SS 2021
M. Röckner

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 2
Abgabe: Freitag, 30.04.2021
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\Omega \subseteq X$ offen. Beweisen Sie, dass eine Folge von Mengen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

- *K_n ist aufsteigend,*
- *$K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$,*
- *K_n ist abgeschlossen und beschränkt,*
- *$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$,*
- *Sei $K \subseteq \Omega$ kompakt, dann existiert $m \in \mathbb{N}$ so dass $K \subseteq K_m$.*

(4 Punkte)

Aufgabe 2.
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Setze

$$C^0(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}.$$

Sei $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit den Eigenschaften aus Aufgabe 1. Setze:

$$\rho(f) := \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{\|f\|_{B(K_m)}}{1 + \|f\|_{B(K_m)}}.$$

Beweisen Sie, dass $d(f, g) := \rho(f - g)$ eine Metrik auf $C^0(\Omega)$ ist.

(2 Punkte)

Beweisen Sie, dass $(C^0(\Omega), d)$ vollständig ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 3.
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wir wissen, dass jedes Skalarprodukt s auf V eine Norm durch

$$\|x\| := \sqrt{s(x, x)}$$

induziert. Umgekehrt: Beweise, dass jede Norm $\|\cdot\|$ auf V, welche die Parallelogrammidentität

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \qquad x, y \in V$$

erfüllt, durch ein Skalarprodukt induziert wird.

(4 Punkte)

Hinweis: Definiere $s(x, y) := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$, $x, y \in V$ und zeige zunächst mit der Parallelogrammidentität, dass $s(x, \frac{y_1+y_2}{2}) = \frac{1}{2}(s(x, y_1) + s(x, y_2))$ gilt. Folgere hieraus, dass $s(x, \frac{y}{2}) = \frac{1}{2}s(x, y)$ und $s(x, y_1 + y_2) = s(x, y_1) + s(x, y_2)$ gilt, und durch Induktion, dass $s(x, m2^{-n}y) = m2^{-n}s(x, y)$ für $n, m \in \mathbb{N}$. Folgere hieraus, dass s ein Skalarprodukt ist.

Aufgabe 4.
Sei $M\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *eine stetig und konvexe Funktion mit* $M(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$. *Die Menge* $\mathcal{L}_M(\mathbb{R})$ *ist als die Menge aller meßbarer Funktionen* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert für die ein* $c > 0$ *existiert, so dass*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} M\left(\frac{|f(t)|}{c}\right)\,\mathrm{d}t < \infty$$

gilt. Betrachte den Quotientenvektorraum

$$L_M(\mathbb{R}) := \mathcal{L}_M(\mathbb{R})/\{f \in \mathcal{L}_M(\mathbb{R}) \mid f = 0 \textit{ fast-überall}\}.$$

Für $f \in L_M(\mathbb{R})$ *definieren wir*

$$\|f\|_M := \inf\left\{c > 0 : \int\limits_{\mathbb{R}} M\left(\frac{|f(t)|}{c}\right)\,\mathrm{d}t \leqslant 1\right\}.$$

Beweise, dass dies eine Norm auf $L_M(\mathbb{R})$ *ist (Zeigen auch, dass* $\|f\|_M < \infty$ *gilt).*

(2 Punkte)

Beweise, dass $(L_M(\mathbb{R}), \|\cdot\|_M)$ *ein Banachraum ist.*

(2 Punkte)