Übungen zur Maß- und Integrationstheorie

Blatt 9
Abgabe: Freitag, 22.01.2021
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.
Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

wobei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ ist. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2.
Beweisen Sie Theorem 11.7 für $n > 2$: Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, ..., n$. Maßräume, so dass für jedes i das Maß μ_i ein σ-endliches ist. Dann existiert für $\Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_n$ genau ein Maß μ auf $(\Omega, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i)$, so dass für alle $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, ..., n$, gilt:

$$\mu(A_1 \times ... \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n).$$

(2 Punkte)

Hinweis: Im Skript wurde Theorem 11.7 für $n = 2$ bewiesen. Folgern Sie den allgemeinen Fall mittels Induktion.

Aufgabe 3.
Sei $(a_{n,m})_{n,m\geqslant 1}$ eine Doppelfolge in $\mathbb{R}$ mit $a_{n,m} \geqslant 0$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m} = \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,m}$$

gilt. *(2 Punkte)*

Aufgabe 4 (Bemerkung 11.16 (ii))**.**
Beweisen Sie die Aussage in Bemerkung 11.16 (Theorem von Fubini für $n > 2$): Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, ..., n$ Maßräume, so dass für jedes i das Maß μ_i ein σ-endliches ist. Sei $f\colon \Omega_1 \times ... \times \Omega_n \to \bar{\mathbb{R}}$ eine nichtnegative $\mathcal{A}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{A}_n$-messbare Abbildung. Zeigen Sie, dass dann

$$\int\limits_{\Omega_1 \times ... \times \Omega_n} f(\omega)\ (\mu_1 \otimes ... \otimes \mu_n)(\mathrm{d}\omega) = \int\limits_{\Omega_{\pi(1)}} \cdots \int\limits_{\Omega_{\pi(n)}} f(\omega_1, ..., \omega_n)\ \mu_{\pi(n)}(\mathrm{d}\omega_{\pi(n)}) ... \mu_{\pi(1)}(\mathrm{d}\omega_{\pi(1)})$$

für jede bijektive Abbildung $\pi\colon \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ wohldefiniert und gültig ist. *(2 Punkte)*