WS 2020/21
M. Röckner

Übungen zur Maß- und Integrationstheorie

Blatt 5
Abgabe: Freitag, 04.12.2020
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, N eine μ-Nullmenge und $f' \colon N^c \to \mathbb{R}$ eine $N^c \cap \mathcal{A}$-messbare Funktion. Sei

$$f(\omega) := \begin{cases} f'(\omega), & \textit{falls } \omega \in N^c \\ 0, & \textit{falls } \omega \in N. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass f $\mathcal{A}$-messbar ist.
(Siehe auch: Übungsaufgabe im Skript Seite 52) *(2 Punkte)*

Aufgabe 2.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $f,\ g \colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ zwei $\mathcal{A}$-messbare Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) *Wenn f und g beide μ-integrierbar sind und $f \leqslant g$ μ-f.ü. gilt, so folgt $\int f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int g \,\mathrm{d}\mu$.*

(ii) *Wenn g μ-integrierbar ist und $|f| \leqslant g$ μ-f.ü. gilt, so folgt dass f μ-integrierbar ist.*

(iii) *Wenn g μ-integrierbar ist und $f = g$ μ-f.ü. gilt, so folgt dass f μ-integrierbar und $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$ gilt.*

(3 Punkte)

Aufgabe 3.
Definition:
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $P \colon \Omega \to \{wahr, falsch\}$ eine Abbildung. Eine solche Abbildung nennen wir eine Eigenschaft. Wir sagen die Eigenschaft P gilt μ-f.ü. falls eine μ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ existiert mit

$$\omega \in N^c \quad \Longrightarrow \quad P(\omega) = wahr.$$

Aufgabe:
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, sei $P \colon \Omega \to \{wahr, falsch\}$ eine Eigenschaft die μ-f.ü. gilt und $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ die Vervollständigung von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Sei $N_P := \{\omega \in \Omega \mid P(\omega) = falsch\}$. Beweisen Sie, dass $N_P \in \tilde{\mathcal{A}}$.
(Siehe auch: Übungsaufgabe im Skript Seite 50) *(2 Punkte)*

Aufgabe 4.
Beweisen Sie, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{A}_{m^*}$.
(Hinweis: der Spezialfall $d = 1$ ist im Skript auf Seite 55 bewiesen) *(3 Punkte)*