Vorbemerkungen zur Optionsscheinbewertung

Matthias Groncki

24. September 2009

Einleitung

Wir wollen uns mit den Grundlagen der Optionsscheinbewertung beschäftigen. Dazu stellen wir als erstes einige Vorraussetzungen an unsere Modell auf, um aus diesen dann die Put-Call-Parität und eine Ober- und Untergrenze für den Preis von Optionsscheinen abzuleiten. Anschliessend wollen wir den Preis eines Calls mit steigender Laufzeit untersuchen.

Existenz der risikolose Verzinsung am Kapitalmarkt

Voraussetzung 1. *Wir nehmen an, dass wir jederzeit jede beliebige Summe risikolos am Kapitalmarkt zu einem jährlichen Zinssatz r anlegen oder leihen können. Die Verzinsung erfolgt stetig.*

Dies ist ein Spezialfall der Zinseszinsrechnung. Sie wird auch Momentanverzinsung oder kontinuierliche Verzinsung genannt. Das Kapital wird zu jedem Zeitpunkt mit Zinseszinsen verzinst. Die Zeiträume der Zinsperioden strebt gegen Null bzw. die Anzahl der Zinsperioden strebt gegen unendlich.

Sei nun t der Zeitraum in Jahren über den wir das Geld anlegen oder leihen. Dann wächst unser angelegtes Geld um den Faktor e^{rt}, so dass wir den Wert einer Kapitalanlage zum Zeitpunkt t mit der Funktion

$$D(t) = e^{rt} \cdot D_0$$

bestimmen können, wobei D_0 unsere Anlagesumme zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ (Anlagezeitpunkt) ist. Wir können auch die Summe bestimmen, die wir zu dem Zinssatz r anlegen müssen, um in T Jahren die Summe D_T zu erhalten:

$$e^{-rT} \cdot D_T$$

Es lässt sich mit dieser Formel der gegenwärtiger Wert einer zukünftigen Zahlung bestimmen.

Unterschied zwischen stetiger Verzinsung und Verzinsung mit Zinseszins

Betrachten wir nun zuerst die Verzinsung mit Zinseszins. Sei t die Anzahl der Jahre, in denen das Kapital angelegt wird. Sei r_c der jährliche Zinssatz und m die Anzahl der Verzinsungen. Falls es sich um eine jährliche Verzinsung handelt gilt $m = t$ und bei einer unterjährigen Verzinsung gilt $m > t$. Den Wert unserer Anlage nach t Jahren lässt sich mit der folgenden Formel berechnen:

$$D(t) = \left(1 + \frac{r_c t}{m}\right)^m D_0.$$

Beispiel:
Wir legen 100 Euro zu einem Zinssatz von 2 % für 2 Jahre an, und die Bank verzinst uns das Geld 2 Mal pro Jahr. Es gilt $D_0 = 100$, $t = 2$, $m = 4$ und $r_c = 0.02$, daraus folgt

$$D(2) = \left(1 + \frac{0.02 \cdot 2}{4}\right)^4 \cdot 100 = 1.01^4 \cdot 100 \approx 104.06$$

. Dies lässt sich auch mit einer Zahlungsreihe nachrechnen:

Jahr	0	0.5	1	1.5	2
Kontostand	100	101	102,01	103,0301	104,0604

Aus $(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{m})^m$ für alle $n < m$ folgt, dass mit steigender Anzahl an Zinsperioden auch der Wert der Kapitalanlage steigt. Bei der stetigen Verzinsung strebt m gegen unendlich. Wir berechen nun den Zinsatz r_c, bei dem die Zinseszinsrechnung die gleiche Auszahlung wie die stetige Verzinsung liefert:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{r_c t}{m}\right)^m D_0 &&= e^{rt} D_0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(1 + \frac{r_c t}{m}\right)^m &&= e^{rt} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(1 + \frac{r_c t}{m}\right) &&= e^{\frac{rt}{m}} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{r_c t}{m}\right) &&= e^{\frac{rt}{m}} - 1 \\
\Leftrightarrow \quad & r_c &&= \frac{m(e^{\frac{rt}{m}} - 1)}{t}
\end{aligned}$$

Für kleine x gilt $e^x \approx 1 + x$. Wählt man m hinreichend groß, so folgt $e^{\frac{rt}{m}} \approx 1 + \frac{rt}{m}$. Man sieht, dass $r_c \approx r$. Für eine hinreichend große Anzahl an Zinsperioden liefern die Zinseszinsrechnung und stetige Verzinsung annähernd gleiche Auszahlungen.

Leiten wir nun die Formel für die stetige Verzinsung her:
Wir wollen den Wert unserer Kapitalanlage D_0 zum Zeitpunkt t berechnen. Wir teilen das Intervall $[0, t]$ in $L \in \mathbb{N}$ äquidistante Teilintervalle

$$[t_0, \delta t], [\delta t, 2\delta t], \ldots, [(L-1)\delta t, L\delta t],$$

wobei $\delta = \frac{1}{L}$ ist. In jedem dieser Teilintervalle wird die Anlage mit dem Zinssatz $r\delta t$ verzinst.

$$D(t_{i+1}) = (1 + r\delta t)\underbrace{D(t_i)}_{:=D_i}$$

Somit hat die Anlage zum Zeitpunkt t den Wert:

$$D(t) = D(t_L) = (1 + r\delta t)D_{L-1}$$

bzw. mit Hilfe der rekrusiven Definition

$$D(t) = D(t_L) = (1 + r\delta t)^L D_0.$$

Bei der stetigen Verzinsung strebt L gegen unendlich und mit $\log(1+\varepsilon) = \varepsilon + O(\varepsilon^2)$ (Taylorentwicklung) für $\varepsilon \to 0$ folgt

$$\begin{aligned}
D(t_L) &= (1 + r\delta t)^L D_0 \\
\lim_{L\to\infty} D(t_L) &= \lim_{L\to\infty} e^{L\log(1+\frac{rt}{L})} D_0 \\
&= \lim_{L\to\infty} e^{L(\frac{rt}{L} + (rt)^2 O(L^{-2}))} D_0 \\
&= \lim_{L\to\infty} e^{rt} e^{(rt)^2 O(L^{-1})} D_0 \\
&= e^{rt} D_0.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun zwei andere Modelle zur Erklärung der stetigen Verzinsung, die einen abweichenden Zinssatz für die Perioden verwendet.Als erstes betrachen wir

$$\begin{aligned}
D(t_{i+1}) &= \left(1 + r\sqrt{\delta t}\right) D(t_i) \\
\to D(t) &= e^{L\cdot\log(1+r\sqrt{t/L})} D_0 \\
\Rightarrow \lim_{L\to\infty} D(t) &= \lim_{L\to\infty} e^{L\cdot(r\sqrt{t/L} + r^2 t O(\frac{1}{L}))} D_0 \\
&= \lim_{L\to\infty} e^{L\cdot r\sqrt{t/L}} \cdot e^{r^2 t O(1)} D_0 \\
&= \lim_{L\to\infty} \underbrace{e^{r\sqrt{tL}}}_{\to\infty} e^{r^2 t O(1)} D_0 \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Bei diesem Modell wird das Kapital ins Unendliche wachsen. Als Nächstes wollen wir das folgende Modell betrachten:

$$\begin{aligned}
D(t_{i+1}) &= \left(1 + r(\delta t)^{\frac{3}{2}}\right) D(t_i) \\
\Rightarrow D(t) &= \left(1 + r(\delta t)^{\frac{3}{2}}\right)^L D(t_0) \\
\Leftrightarrow D(t) &= e^{L\cdot\log(1+r(\delta t)^{\frac{3}{2}})} D(t_0) \\
\Rightarrow \lim_{L\to\infty} D(t) &= \lim_{L\to\infty} e^{L\cdot(r(\delta t)^{\frac{3}{2}} + r^2 t^3 O(L^{-3}))} D(t_0) \\
&= \lim_{L\to\infty} e^{\frac{rt^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}} e^{r^2 t^3 O(L^{-2})} D_0 \\
&= \lim_{L\to\infty} e^{\frac{rt^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}} D_0 \\
&= 1 \cdot D_0
\end{aligned}$$

Bei diesem Model würde keine Verzinsung stattfinden.

Leerverkauf

Definition 1. Ein Leerverkauf ist der Verkauf eines geliehenen Anlagegutes oder Optionsschein mit der Absicht, diesen nach einer einiger Zeit zurückzukaufen und dann die Schuld auszugleichen.

Voraussetzung 2. *Wir setzten vorraus, dass es in unserem Modell jederzeit möglich ist, beliebige Menge kostenlos leerzuverkaufen.*

Sei t_1 der Zeitpunkt des Leerverkaufs, t_2 der Zeitpunkt der Rückkaufs, $S(t)$ der Marktwert des Gutes zum Zeitpunkt t und r der aktuelle jährliche Zinssatz, dann gilt für den Gewinn des Leerverkaufs:

$$e^{r(t_2-t_1)}S(t_1)-S(t_2).$$

Bei einem Leerverkauf setzt man auf fallende Marktpreise.
In der Praxis werden bei Aktienleerverkäufe die Aktien per Wertpapierleihe von Banken, Investmentsfonds oder ähnlichem gegen eine Leihgebühr geliehen. Diese werden dann am Kassamarkt verkauft. Bis zum Ende der Leihfrist muss die Aktien am Kassamarkt zurückgekauft werden.

Definition 2. Als Portfolio bezeichnen wir ein Bündel an Anlagegütern, Optionsscheinen und Zahlungsmittel (ZM).

Es soll möglich sein, negative Mengen jeder Position zu halten. Bei den Zahlungsmitteln entspricht ein negativer Betrag geliehenes Geld. Die negative Summe an Optionsscheinen oder Anlagegütern entspricht der leerverkauften Menge.

Arbitrage

Definition 3. Unter Arbitrage versteht man einen **risikolosen** Gewinn der größer ist, als der Gewinn aus der risikolosen Geldanlage am Kapitalmarkt.

Voraussetzung 3. *Wir nehmen für unser Modell an, dass es keine Möglichkeit für Arbitagegewinne gibt.*

Sollte es Möglichkeiten zur Erzielung von Arbitagegewinnung geben, würden sich die Preise durch die Selbstregulierung der Märkte (Angebot und Nachfrage) so einstellen, dass die Möglichkeit beseitigt wird.

Put-Call Parität

Lemma 1. *Für die Preise eines europäischen Calls C und Puts P, mit gleicher Laufzeit T, Basiswert S und Ausführungspreis E gelten*

$$C+E\cdot e^{-rT}=P+S.$$

Diese Beziehung wird Put-Call-Parität genannt.

Beweis. Die Herleitung der Parität erfolgt mit Hilfe der Annahme der Arbitragefreiheit des Marktes.

Betrachten wir dazu zwei Portfolios:

π_A: Ein Call zum Basispreis E und $E \cdot e^{-rT}$ an Zahlungsmittel
π_B: Ein Put und eine Einheit des zugrunde liegenden Basiswertes

Die Auszahlung des Portfolios π_A beträgt:

$$\max(S(T) - E, 0) + E = \max(S(T), E)$$

Die Auszahlung des Portfolios π_B beträgt:

$$\max(E - S(T), 0) + S(T) = \max(E, S(T))$$

Beide Portfolio liefern zum Zeitpunkt T die gleiche Auszahlung. Somit folgt mit der Annahme der Arbitragefreiheit, dass beide Portfolios den gleichen Wert zum Zeipunkt t_0 haben müssen. Angenommen $\pi_A > \pi_B$, dann könnte man das Portfolio π_A leerverkaufen und mit dem Erlös das Portfolio π_B kaufen. Am Zeitpunkt T liefert uns die Auszahlung des Portfolio π_B genau den Betrag um die Schuld aus dem Leerverkauf zu decken, da nun beide Portfolios den gleichen Wert haben. Wir hätten einen *risikolosen* Gewinn in Höhe von $(\pi_A - \pi_B)e^{r(T-t_0)}$ erzielt. Analog für $\pi_A < \pi_B$. Somit müssen beide Portfolios den gleichen Wert in t_0 haben. Daraus folgt die Parität. $\square$

Preis Ober- und Untergrenze für Optionen

Aus diesen Vorraussetzungen an unser Modell können wir nun eine Ober- und Untergrenze für den Preis der Optionen herleiten und zeigen, dass eine Call-Option mit zunehmender Laufzeit im Wert nicht fallend ist. Hat man zwei Calloptionen zum gleichen Basispreis, Basiswert und mit zwei verschiedenen Laufzeiten, so wird die Calloption mit der längeren Laufzeit nie weniger Wert sein als die Calloption mit der kürzeren Laufzeit.

Ober- und Untergrenze für Calls

Lemma 2. *Für die Ober- und Untergrenze des Preises eines Calls C, mit der Laufzeit T und den Ausführungspreis E gilt*

$$\max(S - Ee^{-rT}, 0) \leq C \leq S,$$

wobei S der Preis des Basiswertes ist.

Beweis. Betrachten wir zur Bestimmung der Grenzen folgende Portfolios:

π_A : Ein Call zum Basispreis E mit der Laufzeit T und Ee^{-rT} an ZM
π_B : Eine Einheit des Basiswertes

Aus den Überlegungen zu der Put-Call-Parität wissen wir, dass das Portfolio π_A eine Auszahlung von $\max(S(T), E)$ zum Zeitpunkt T hat. Das Portfolio π_B hat eine Auszahlung von $S(T)$.

Die Auszahlung von π_A ist also mindestens so groß wie die Auszahlung von π_B.
Angenommen der Wert des Portfolios π_B in t_0 wäre höher als der Wert von π_A. Man kann nun π_B leerverkaufen um mit dem Erlös π_A zu kaufen. Dies liefert einen Überschuss von $\pi_B - \pi_A$, den wir nun risikolos am Kapitalmarkt anlegen. Zum Zeitpunkt T liefert π_A eine Auszahlung von $\max(S(T),E)$. Da wir nun eine Einheit des Basiswertes kaufen müssen um unsere Verpflichtung aus dem Leerverkauf zu decken, liefert dies ein Gesamtgewinn von

$$(\pi_B - \pi_A)e^{rT} + \max(S(T),E) - S(T) = (\pi_B - \pi_A)e^{rT} + \max(E - S(T),0) > 0.$$

Dieser Gewinn wäre risikolos erzielt worden und dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass der Markt arbitragefrei ist. Somit muss gelten

$$\begin{aligned} S &\leq C + Ee^{-rT} \\ \Leftrightarrow C &\geq S - Ee^{-rT}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Da der Preis für einen Call nicht negativ sein kann, gilt für die *Untergrenze*

$$C \geq \max(S - Ee^{-rT}, 0). \tag{2.4}$$

Wäre der Preis eines Call höher als der Preis des Basiswertes, so würde sich durch ein Leerverkauf des Calls und den Erwerb des Basiswertes ein risikoloser Gewinn in Höhe von $e^{rT}(C - S) + \min(S(T),E)$ erzielen lassen. Dies wäre wieder ein Widerspruch zur Arbitargefreiheit. Somit kann der Call nicht teurer sein als der zugrunde liegende Basiswert

$$C \leq S. \tag{2.5}$$

Aus (2.4) und (2.5) folgt die Behauptung. □

Ober- und Untergrenze für Puts

Lemma 3. *Für die Ober- und Untergrenze des Preises eines Puts P, mit der Laufzeit T und den Ausführungspreis E gilt*

$$Ee^{-rT} - S \leq P \leq Ee^{-rT},$$

S ist der Preis des Basiswertes.

Beweis. Um die Grenzen eines Puts herzuleiten betrachten wir folgende Portfolios:

π_A : Ein Put zum Basispreis E mit der Laufzeit T und eine Einheit des Basiswertes

π_B : Ee^{-rT} an ZM

Das Portfolio π_A hat zum Zeitpunkt T eine Auszahlung von $\max(S(T),E)$, die Auszahlung des Portfolios π_B beträgt E. Die Auszahlung von π_A ist also mindestens so groß wie die Auszahlung von π_B.
Aus der Arbitragefreiheit folgt, dass in t_0 das Portfolio π_b maximal so viel Wert sein kann wie das Portfolio π_A:

$$\begin{aligned} Ee^{-rT} &\leq P + S \\ P &\geq Ee^{-rT} - S \\ P &\geq \max(Ee^{-rT} - S, 0) \end{aligned}$$

Die Auszahlung eines Puts beträgt $\max(E - S(T), 0)$. Wäre nun der Put teurer als der abgezinste Bezugspreis Ee^{-rT}, dann würde der Leerverkauf des Puts und die risiklose Verzinsung des Ertrages einen risikolosen Gewinn in Höhe von

$$(P - Ee^{-rT})e^{rT} + \min(S(T), E)$$

generieren. Dies wäre ein Widerspruch zur Arbitragefreiheit. Der Put kann also nicht mehr kosten als der abgezinste Bezugspreis.

$$\Rightarrow P < E^{-rT}$$

□

Alternativer Beweis mit (2.2), (2.4) und (2.5):

Beweis.

$$\begin{aligned} C &\underbrace{\geq}_{(2.4)} \max(S(T) - Ee^{-rT}, 0) \\ \underbrace{\Leftrightarrow}_{(2.2)} P + S - Ee^{-rT} &\geq \max(S(T) - Ee^{-rT}, 0) \\ \Leftrightarrow P &\geq \max(0, Ee^{-rT} - S) \end{aligned}$$

Und aus (2.5) folgt mit (2.2)

$$\begin{aligned} C &\leq S \\ \Leftrightarrow P + S - Ee^{-rT} &\leq S \\ \Leftrightarrow P &\leq Ee^{-rT}. \end{aligned}$$

□

Preisverlauf eines Calls mit zunehmender Laufzeit

Betrachten wir nun zwei Calls mit gleichem Bezugswert und Bezugspreis. Der erste Call hat eine Laufzeit von T_1 und der zweite Call eine Laufzeit von T_2. Sei nun $T_1 < T_2$. Wir wollen zeigen, dass der zweite Call mindestens die gleiche Auszahlung liefert wie der erste Call. Daraus folgt dann, dass der Wert des zweiten Calls mindestens genauso hoch ist wie der des ersten Calls. Ansonsten wäre dies ein Widerspruch zur Arbitragefreiheit.
In T_1 liefert der erste Call eine Auszahlung von $\max(S(T) - E, 0)$ in T_1, diese wird dann risikolos verzinst. In T_2 haben wir dann einen Wert in Höhe von $e^{r(T_2 - T_1)} \max(S(T) - E, 0)$. Der zweite Call muss mindestens diese Auszahlung erreichen.
Unterscheiden wir nun zwei Fälle:

$S(T_1) \leq E$: Die Auszahlung des ersten Calls beträgt Null. Die Auszahlung der zweiten Option wird nicht schlechter sein. Somit stimmt unsere Aussage in diesem Fall.

$S(T_1) > E$: In diesem Fall tätigen wir einen Leerverkauf des Basisgutes um uns gegen einen späteren Preisverfall zu sichern. Den Ertrag werden wir risiklos verzinsen. Dies liefert uns in T_2 folgende Zahlungen:

1.) $\max(S(T_2)-E,0)$ (die Auszahlung des zweiten Calls)

2.) $e^{r(T_2-T_1)}S(T_1)$ (verzinster Ertrag des Leerverkaufs)

3.) $-S(T_2)$ (Kauf des Basiswerts in T_2 um die Schuld aus dem Leerverkauf auszugleichen)

Insgesamt erhalten wir die Auszahlung

$$
\begin{aligned}
&\max(S(T_2)-E,0)+e^{r(T_2-T_1)}S(T_1)-S(T_2)\\
=&\max(e^{r(T_2-T_1)}S(T_1)-E, e^{r(T_2-T_1)}S(T_1)-S(T_2))\\
\geq&e^{r(T_2-T_1)}S(T_1)-E\\
\geq&e^{r(T_2-T_1)}(S(T_1)-E)\\
=&e^{r(T_2-T_1)}\max(S(T_1)-E,0)
\end{aligned}
$$

In beiden Fällen liefert der zweite Call mindestens die Auszahlung der ersten Option. Somit kann der Preis einer Calloption mit zunehmender Laufzeit nicht fallend sein. Dies wäre ein Widerspruch zur Arbitragefreiheit.

Bemerkung 1. *Mit der gleichen Argumentation zeigt man, das es für den Besitzer eines amerikanischen Call-Optionsschein nie optimal ist, die Option während der Laufzeit auszuüben.*