Grundbegriffe der Stochastik II

Henrik Gebauer

26. Oktober 2009

Zusammenfassung

Dieser Vortrag dient der Wiederholung zentraler Begriffe der kontinuierlichen Stochastik.

1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \qquad \text{(Normierung).}$$

Sei X eine Zufallsvariable mit

$$\mathbb{P}(X \in (a,b)) = \int_a^b f(x)dx.$$

Dann heißt $f(x)$ die *Wahrscheinlichkeitsdichte* von X.

Der Erwartungswert von X ist $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.

Man definiert außerdem die *Verteilungsfunktion*

$$F(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds.$$

2 Die Normalverteilung

Standard-Normalverteilung

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

hat die oben geforderten Eigenschaften.

$$f(x) > 0$$

folgt daraus, dass die Exponentialfunktion eine positive Funktion ist. Um die Normierung zu zeigen, werden Polarkoordinaten benutzt:

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right)^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-\frac{r^2}{2}}drd\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty}d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}1d\theta = \frac{1}{2\pi}2\pi = 1.\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit dieser Dichtefunktion heißt *Standard-Normalverteilung*. Eine standard-normalverteilte Zufallsvariable X hat den Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{xe^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{ungerade}}dx = 0$$

und die Varianz

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx\\ &\overset{\text{partiell}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\ &= 0+1 = 1.\end{aligned}$$

Wir schreiben daher $X \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Für das p-te Moment $\mathbb{E}(X^p), p \in \mathbb{N}$, gilt

$$\mathbb{E}(X^p) = (p-1)(p-3)(p-5)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1,$$

denn für alle ungeraden $p \in \mathbb{N}$ erhält man

$$\mathbb{E}(X^p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{x^pe^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{ungerade}}dx = 0$$

und $\mathbb{E}(X^2) = 1$ wurde oben gezeigt. Für alle anderen geraden p beweist man die Behauptung durch vollständige Induktion:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^{p+2}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^{p+2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^{p+1}\cdot\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx\\ &\overset{\text{partiell}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-x^{p+1}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{p+1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^pe^{-\frac{x^2}{2}}dx\\ &= 0+(p+1)\mathbb{E}(X^p)\\ &= (p+1)\cdot(p-1)(p-3)(p-5)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1\\ &= ((p+2)-1)((p+2)-3)((p+2)-5)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1.\end{aligned}$$

Allgemeine Normalverteilung

Allgemein heißt eine Zufallsvariable *normalverteilt*, wenn der Graph ihrer Wahrscheinlichkeitsdichte durch geeignete Skalierung und durch Verschiebung auf die Dichte der Standardnormalverteilung transformiert werden kann. Für eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 schreiben wir $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

Die Dichtefunktion ist dann

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

denn es gelten tatsächlich

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&\overset{x':=x-\mu}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x'+\mu) e^{-\frac{x'^2}{2\sigma^2}} dx' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x' e^{-\frac{x'^2}{2\sigma^2}}}_{\text{ungerade}} dx' + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x'^2}{2\sigma^2}} dx' \\
&= 0 + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x'^2}{2\sigma^2}} dx' \\
&\overset{x'':=x/\sigma}{=} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x''^2}{2}} dx'' = \mu, \\
\mathrm{Var}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&\overset{x':=x-\mu}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x'^2 e^{-\frac{x'^2}{2\sigma^2}} dx' \\
&\overset{x'':=x/\sigma}{=} \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x''^2 e^{-\frac{x''^2}{2}} dx'' \\
&\overset{s.o.}{=} \sigma^2.
\end{aligned}$$

Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung

Die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung spielt in diesem Seminar eine wichtige Rolle, also bekommt sie einen Namen:

$$N(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}} ds.$$

Es gilt für alle α:

$$\begin{aligned}
N(\alpha) + N(-\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{s^2}{2}} ds + \int_{-\infty}^{-\alpha} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \right) \\
&\overset{s':=-s}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{s^2}{2}} ds - \int_{\infty}^{\alpha} e^{-\frac{s'^2}{2}} ds' \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{s^2}{2}} ds + \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{s'^2}{2}} ds' \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = 1.
\end{aligned}$$

Eigenschaften der Normalverteilung

$$
\begin{array}{ll}
(i) & X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow (X-\mu)/\sigma \sim \mathrm{N}(0,1) \\
(ii) & Y \sim \mathrm{N}(0,1) \Rightarrow \sigma Y + \mu \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \\
(iii) & X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \text{ unabhängig} \\
 & \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)
\end{array}
$$

3 Der zentrale Grenzwertsatz

Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass die Summe einer großen Anzahl unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen annähernd normalverteilt ist. Sei $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit jeweils Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Dann ist

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

die Summe der ersten n Zufallsvariablen. Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt für große n näherungsweise $S_n \sim \mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2)$, d.h. $(S_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n}) \sim \mathrm{N}(0,1)$ für große n. Genauer gilt punktweise Konvergenz für die Verteilungsfunktion:

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \to N(x) \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

Bezug zur realen Welt

Größen der realen Welt unterliegen oft einer riesigen Anzahl an Einflüssen, die durch unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen modelliert werden können. Auch wenn einzelne Einflüsse unbekannt oder nicht berechenbar sind, kann der Gesamteinfluss durch eine normalverteilte Zufallsvariable beschrieben werden.

4 Programm zur Normalverteilung

Zur Veranschaulichung der Bedeutung von σ wird ein MATLAB-Programm geschrieben. Für festes $\mu = 0$ wird die Dichtefunktion als Funktion der Parameter x und σ geplottet, sodass ein dreidimensionaler Graph entsteht.

```
% CH03 Programm zur Veranschaulichung der Normalverteilung

clf

dsig=0.25;
dx=0.5;
mu=0;
[X,SIGMA]=meshgrid(-10:dx:10,1:dsig:5);
Z=exp(-(X-mu).^2./(2*SIGMA.^2))./sqrt(2*pi*SIGMA.^2);
waterfall(X,SIGMA,Z)
```

```
xlabel('x')
ylabel('\sigma')
zlabel('f(x)')
title('N(0,\sigma) Dichte für verschiedene \sigma')
```

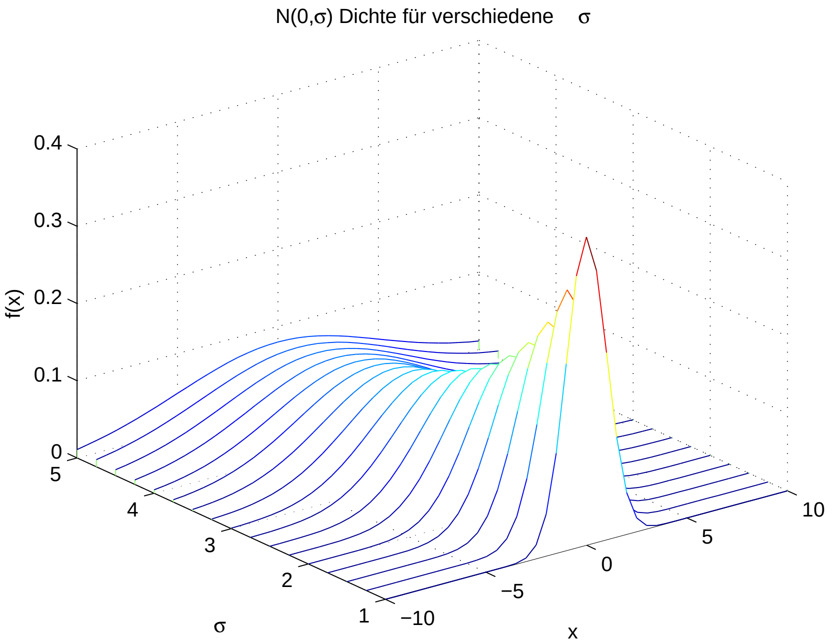

Abbildung 1: Dichte der Normalverteilung für verschiedene σ

Literatur

[1] D. J. Higham. *An Introduction to Financial Option Valuation*. Cambridge University Press, 2004, S. 25-28.