WS 2020/21
M. Röckner

Übungen zur Maß- und Integrationstheorie

Zusatzblatt
Abgabe: **Keine**

Aufgabe 1.
a) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine* 2*-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei* $\varphi\colon T \to V$ *mit* $T \subseteq \mathbb{R}^2$*,* $V \subseteq M$ *offen eine lokale Parametrisierung. Sei* g *die Gramsche Determinante von* φ*. Beweisen Sie, dass für alle* $t \in T$

$$g(t) = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \right\|^2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(t) \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t), \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \right\rangle^2$$

gilt.
b) Sei $S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ *die Einheitssphäre mit folgender Parametrisierung*

$$\Phi\colon]0,\pi[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^3,$$

$$(\vartheta, \varphi) \mapsto (\cos\varphi \sin\vartheta, \sin\varphi \sin\vartheta, \cos\vartheta).$$

Dann ist $\Phi(]0,\pi[\times]0,2\pi[) = S_2 \setminus \{\textit{Nullmeridian}\}$*. Zeigen Sie, dass für die Gramsche Determinante* g

$$\sqrt{g(\vartheta,\varphi)} = \sin\vartheta$$

gilt.

Aufgabe 2.
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine* n*-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei* S *das Oberflächenmaß (bzw. Volumenmaß) auf* $(M, \mathcal{B}(M))$*. Zeigen Sie, dass*

$$S = m_n|_M$$

gilt, wobei m_n *das* n*-dimensionale Lebesguemaß ist.*
Hinweis: Nutzen Sie den Transformationssatz.

Aufgabe 3.
Sei $T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ *offen und* $F\colon T \to \mathbb{R}$ *eine stetig differenzierbare Funktion. Der Graph von* M *ist eine* $n-1$*-dimensionale Untermannigfaltigkeit in* $\mathbb{R}^n$ *(nach Aufgabe 3, Zettel 11) mit Parameterdarstellung*

$$\Phi\colon T \to M, \quad (t_1, ..., t_{n-1}) \mapsto (t_1, ..., t_{n-1}, F(t_1, ..., t_{n-1})).$$

Beweisen Sie, dass für die Gramsche Determinante

$$g(t) = 1 + \|\operatorname{grad} F(t)\|^2$$

gilt.

Aufgabe 4.
Ein metrischer Raum (X,d) *heißt Lindelöf-Raum, falls es zu jeder offenen Überdeckung* $(U_i)_{i\in I}$ *von* X *eine abzählbare Teilüberdeckung gibt. D.h.:*

$$\forall (U_i)_{i\in I} \colon U_i \text{ offen}, \bigcup_{i\in I} U_i = X \quad \Longrightarrow \quad \exists J \subseteq I \colon J \text{ abzählbar}, \bigcup_{i\in J} U_i = X.$$

Beweisen Sie, dass jeder separable metrische Raum (X,d) *ein Lindelöf-Raum ist.*

Hinweis: Sei $D \subseteq X$ *eine dichte, abzählbare Teilmenge. Betrachten Sie die offenen Bälle* $B_r(d)$ *mit* $d \in D$, $r \in \mathbb{Q}$. *Für jedes* $d \in D$ *und* $r \in \mathbb{Q}$ *betrachte die Menge*

$$I_{r,d} := \{i \in I | B_r(d) \subseteq U_i\}.$$

Sei des Weiteren $i_0 \in I$ *ein beliebiges Element aus* I. *Für jedes* $d \in D$ *und* $r \in \mathbb{Q}$ *setzen wir*

$$U(r,d) := \begin{cases} U_i, & \text{für ein fest gewähltes } i \in I_{r,d}, \text{ falls } I_{r,d} \neq \emptyset, \\ U_{i_0}, & \text{falls } I_{r,d} = \emptyset. \end{cases}$$

Wir ordnen somit jedem Ball $B_r(d)$ *eins der* U_i*'s zu, das diesen Ball enthält (sofern es so ein* U_i *gibt). Beachte, dass der zweite Fall in der Definition von* $U(r,d)$ *nie eintritt, wenn* r *hinreichend klein ist, und nur der Wohldefiniertheit von* $U(r,d)$ *dient.*

Zeigen Sie, dass

$$\{U(r,d) \mid r \in \mathbb{Q},\ d \in D\}$$

eine abzählbare Teilüberdeckung von $(U_i)_{i\in I}$ *ist.*

Aufgabe 5.
Sei $K_n := \overline{B_1(0)}$ *die* n*-dimensionale Einheitskugel. Zeigen Sie, dass*

$$\mathrm{Vol}_n(K_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$