WS 2020/21
M. Röckner

Übungen zur Maß- und Integrationstheorie

Blatt 3
Abgabe: Freitag, 20.11.2020
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.
Sei $d \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{E}$ die Menge aller offenen Mengen in $\mathbb{R}^d$ und $\sigma(\mathcal{E})$ die kleinste σ-Algebra die von den offenen Mengen erzeugt wird. Zeigen Sie dass die Borel-σ-Algebra (siehe Def. 2.5) identisch mit $\sigma(\mathcal{E})$ ist. *(2 Punkte)*
Folgern Sie hieraus, dass jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ messbar bzgl. der Borel-σ-Algebra ist (siehe auch Bsp. 4.4 (ii)). *(1 Punkt)*

Aufgabe 2.

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und $D \subseteq \mathbb{R}$ eine dichte Untermenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie das folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) f *ist* $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$*-messbar.*

(b) $\forall \alpha \in D\colon \{f \geqslant \alpha\} \in \mathcal{A}$.

(c) $\forall \alpha \in D\colon \{f > \alpha\} \in \mathcal{A}$.

(3 Punkte)

Aufgabe 3.

Sei $d \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^d$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir definieren folgende 2 Abbildungen

$$T_a\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto x + a$$
$$H_r\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto r \cdot x$$

Zeigen Sie, dass sowohl T_a als auch H_r $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-messbar sind.

(2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Bildmaße

$$T_a(m) = m, \quad H_r(m) = \frac{1}{|r|^d} m$$

auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt. *(2 Punkte)*

Aufgabe 4.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine μ-Nullmenge ist eine Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$. Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt vollständig, falls jede Teilmenge einer μ-Nullmenge in $\mathcal{A}$ liegt, also:

$$\forall A \subseteq \Omega \quad \text{mit } A \subseteq N \in \mathcal{A},\ \mu(N) = 0 \quad \Longrightarrow \quad A \in \mathcal{A}.$$

(i) Zeigen Sie: Sei μ^* ein äußeres Maß und sei $\mathcal{A}_{\mu^*}$ die σ-Algebra der μ^*-messbaren Mengen, so ist $(\Omega, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}})$ vollständig.

(1 Punkt)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir vervollständigen diesen Maßraum indem wir definieren:

$$R := \{B \subseteq \Omega \mid \exists \mu\text{-Nullmenge } N \text{ mit } B \subseteq N\},$$
$$\tilde{\mathcal{A}} := \{A \cup N \mid A \in \mathcal{A},\ N \in R\},$$
$$\tilde{\mu}\colon \tilde{\mathcal{A}} \to \bar{\mathbb{R}}, \quad \tilde{\mu}(A \cup N) := \mu(A) \text{ für } A \in \mathcal{A},\ N \in R.$$

Mit anderen Worten: R ist die Menge aller Teilmengen von μ-Nullmengen. Wir erweiteren die σ-Algebra und unser Maß, sodass $\tilde{\mu}(N) = 0$ gilt für alle $N \in R$.
(Betrachte dass Elemente in $\tilde{\mathcal{A}}$ immer von der Form $A \cup N$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $N \in R$ sind.)

(ii) Zeigen Sie, dass der neue Maßraum $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ vollständig ist.

(1 Punkt)

(Ohne Beweis: der Maßraum $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ ist die kleinste Erweiterung von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ die vollständig ist. Daher nennt man $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ auch die Vervollständigung von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$).
Wir wollen nun die Übungsaufgabe im Skript auf Seite 27 angehen. Sei μ ein σ-endliches Maß auf einem Ring $\mathcal{R}$. Nach Theorem 3.3 (Caratheodory) erhalten wir ein Maß $\bar{\mu}$ auf $\sigma(\mathcal{R})$ welches μ erweitert.

(iii) Zeigen Sie dass $(\Omega, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu^*)$ die Vervollständigung von $(\Omega, \sigma(\mathcal{R}), \mu^*)$ ist.

Gehen Sie dabei wie folgt vor:
Aus (i) folgt bereits eine der beiden Inklusionen. Für die andere Inklusion: Sei $B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ mit $\mu^*(B) < \infty$ und $n \in \mathbb{N}$ zeigen Sie, dass Mengen $A_{n,k} \in \mathcal{R}$ existieren, sodass

$$B \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{n,k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) \leqslant \mu^*(B) + \frac{1}{n}.$$

(1 Punkt)

Setzen Sie

$$A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{n,k}$$

und zeigen dass $A \in \sigma(\mathcal{R})$, das $B \subseteq A$ und das $\mu^*(A) = \mu^*(B)$ gilt. *(1 Punkt)*
Wir haben somit gezeigt:

$$\forall B \in \mathcal{A}_{\mu^*} \text{ mit } \mu^*(B) < \infty\ \exists A \in \sigma(\mathcal{R})\colon B \subseteq A,\ \mu^*(B) = \mu^*(A).$$

Wenden Sie diese Aussage auf $A \setminus B$ anstelle von B an und folgern Sie dass

$$B = (A \setminus C) \cup (B \cap C) \in \widetilde{\sigma(\mathcal{R})}.$$

(2 Punkte)

Damit ist die Inklusion gezeigt für Mengen B mit $\mu^*(B) < \infty$. Nutzen Sie die σ-Endlichkeit aus, um die Bedingung $\mu^*(B) < \infty$ loszuwerden. *(1 Punkt)*