SS 2021
M. Röckner

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 5
Abgabe: Freitag, 21.05.2021
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.
Sei $p \in [1, \infty[$.
a) Beweisen Sie, dass $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist. *(2 Punkte)*
b) Folgern Sie, dass $L^p(\mathbb{R}^n)$ separabel ist. *(2 Punkte)*
Hinweis zu b): Sie können dies mit Hilfe von Beispiel 2.5.3 und Lemma 2.4 folgern.

Aufgabe 2.
Seien X, Y kompakte metrische Räume und $f \in C(X \times Y)$. Beweisen Sie: Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, ..., a_n \in C(X)$ sowie $b_1, ..., b_n \in C(Y)$ mit

$$\sup_{x \in X, y \in Y} \left| f(x,y) - \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(y) \right| \leqslant \varepsilon.$$

(4 Punkte)

Hinweis: Approximationssatz von M.H. Stone

Aufgabe 3.
Sei $h \in C([0,1])$ strikt monoton steigend. Beweisen Sie: Für alle $f \in C([0,1])$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und Konstanten $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k h(x)^k \right| \leqslant \varepsilon.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4.
Sei $f \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(2\pi)$. Beweisen Sie: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und Konstanten $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ sowie $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ sodass

$$\sup_{x \in [0,2\pi]} |f(x) - p(x)| \leqslant \varepsilon$$

gilt, wobei

$$p(x) := a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx).$$

(4 Punkte)