V - \Pi) = r\Delta t(V - \Pi) \ ,$$

mit den Formeln

$$(\frac{\partial V(S(t),t)}{\partial t} - r \cdot D(S(t),t) + \frac{\partial^2 V(S(t),t)}{\partial S^2}\frac{1}{2}S(t)^2\sigma^2)\Delta t$$

und

$$\Pi(S,t) = A(S,t)S + D(S,t) \ ,$$

der neuen Schreibweise[22]

$$\Delta t\frac{\partial V}{\partial t} - \Delta tr \cdot D + \Delta t\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\frac{1}{2}S^2\sigma^2 = r\Delta tV - r\Delta tAS - r\Delta tD \ .$$

Die Mitwirkung von $A = \frac{\partial V}{\partial S}$ sowie die Kürzung von Δt bzw. die Umlagerung aller Terme auf die linke Seite hat die Folge, dass

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}S^2\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r\frac{\partial V}{\partial S}S - rV = 0 \ .$$

Als Resultat:

Definition 1 (Black-Schole PDE). *Die Gleichung*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \qquad \text{(BSPDE)}$$

wird die partielle Black-Scholes Differentialgleichung genannt.

Zwei Punkte ergeben sich aus der BSPDE:

1. Der *Drift* μ aus dem Aktienmodell hat keinen Einfluss mehr auf die partielle Differentialgleichung als auch auf die Optionsbewertung.

und mit der richtigen Wahl der Strategie kann der Handel mit Optionen mehr Profit erwirtschaften, als die Anlage zu einer festen Zinsrate. Diesbezüglich seien folgende Kriterien für die Strategiewahl gegeben:

1. $\Delta(V - \Pi) > r\Delta t(V - \Pi)$: Dann kaufe $\Delta(V - \Pi)$ zum Zeitpunkt t und verkaufe dies wieder bei $t + \Delta t$.
2. $\Delta(V - \Pi) < r\Delta t(V - \Pi)$: Dann verkaufe $\Delta(V - \Pi)$ zum Zeitpunkt t und kaufe das Portfolio bei $t + \Delta t$.

[22] $A := A(S(t),t)$, $V := V(S(t),t)$ usw.

2. Mit der BSPDE kann *jede* Option $V(S,t)$ bewertet werden, die den minimalen Anspruch genügt, in S und t glatt zu sein.

Lösungen von solchen homogenen Gleichungen können unteranderem folgende Bezeichung haben:

Definition 2 (Black-Scholes Formel). *Eine Funktion $V(S,t)$ ist eine Black-Scholes Formel, falls*

1. $V(S,t)$ *ist Lösung von BSPDE.*
2. $V(S,T) = \lambda(T)$, *wobei* λ *eine Auszahlungsfunktion und* T *der Auszahlungstag der Option* V *ist.*
3. $V(0,t) = v_0 \ , \ \ 0 \leq t \leq T.$
4. $V(S,t)$ *kann für großes* S *abgeschätzt werden.*

Die Bedingung 2., 3. und 4. bilden ein sogenanntes ***Randwertproblem****.*

Hinsichtlich dieser Definition werden im nächsten Abschnitt nochmals zwei Beispiele diskutiert.

2.4 Black-Scholes Formeln

2.4.1 Europäische Calloption

Für eine kontinuierliche Zufallsvariable (ZV) ist die *Standardnormalverteilung*[23] gegeben durch

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \tag{2.8}$$

und nach dem *Fundamentalsatz der Differential und Integralrechnung* (FDI) ist die Ableitung

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}x^2} \tag{2.9}$$

Beweis:
Mit dem FDI[24] gilt für eine reelle Funktion f:

$$F(x) = \int_a^b f(s)ds = F(b) - F(a)$$

[23] vgl. [1] S.25-26
[24] vgl. [2] S. 201-202

Wird diese Beziehung auf $N(x)$ angewendet, so folgt direkt die Behauptung.

□

Zusätzlich sei

$$d_{1/2} = \frac{log(\frac{S}{E}) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \ . \tag{2.10}$$

mit der Eigenschaft

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \ . \tag{2.11}$$

Beweis:
Um 2.11 zu zeigen, reicht es, die Formel auf eine äquivalente Gleichheit zurückzuführen:

$$\begin{aligned}
& d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{log(\frac{S}{E}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{log(\frac{S}{E}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \sigma\sqrt{T-t} \\
\Leftrightarrow\ & log(\frac{S}{E}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) = log(\frac{S}{E}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - (\sigma\sqrt{T-t})^2 \\
\Leftrightarrow\ & (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) = (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - \sigma^2\sqrt{T-t}^2 \\
\Leftrightarrow\ & r - \frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{(r + \frac{1}{2}\sigma^2 - \sigma^2)\cancel{(T-t)}}{\cancel{T-t}} \\
\Leftrightarrow\ & r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 = (r - \sigma^2) \\
\Leftrightarrow\ & r - \frac{1}{2} \cdot (2\sigma^2) = (r - \sigma^2) \\
\Leftrightarrow\ & r - \sigma^2 = r - \sigma^2 \\
\Leftrightarrow\ & r = r
\end{aligned}$$

□

Satz 1. *Die Funktion*

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{2.12}$$

löst die BSPDE und genügt den Bedingungen:

- $C(S,T) = max(S(T) - E, 0)$,
- $C(0,t) = 0 \ , \ 0 \leq t \leq T$ *und*
- $C(S,t) \approx S$ *für großes* S.

C *wird* ***europäische Calloption***[a] *genannt.*

[a] vgl. dazu 1.1

Für den Beweis von 2.12 sei davor ein Korollar vermerkt:

Korollar 1. *Angenommen die Ableitung von* $N(x)$ *(2.9) sei gegeben, dann gelten folgende Behauptungen:*

$$log(\frac{SN'(d_1)}{e^{-r(T-t)}EN'(d_2)}) = 0 \ , \tag{2.13}$$

$$SN'(d_1) - e^{-r(T-t)}EN'(d_2) = 0 \tag{2.14}$$

Beweis:

Mit 2.9, 2.10, 2.11 und den Rechengesetzen der Exponentialfunktion[25] bzw. des Logarithmus[26] folgt die Behauptung 2.13 durch einen Äquivalenznachweis:

$$\begin{aligned}
& log(\frac{SN'(d_1)}{e^{-r(T-t)}EN'(d_2)}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{SN'(d_1)}{e^{-r(T-t)}EN'(d_2)} = 1 \\
\Leftrightarrow\ & S\frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}}e^{\frac{-1}{2}d_1^2} = e^{-r(T-t)}E\frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}}e^{\frac{-1}{2}d_2^2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{S}{E} = \frac{e^{-r(T-t)}e^{\frac{-1}{2}d_2^2}}{e^{\frac{-1}{2}d_1^2}} \\
\Leftrightarrow\ & log(\frac{S}{E}) = log(e^{-r(T-t)}) + log(e^{\frac{-1}{2}d_2^2}) - log(e^{\frac{-1}{2}d_1^2}) \\
\Leftrightarrow\ & log(\frac{S}{E}) = -r(T-t) + \frac{-1}{2}(d_2^2 - d_1^2)
\end{aligned}$$

[25] vgl [2] S. 114

[26] $log(e^x) = x$, $log(e^x \cdot e^y) = log(e^x) + log(e^y)$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow log(\frac{S}{E}) = -r(T-t) + \frac{-1}{2}((d_1 - \sigma\sqrt{T-t})^2 - d_1^2) \\
&\Leftrightarrow log(\frac{S}{E}) = -r(T-t) + \frac{-1}{2}(d_1^2 - 2\sigma\sqrt{T-t}d_1 + \sigma^2(T-t) - d_1^2) \\
&\Leftrightarrow log(\frac{S}{E}) = -r(T-t) + \frac{-(-2)}{2}\{(\sigma\sqrt{T-t}) \cdot [\frac{log(\frac{S}{E}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}] - \frac{\sigma^2(T-t)}{2}\} \\
&\Leftrightarrow log(\frac{S}{E}) = -r(T-t) + log(\frac{S}{E}) + r(T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2} - \frac{\sigma^2(T-t)}{2} \\
&\Leftrightarrow \cancel{log(\frac{S}{E}) - log(\frac{S}{E})} = \cancel{-r(T-t) + r(T-t)} + \cancel{\frac{\sigma^2(T-t)}{2} - \frac{\sigma^2(T-t)}{2}} \\
&\Leftrightarrow 0 = 0
\end{aligned}
$$

Mit 2.13 kann ebenso die 2. Behauptung (2.14) bewiesen werden, da

$$
\begin{aligned}
& log(\frac{SN'(d_1)}{e^{-r(T-t)}EN'(d_2)}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{SN'(d_1)}{e^{-r(T-t)}EN'(d_2)} = 1 \\
\Leftrightarrow\ & SN'(d_1) = e^{-r(T-t)}EN'(d_2) \\
\Leftrightarrow\ & SN'(d_1) - e^{-r(T-t)}EN'(d_2) = 0\ .
\end{aligned}
$$

□

Beweis der Calloption:

Es müssen zwei Nachweise geführt werden: 2.12 sei eine Lösung von BSPDE und 2.12 erfülle das Randwertproblem. Für den ersten Teil reicht es aus, die benötigten partiellen Ableitungen mit Hilfe der bekannten Ableitungsregeln[27] (Produktregel[28], Kettenregel [29],

[27] Vgl. Definitionen und Beweise in [2] S. 154-158.

[28] Seien $f, g : V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in V$ differenzierbar, dann gilt

$$(fg)(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)\ . \tag{D1}$$

[29] Sei $f : V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in V$ differenzierbar und $g : W \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $y := f(x) \in W$ mit $f(V) \subset W$ differenzierbar, dann ist $(g \circ f) : V \rightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar mit der Vorschrift

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)\ . \tag{D2}$$

Summenregel[30], Quotientenregel[31]) zu bestimmen und dann entsprechend in BSPDE einzusetzen, denn es muss eine Gleichheit zu 0 folgen.
Zu

$$\Delta := \frac{\partial C}{\partial S} \overset{D1+D2+D3}{=} N(d_1) + SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S}$$

hat $\frac{\partial d_{1/2}}{\partial S}$ die Darstellung

$$\frac{\partial d_{1/2}}{\partial S} \underset{D4}{\overset{D2+D3}{:=}} \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}} \ , \tag{2.15}$$

dabei seien d_1 und d_2 gleich, weil der Term, wo sich beide Variablen unterscheiden, eine Konstante (mit Ableitung 0) in 2.15 sei. Dadurch soll

$$a := \frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S}$$

sein, wodurch

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + a \cdot (SN'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)) \overset{2.14}{=} N(d_1) + a \cdot 0 = N(d_1) \ .$$

Die nächste Ableitung folgt direkt aus Δ, in Folge dessen sei

$$\Gamma := \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} N(d_1) = N'(d_1) \cdot \frac{\partial d_1}{\partial S} \overset{2.15}{=} \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}} \ .$$

Wenn[32]

$$P := \frac{\partial C}{\partial r} = SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} + Ee^{-r(T-t)}(T-t)N(d_2) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial r} \ ,$$

erfolgt aus

$$\frac{\partial d_{1/2}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{log(\frac{S}{E}) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) \overset{D3}{=} \frac{T-t}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}} \tag{2.16}$$

das

$$P = SN'(d_1)\frac{T-t}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}} + Ee^{-r(T-t)}(T-t)N(d_2) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{T-t}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}}$$

[30]Seien $f, g : V \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x \in V$ differenzierbar, dann gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x)x \cdot f(x) \ . \tag{D3}$$

[31]Seien $f, g : V \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x \in V$ differenzierbar mit $g(x) \neq 0$, dann ist

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2} \ . \tag{D4}$$

[32]P bezeichnet den griechischen Buchstaben Rho.

$$= [SN'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)]\frac{T-t}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}} + Ee^{-r(T-t)}(T-t)N(d_2)$$

$$\overset{2.14}{=} Ee^{-r(T-t)}(T-t)N(d_2)\ .$$

Ferner gilt für

$$\Theta := \frac{\partial C}{\partial t} = SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial t} - Ere^{-r(T-t)}N(d_2) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial t}\ ,$$

dass

$$\frac{\partial d_{1/2}}{\partial t} = \frac{-r \pm \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{log(\frac{S}{E}) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{2\sigma(\sqrt{T-t})^3}\ , \tag{2.17}$$

durch einsetzen gilt dann

$$SN'(d_1)[\frac{-r-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{log(\frac{S}{E}) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{2\sigma(\sqrt{T-t})^3}] - Ere^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$-Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)[\frac{-r+\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{log(\frac{S}{E}) + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{2\sigma(\sqrt{T-t})^3}]$$

$$= \frac{r[-SN'(d_1) + Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)] - ,\frac{1}{2}\sigma^2[(SN'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2))]}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$+\frac{log(\frac{S}{E})[SN'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)]}{2\sigma(\sqrt{T-t})^3}$$

$$+\frac{r(T-t)[SN'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)] + \frac{1}{2}\sigma^2[SN'(d_1) + Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)]}{2\sigma(\sqrt{T-t})^3}$$

$$-Ere^{-r(T-t)}N(d_2)\ .$$

Wegen $SN'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2) = 0$ bzw. $SN'(d_1) = Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)$, seidann

$$\Theta = \frac{-S\sigma}{2\sqrt{T-t}}N'(d_1) - rEe^{-r(T-t)}N(d_2)\ .$$

Werden die partiellen Ableitungen Δ, Θ und Γ an den richtigen Stellen in

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \tag{2.18}$$

ausgetauscht und 2.18 umsortiert, dann folgt

$$r[SN(d_1) - SN(d_1)] - r[Ee^{-r(T-t)}N(d_2) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)]$$

$$-\frac{S\sigma N(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + \frac{S\sigma N(d_1)}{2\sqrt{T-t}} = 0\ .$$

Also ist $C(S,t)$ eine Lösung von BSPDE. Jetzt bleibt noch zu zeigen, dass $C(S,t)$ das Randwertproblem erfüllt.
Die Auszahlungsfunktion von der europäischen Calloption lautet

$$C(S,T) = max(S-E,0) \; ,$$

denn beim Verlauf[33] von $t \to T^-$ gilt

$$\lim_{t\to T^-}[C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)] \underset{aus\ \mathbb{R}}{\overset{GWS}{=}} S \cdot \lim_{t\to T^-} N(d_1) - E \cdot 1 \cdot \lim_{t\to T^-} N(d_2)$$

$$\underset{stetig}{\overset{N(x)}{=}} S \cdot N(\lim_{t\to T^-} d_1) - E \cdot 1 \cdot N(\lim_{t\to T^-} d_2) \overset{ST}{=} S - E$$

Fallunterscheidung:

1. Falls $S > E \Rightarrow$ Gewinn beträgt $S - E$.
2. Falls $S \leq E \Rightarrow S - E \leq 0$, aber C bildet auf $\mathbb{R}_+$ ab, also sei der Gewinn 0.

Daraus ergibt sich die Behauptung.
Für

$$C(0,t) = 0 \;\; \forall \; t \in [0,T]$$

gilt bei Betrachtung des Grenzwertes $S \to 0^+$:

$$\lim_{S\to 0^+} C(S,t) = \lim_{S\to 0^+}[SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)] \underset{aus\ \mathbb{R}}{\overset{GWS}{=}} \lim_{S\to 0^+} S \cdot \lim_{S\to 0^+} N(d_1)$$

$$-Ee^{-r(T-t)} \lim_{S\to 0^+} N(d_2) \underset{stetig}{\overset{N(x)}{=}} 0 \cdot N(\lim_{S\to 0^+} d_1) - Ee^{-r(T-t)} N(\lim_{S\to 0^+} d_2) \overset{ST}{=} 0$$

Die Behauptung für ausreichend großes S

$$C(S,t) \approx S$$

erhält man aus der Grenzwertbetrachtung bezüglich $S \to \infty$:

$$\lim_{S\to\infty} |C(S,t) - (S + Ee^{-r(T-t)})| = 0 \; .$$

[33] Es werden die Grenzwertsätze (GWS) aus $\mathbb{R}$ genutzt und Eigenschaften der Standardnormalverteilung (ST).

Denn aus der Δ-Ungleichung und den GWS sei

$$
\begin{aligned}
&\lim_{S\to\infty} |C(S,t) - (S + Ee^{-r(T-t)})| \\
&= \lim_{S\to\infty} |SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) - (S + Ee^{-r(T-t)})| \\
&= \lim_{S\to\infty} |S(N(d_1) - 1) + Ee^{-r(T-t)}(N(d_2) - 1)| \\
&\leq \lim_{S\to\infty} |S(N(d_1) - 1)| + \lim_{S\to\infty} |Ee^{-r(T-t)}(N(d_2) - 1)| \ .
\end{aligned}
$$

Das führt zum *unbestimmten Ausdruck*[34]

$$\lim_{S\to\infty} |S(N(d_1) - 1)| \underset{aus\ \mathbb{R}}{\overset{GWS}{=}} \infty \cdot 0$$

und die 1. Ableitung liefert

$$
\begin{aligned}
\lim_{S\to\infty} |S(N(d_1) - 1)| &= \lim_{S\to\infty} \frac{1 - N(d_1)}{\frac{1}{S}} \\
&= \lim_{S\to\infty} \frac{N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S}}{-\frac{1}{S^2}} \ .
\end{aligned}
$$

Aus 2.9 und 2.15 sei

$$\frac{N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S}}{-\frac{1}{S^2}} = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}} \cdot S}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma} \ ,$$

mit 2.10 folglich

$$
\begin{aligned}
-\frac{d_1^2}{2} &= -\frac{[\log(\frac{S}{E}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]^2}{2(T-t)\sigma^2} \\
&= -[C_1 \cdot \log(S)^2 + C_2 \cdot \log(S) + C_3] \ ,
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
C_1 &:= \frac{\frac{1}{E^2}}{2(T-t)\sigma^2} \ , \\
C_2 &:= \frac{2\frac{1}{E}(r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{2(T-t)\sigma^2} \ , \\
C_3 &:= \frac{[(r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]^2}{2(T-t)\sigma^2} \ . \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

[34]Unbestimmte Ausdrücke können mit der Regel von Bernoulli bzw. de l'Hospital bestimmt werden, indem jeweils der Grenzwert der 1. Ableitung betrachtet wird. Vgl. [2] S. 170-171

Daraus resultiert von

$$\lim_{S\to\infty} \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}} \cdot S}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma} ,$$

dass

$$\begin{aligned}
&\lim_{S\to\infty} [e^{-\frac{d_1^2}{2}} \cdot S] \\
&= \lim_{S\to\infty} [e^{-[C_1 \cdot \log(S)^2 + C_2 \cdot \log(S) + C_3]} \cdot S] \\
&= \lim_{S\to\infty} [e^{-[C_1 \cdot \log(S)^2} e^{-C_2 \cdot \log(S)} e^{C_3} \cdot S] \\
&= \lim_{S\to\infty} [e^{-[C_1 \cdot \log(S)^2} \lim_{S\to\infty} e^{-C_2 \cdot \log(S)} \lim_{S\to\infty} e^{C_3} \lim_{S\to\infty} \cdot S] \\
&= \lim_{S\to\infty} e^{-C_1 \cdot \log(S)^2} \lim_{S\to\infty} e^{-C_2 \cdot \log(S)} \lim_{S\to\infty} e^{C_3} \lim_{S\to\infty} S \\
&= \lim_{S\to\infty} e^{-C_1 \cdot \log(S)^2} \lim_{S\to\infty} e^{-C_2 \cdot \log(S)} \lim_{S\to\infty} e^{C_3} \lim_{S\to\infty} S \; .
\end{aligned}$$

Da

$$\ln(S) - C\log(S)^2 = \log(S)(1 - C\log(S)) \to -\infty \quad \text{für } S \to \infty$$

$$\Rightarrow Se^{-C_1 \log(S)^2} \to 0 \; .$$

Somit

$$C(S,t) \to (S - Ee^{-r(T-t)})$$

und mit der Wahl von einem ausreichend großen S ist die Behauptung bewiesen.

□

2.4.2 Europäische Putoption

Nach der *put-call parity*[35]

$$C(S,t) + Ee^{-r(T-t)} = P(S,t) + S \; , \tag{2.20}$$

gibt es zu jeder Calloption auch eine Putoption, werden 2.12 und 2.20 kombiniert, so gilt

$$C(S,t) + Ee^{-r(T-t)} = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) + Ee^{-r(T-t)} = P(S,t) + S$$

[35] Der Ausdruck von [1] S. 13 wo die *put-call parity* zum Zeitpunkt $t = 0$ betrachtet wird, kann unter gleichen Vorraussetzungen auf das ganze Intervall $[0, T]$ erweitert werden.

$$\Rightarrow P(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) + Ee^{-r(T-t)} - S$$
$$= Ee^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) + S(N(d_1) - 1)$$

Satz 2. *Die Funktion*

$$P(S,t) = Ee^{-r(T-t)} \cdot (1 - N(d_2)) + S(N(d_1) - 1) \tag{2.21}$$

löst die BSPDE und genügt den Bedingungen:

- $P(S,T) = max(E - S(T), 0)$ *,*
- $P(0,t) = Ee^{-r(T-t)}$, $0 \leq t \leq T$ *und*
- $P(S,t) \approx 0$ *für großes* S*.*

P *wird **europäische Putoption** genannt.*

Beweis:
Die Normalverteilung hat die Eigenschaft[36], dass

$$N(\alpha) + N(-\alpha) = 1 \; ,$$

dadurch ergeben sich $N(d_1) - 1 = -N(-d_1)$ und $N(-d_2) = 1 - N(d_2)$, werden beide Terme in 2.21 eingesetzt, so ist

$$P(S,t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \; . \tag{2.22}$$

Erst einmal muss wieder gezeigt werden, dass 2.21 eine Lösung von BSPDE ist. Wie bei dem Beweis von 2.12 reicht es aus, die partiellen Ableitungen[37]

$$\begin{aligned}
\Delta := \frac{\partial P}{\partial S} \\
&= (-1)Ee^{r(T-t)}N'(-d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S} - (-1)SN'(-d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} \\
&= -\frac{Ee^{r(T-t)}N'(-d_2)}{S\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{SN'(-d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}
\end{aligned}$$

[36] vgl. [1] S. 29
[37] Hier werden wieder die bekannten Ableitungsregeln D1, D2, D3 und D4 verwendet.

$$
\begin{aligned}
\Gamma &:= \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial S}[-\frac{Ee^{r(T-t)}N'(-d_2)}{S\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{SN'(-d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}] \\
&= \frac{Ee^{r(T-t)}N''(-d_2)}{S^2\sigma^2(T-t)} + \frac{Ee^{r(T-t)}N'(-d_2)}{S^2\sigma\sqrt{(T-t)}} - \frac{SN''(-d_1)}{S^2\sigma^2(T-t)} - \frac{SN'(-d_1)}{S^2\sigma\sqrt{T-t}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Theta &:= \frac{P}{\partial t} \\
&= rEe^{-r(T-t)}N(-d_2) + Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)[-\frac{-r+\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{log(\frac{S}{E}) + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}^3}] \\
&- SN'(-d_1)[-\frac{-r-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{log(\frac{S}{E}) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}^3}
\end{aligned}
$$

in die BSPDE einzusetzen. Der Beweis des Randwertproblems verläuft analog wie bei 2.12, indem die einzelnen Grenzwerte erneut betrachtet werden.

□

Literatur

[1] D. Higham. *Financial Option Valuation*. 1., aktualisierte Aufl., Cambridge University Press, New York, 2008.

[2] O. Forster. *Analysis 1*. 7., verbesserte Aufl., Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2004.