Finanzmathematische Modelle und Simulation

WS 09/10

Rebecca Henkelmann

In meiner Ausarbeitung 'Grundbegriffe der Stochastik I', geht es darum die folgenden Begriffe für die nächsten Kapitel einzuführen. Auf den nächsten Seiten finden sich Definition und Eigenschaften von Zufallsvariablen, Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert, Varianz und Unabhängigkeit. Weiter sind diese anschaulich an verschiedenen Beispielen erklärt.

1 Grundbegriffe der Stochastik I

1.1 Zufallsvariablen, Wahrscheinlichkeit & Erwartungswert

1.1.1 diskrete Zufallsvariablen

Am Beispiel eines Würfels, sind diskrete Zufallsvariablen schnell erklärt:
Die Zufallsvariable nimmt einen Wert aus der Menge der möglichen Ereignisse $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ an. In jedem Fall mit der Wahrscheinkeit 1/6.
Verallgemeinert heißt das, dass die diskrete Zufallsvariable X Werte aus $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_m\}$ mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit $(p_1, p_2, p_3, ..., p_m)$ annimmt.
Man schreibt:

$$P(X = x_i) = p_i.$$

Das heißt, die Zufallsvariable X nimmt mit der Wahrscheinlichkeit p_i den Wert x_i an.

Definition: Der Vektor $(p_1, ..., p_m)$ heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, falls

$$\begin{aligned} & p_i \geq 0 \; \forall i, \\ & \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \\ und \qquad & P(X = x_i) = p_i \; \forall i \end{aligned}$$

gilt.

Erwartungswert von X
Der Erwartungswert von X ist definiert durch

$$E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i.$$

Für das Würfelbeispiel gilt beispielsweise
$E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} = 3,5.$

Beispiel: Bernoulli Zufallsvariable
Sei $X = 1$ mit der Wahrscheinlichkeit p
und $X = 0$ mit der Wahrscheinlichkeit $(1 - p)$
Dann heißt X Bernoulli Zufallsvariable mit Parameter p und hat die Eigenschaft, dass

$$E(X) = 1 * p + 0 * (1 - p) = p.$$

1.1.2 kontinuierliche Zufallsvariablen

Kontinuierliche Zufallsvariablen X nehmen Werte in **R** an und können durch ihre Dichtefunktion charakterisiert werden.

Definition: f(x) heißt Dichtefunktion, genau dann wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

$$f(x) \geq 0 \, \forall x \in \mathbf{R}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$

Definition: Eine kontinuierliche Zufallsvariable X besitzt die Dichte f, falls die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{a \leq X \leq b\}$ durch Integration von f bestimmt werden kann, d.h. für alle $a < b$ gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Erwartungswert von X
Der Erwartungswert von X ist definiert durch

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx.$$

Im Allgemeinen existiert dieses Integral nicht immer.

Beispiel: Gleichverteilung
Sei X eine Zufallsvariable mit

$$f(x) = \begin{cases} (\beta - \alpha)^{-1} & : \alpha < x < \beta, \\ 0 & : sonst, \end{cases}$$

dann sagt man, dass X über (α, β) gleichverteilt ist, d.h. X nimmt nur Werte zwischen α und β an und es ist gleich wahrscheinlich, dass irgendein solcher Wert angenommen wird.
Es gilt:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta 1\, dx = 1.$$

Man schreibt: $X \sim U(\alpha, \beta)$.

Betrachten wir nur ein Intervall $[x_1, x_2]$ auf $[\alpha, \beta]$ mit $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X \in [x_1, x_2]$ gerade die verhältnismäßige Größe des Intervalls:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{x_1}^{x_2} 1\,dx = \frac{1}{\beta - \alpha} [x]_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{\beta - \alpha}.$$

Der Erwartungswer von X ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x\,dx \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} [\frac{1}{2} x^2]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)}{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\beta + \alpha}{2} \end{aligned}$$

Eigenschaften von E(X)
Durch kombinieren zweier Zufallsvariablen X und Y können wir neue Zufallsvariablen erzeugen, z.B.

$$X + Y,\ X^2 + \sin(Y)\ und\ \exp(\sqrt{X + Y})$$

sind wieder Zufallsvariablen.
Zwei fundamentale Eigenschaften für alle X und Y sind:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y),$$

$$E(\alpha X) = \alpha E(X).$$

Beweis der zweiten Eigenschaft (im kontinuierlichen Fall):

$$E(\alpha X) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\, x\, f(x)\,dx = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx = \alpha E(X)$$

Die erste Gleichheit folgt aus: Wendet man auf eine kontinuierliche Zufallsvariable eine Funktion h(x) an, dann ist der Erwartungswert

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, f(x)\,dx.$$

1.2 Unabhängigkeit

Definition: X und Y heißen unabhängig, genau dann wenn

$$E(g(X)\, h(Y)) = E(g(X))\, E(h(Y))\ \forall g, h : R \to R$$

Sind g, h die Identitätsfunktionen, dann gilt insbesondere

$$E(X\, Y)) = E(X)\, E(Y).$$

Dies gilt im Allgemeinen nicht für abhängige Zufallsvariablen.

Definition: Sei $X = X_1, X_2, X_3, ...$ eine Folge von Zufallsvariablen.
X heißt unabhängig und identisch verteilt, wenn

(i) Im diskreten Fall haben die $X_i's$ die selben möglichen Werte $\{x_1, ..., x_m\}$ und Wahrscheinlichkeiten $(p_1, ..., p_m)$.
Im kontinuierlichen Fall haben alle $X_i's$ die selbe Dichtefunktion.
(ii) Die Werte einer Teilmenge der $X_i's$ sagen nichts über die restlichen $X_i's$ aus.

Für „unabhängig und identisch verteilt“ schreibt man kurz i.i.d. (independent & identically distributed).
Aus $X_1, X_2, X_3, ...$ sind i.i.d. folgt $E(X_i\, X_j) = E(X_i)\, E(X_j)$ für $i \neq j$ (paarweise unabhängig).

1.3 Varianz

Die Varianz einer Zufallsvariable ist definiert durch

$$var(X) = E((X - E(X))^2).$$

Die Varianz gibt uns die Höhe der Schwankungen um den Erwartungswert an.
Eine äquivalente Definition ist:

$$var(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
var(X) \quad &= E((X - E(X))^2) \\
&= E(X^2 - 2XE(X) + E^2(X)) \\
&= E(X^2) - E(2XE(X)) + E^2(X) \\
&= E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X) \\
&= E(X^2) - E^2(X)
\end{aligned}$$

Eigenschaften der Varianz
(i)

$$var(\alpha\, X) = \alpha^2\, var(X)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
var(\alpha\, X) \quad &= E((\alpha\, X)^2) - E^2(\alpha\, X) \\
&= E(\alpha^2\, X^2) - E(\alpha\, X)\, E(\alpha\, X) \\
&= \alpha^2\, E(X^2) - \alpha^2\, E(X)\, E(X) \\
&= \alpha^2\, (E(X^2) - E^2(X)) \\
&= \alpha^2\, var(X)
\end{aligned}$$

(ii) Für X, Y unabhängig gilt:

$$var(X + Y) = var(X) + var(Y)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
var(X + Y) \quad &= E((X + Y)^2) - E^2(X + Y) \\
&= E(X^2 + 2XY + Y^2) - E^2(X + Y) \\
&= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X + Y)E(X + Y) \\
&= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (E^2(X) + 2E(X)E(Y) + E^2(Y)) \\
&= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E^2(X) - 2E(XY) - E^2(Y) \\
&= E(X^2) - E^2(X) + E(Y^2) - E^2(Y) \\
&= var(X) + var(Y)
\end{aligned}$$

(iii)

$$var(\alpha + X) = var(X)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
var(\alpha + X) \quad &= E((\alpha + X)^2) - E^2(\alpha + X) \\
&= E(\alpha^2 + 2\alpha X + X^2) - (E(\alpha) + E(X)\, E(\alpha) + E(X)) \\
&= E(\alpha^2) + 2E(\alpha X) + E(X^2) - E^2(\alpha) - 2E(\alpha X) - E^2(X) \\
&= \alpha^2 + E(X^2) - \alpha^2 - E^2(X) \\
&= E(X^2) - E^2(X) \\
&= var(X)
\end{aligned}$$

Die **Standardabweichung** von X ist die Quadratwurzel der Varianz:

$$std(X) = \sqrt{var(X)}.$$

Beispiel: Bernoulli Zufallsvariable (2)
Sei X eine Bernoulli Zufallsvariable mit Parameter p und $E(X) = p$, wie im obigen Beispiel. Dann gilt

$$(X - E(X))^2 = \begin{cases} (1-p)^2 & : \ mit\, Wahrscheinlichkeit\, p \\ p^2 & : \ mit\, Wahrscheinlichkeit\, (1-p). \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow var(X) \quad &= E((X - E(X))^2) \\
&= (1-p)^2\, p + p^2\, (1-p) \\
&= p - p^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow p = \frac{1}{2}$ maximiert die Varianz

Beispiel: Gleichverteilung (2)
Sei $X \sim U(\alpha, \beta)$, $E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2}$ und f(x) wie oben.
Zur Berechnung der Varianz benötigen wir noch $E(X^2)$.

$$\begin{aligned}
E(X^2) \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx \\
&= 0 + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\beta-\alpha}\, x^2\, dx + 0 \\
&= \frac{1}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} x^2\, dx \\
&= \frac{1}{\beta-\alpha}\, [\frac{1}{3}\, x^3]_{\alpha}^{\beta} \\
&= \frac{1}{3}\, \frac{\beta^3-\alpha^3}{\beta-\alpha} \\
&= \frac{1}{3}\, \frac{(\beta^3-\alpha^3+\alpha^2\,\beta-\alpha^2\,\beta+\beta^2\,\alpha-\beta^2\,\alpha)}{\beta-\alpha} \\
&= \frac{1}{3}\, \frac{(\alpha^2+\alpha\,\beta+\beta^2)(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha} \\
&= \frac{1}{3}\, (\alpha^2+\alpha\,\beta+\beta^2)
\end{aligned}$$

Aus $E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} \;\Rightarrow\; E^2(X) = \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{4}$.
Damit folgt dann:

$$\begin{aligned}
var(X) \quad &= \frac{(\alpha^2+\alpha\,\beta+\beta^2)}{3} - \frac{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{4} \\
&= \frac{(4\alpha^2+4\alpha\,\beta+4\beta^2-3\alpha^2-6\alpha\beta-3\beta^2)}{12} \\
&= \frac{(\alpha^2-2\alpha\,\beta+\beta^2)}{12} \\
&= \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}
\end{aligned}$$

Zum Vergleich: Sei $Y_1 \sim U(-1, 1)$ und $Y_2 \sim U(-2, 2)$, dann haben Y_1 und Y_2 zwar den selben Erwartungswert, aber Y_2 hat eine höhere Varianz (Schwankung um $E(Y_i) = 0$):

$$\begin{aligned}
var(Y_1) &= \frac{(-2)^2}{12} = \frac{1}{3}, \\
var(Y_2) &= \frac{(-4)^2}{12} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

1.4 Exponentialverteilte Dichtefunktion

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x \leq 0. \end{cases}$$

X heißt exponentialverteilt mit Parameter λ.

1.4.1 Erwartungswert von X

$$\begin{aligned}
E(X) \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \\
&= 0 + \int_{0}^{\infty} x\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx \\
&= \lambda \int_{0}^{\infty} x\, e^{-\lambda x}\, dx \\
&= \lambda\, ([x\, \frac{1}{-\lambda}\, e^{-\lambda x}]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{-\lambda}\, e^{-\lambda x}\, dx) \\
&= [-x\, e^{-\lambda x}]_0^\infty + [\frac{1}{-\lambda}\, e^{-\lambda x}]_0^\infty \\
&= \lim_{x\to\infty} (-x\, e^{-\lambda x}) - 0 + \lim_{x\to\infty} (\frac{1}{-\lambda}\, e^{-\lambda x}) - \frac{1}{-\lambda}\, e^0 \\
&= 0 - 0 + 0 + \frac{1}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

Der erste Limes geht gegen Null, da $e^{-\lambda x}$ schneller gegen Null geht,
als -x gegen $-\infty$.
Das der zweite Limes gegen Null geht ist klar, da $\frac{1}{-\lambda}$ eine Konstante ist.

1.4.2 Varianz von X

Zuerst brauchen wir noch:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx \\
&= \lambda \int_{0}^{\infty} x^2\, e^{-\lambda x}\, dx \\
&= \lambda\, ([x^2\, \frac{1}{-\lambda}\, e^{-\lambda x}]_0^\infty - \int_0^\infty 2x \frac{1}{-\lambda}\, e^{-\lambda x}\, dx) \\
&= [x^2\, e^{-\lambda x}]_0^\infty + \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty x\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx.
\end{aligned}$$

Das übrige Integral ist wieder unser Erwartungswert von oben, also $\frac{1}{\lambda}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ [x^2\, e^{-\lambda x}]_0^\infty + \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty x\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx &= [x^2\, e^{-\lambda x}]_0^\infty + \frac{2}{\lambda}\, \frac{1}{\lambda} \\
&= [x^2\, e^{-\lambda x}]_0^\infty + \frac{2}{\lambda^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} (-x^2\, e^{-\lambda x}) - 0 + \frac{2}{\lambda^2} \\
&= \frac{2}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
var(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\
&= \frac{2}{\lambda^2} - (\frac{1}{\lambda})^2 \\
&= \frac{1}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$